МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Економіка підприємств транспорту»

Творонович В.І., Андрієнко М.М. Гудкова В.П.

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Методичні вказівки до вивчення
курсу для студентів економічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Київ - 2013

УДК 338.45

Творонович В.І., Гудкова В.П., Андрієнко М.М.
Економіко-математичне моделювання: Методичні вказівки до вивчення курсу для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання/ – К.: ДЕТУТ, 2013. – 82 с.

У методичному матеріалі подані вказівки щодо проведення теоретичних та практичних занять та розв’язання задач, тематика рефератів, тестові завдання, задачі для самостійного розв’язку, рекомендована література, зразок титульного аркуша та вихідні для виконання контрольної роботи.

Розглянуто на засіданні кафедри «Економіка підприємства» 18 травня 2011 р., протокол № 19 та на методичній комісії факультету економіки і менеджменту, протокол № від 24 травня 2011 р.

Укладачі:
к. е. н., доц. Творонович В.І.,
к.е.к. доц Гудкова В.П.,
к.е.н. доц.Андрієнко М.М.

Рецензенти: д.е.н. проф. Пасічник В. І.
д.т.н.проф.ЮнГ.М.

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичне моделювання посідає важливе місце в процесі підготовки і прийняття господарських рішень в галузі транспорту, є невід'ємною частиною системи управління економічною діяльністю транспортних підприємств, забезпечує науковість і обґрунтованість планування організаційно-економічних процесів залізниць та їх структурних підрозділів.

Тому вивчення курсу «Економіко-математичне моделювання» є важливою частиною підготовки фахівців галузі, сприяє всебічному розвитку та поглибленню економічного мислення майбутніх економістів. Ця дисципліна вивчає галузь з точки зору формалізації відносин, що виникають у процесі транспортного виробництва, досліджує моделі які описують об'єктивні закони. Опанування теоретичними знаннями та навичками при вивченні дисципліни дозволить спеціалістам на виробництві грамотно вирішувати комплекс технологічних завдань, вивчати і використовувати нові методи моделювання на залізничному транспорті України. В цьому розумінні важливого значення набуває методичне забезпечення самостійного вивчення курсу. Методичні вказівки щодо вивчення дисципліни складаються з варіантів контрольної роботи з подальшим розкриттям змісту самостійного опрацювання, характеру і порядку представлення результатів індивідуальної роботи, деталізовано питання практичних занять, критерії атестаційної оцінки, перелік рекомендованої літератури .

За кожною темою студентам пропонуються конкретні питання з посиланням на декілька літературних джерел та виконанням практичних завдань. Для кращого засвоєння матеріалу та вивчення теоретичних і практичних питань у самостійному режимі без залучення додаткових видань до кожної задачі розрахункової частини подано методичні рекомендації щодо здійснення розрахунків та узагальнення результатів. Для забезпечення самостійного вирішення розрахункових завдань по більшості задач пророблено декілька варіантів вихідних даних. Індивідуальний підхід провадиться за рахунок наведення по кожній темі декількох рефератів, що забезпечує не тільки загальне але й поглиблене ознайомлення з дисципліною.

За підсумками вивчення курсу студент повинен засвоїти закономірності і тенденції моделювання транспортних процесів, опанувати основні знання та базові навички ведення практичних розрахунків основних показників підприємств транспорту. Під час іспиту студент повинен показати знання про основні поняття математичного моделювання, вміти охарактеризувати особливості основних математичних систем , а також володіти методикою проведення математико-економічного обґрунтування рішень. Матеріал навчальної дисципліни базується на знаннях, які студенти отримують по економічних та математичних дисциплінах, що вивчаються на попередніх курсах.

Знання, отриманні під час вивчення дисципліни є підґрунтям для опанування дисциплін „Економічне обґрунтування господарських рішень", „Економічна діагностика", а також виконання дипломних робіт спеціалістів та випускних робіт магістрів.

Програма курсу орієнтована на ринкові умови господарювання і використання міжнародного досвіду функціонування транспорту.

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

1.1. Основні поняття економіко-математичного моделювання

Економетрія – наука, що вивчає конкретні кількісні взаємозв'язки економетричних об'єктів і процесів за допомогою математичних та статистичних методів і моделей.

Економетрика – це інструмент, який дозволяє перейти від якісного рівня аналізу до кількісного, шляхом використань статистичних даних дослідних величин.

Побудувати економетричну модель (ЕМ) – означає виконати таку послідовність дій:

1. З'ясувати однорідність розвитку економічного процесу за період спостереження;
2. Визначити причинні взаємозв'язки між показниками та факторами;
3. Зібрати і класифікувати статистичні дані;
4. Визначити фактори, що суттєво впливають на показники;
5. Визначити характер впливу основних факторів на показник і безпосередньо побудувати ЕМ;
6. Перевірити адекватність отриманої моделі експериментальним даним.

Середня хронологічна ($\overline{x_{xp}}$) показує, яким чином в середньому характеризується даний часовий ряд і розраховується за формулою

$$\overline{x_{xp}} = \frac{\frac{x_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} x_i + \frac{x_n}{2}}{n-2} \tag{1.1}$$

де x_i - i-ий рівень (миттєве значення) часового ряду,

n - кількість спостережень (рівня).

Середнє значення змінної визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.2}$$

Середній абсолютний приріст ($\overline{\Delta x}$) показує, як швидко змінюється кінцевий рівень ряду відносно початкового і розраховується за формулою

$$\overline{\Delta x} = \frac{x_n - x_1}{n-1} \tag{1.3}$$

де $x_п$ (x_1) – кінцевий (початковий) рівень ряду.

Середній коефіцієнт росту ($\overline{Кр}$) характеризує середню швидкість зміщення економічного показника або явища і розраховується за формулою

$$\overline{Кр} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} \tag{1.4}$$

Середній коефіцієнт ($\overline{K_{пр}}$) приросту відрізняється від середнього коефіцієнта росту на одиницю і розраховується як

$$\overline{K_{пр}} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} - 1 \tag{1.5}$$

Середній коефіцієнт росту (приросту), виражений у відсотках, називається відповідно середнім темпом приросту ($\overline{T_р}$) і середнім темпом приросту ($T_{пр}$).

Відхилення від середнього – дисперсія, яка показує середню суму квадратів відхилення членів ряду від середнього, позначається $у^2$ або var(x) та визначається за формулою

$$\operatorname{var}(x) = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{1.6}$$

де $\bar{x}$ - середнє значення тимчасового ряду,
n - кількість спостережень.

1.2. Проста лінійна регресія

Загальні поняття про лінійну регресію (ЛР)

Проста (парна) ЛР модель встановлює зв’язок між двома змінними: x та y і має вигляд:

$$y = \beta + \alpha x + \varepsilon, \tag{1.7}$$

де y – вектор значень, що спостерігаються залежної змінної (показник);
x – вектор значень, що спостерігаються незалежної змінної (фактор);
α, β – невідомі параметри регресійної моделі на всій сукупності значень x;
ε – вектор випадкових величин (помилок, шум). Регресійна модель (1.7) лінійна, так само як лінійний зв’язок між показником і фактором. Параметри α, β – статистичні невідомі значення, оцінимо їх величинами a, b, тоді

$$\hat{y} = ax + b \tag{1.8}$$

є оцінкою моделі $y = \beta + \alpha x + \varepsilon$.

Геометричний образ (1.8) – пряма на площині X0У;

b – визначає перетин $\hat{y}$ з віссю ОУ, a – нахил прямої до осі ОХ.

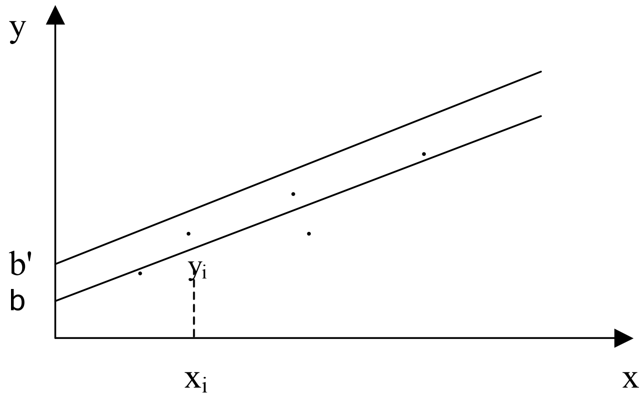


Рис.1.

На рис.1 (x_i, y_i) – відповідно значення, що спостерігаються незалежної і залежної змінних. Очевидно, можливо провести не єдину пряму, яка зв'язана з цими значеннями, що спостерігаються.

Модель специфікована, якщо вона вірна та без помилок.

Оцінка параметрів ЛР методом найменших квадратів (МНК)

Для вибору апроксимованої прямої використовується критерій мінімізації суми квадрату відхилення (метод найменших квадратів (МНК), засновниками якого є Гаус і Лаплас).

На рис.1. показано, що деякі точки лежать на прямій, деякі – ні, відхилення (помилка) відносно вибраної прямої визначає формула:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b - a\,x_i, \qquad i=1,n,$$

де y_i – значення, що спостерігаються,

$\hat{y}_i$ – точка на прямій, що відповідає значенню x_i, $i=1,n$.

Метод найменших квадратів (МНК) дозволяє мінімізувати суму квадратів помилок:

Невідомі b, a визначаються так, щоб мінімізувати $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b - ax_i\right)^2 = f(b,a) \to \min \tag{1.9}$$

Необхідною умовою екстремуму є рівність 0 перших похідних f(b,a):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - b - ax_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - b - ax_i\right) = 0 \end{cases}, \tag{1.10}$$

Перепишемо систему (1.10) у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i = bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Система (1.11) називається нормальною системою. Використовуючи форму-ли Кармера, з (1.11) знайдемо a:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (1.12)$$

з першого рівняння системи виразимо b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (1.13)$$

Отже, необхідна умова дає можливість отримати єдину критичну точку для функції f (a,b). Проте нас цікавить точка мінімуму.

Достатньою умовою існування екстремуму в критичній точці (a,b) є позитивність визначення:

$$D_{(a,b)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} & \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial a \partial b} \\ \dfrac{d^2 f(a,b)}{\partial b \partial a} & \dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} \end{vmatrix} \rangle 0 \quad \text{при цьому,}$$

якщо $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} > 0$, то в точці (a,b) f(a,b) має мінімум

якщо $\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} < 0$, то максимум.

Отже, знайдемо $D_{(a,b)}$. Для цього обчислимо другі похідні f(a,b).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - b - ax_i)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{\partial}{\partial b}\left(-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - b - ax_i\right)\right) = 2n, \text{ тт.к} \sum_{ш=1}^{т} 1 = n.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(-2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - b - ax_i)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(-2\sum_{i=1}^{n} (y_i - b - ax_i)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$D_{(a,b)} = \begin{vmatrix} 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{vmatrix} = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n^2\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right) =$$

$$= 4n^2\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} - \bar{x}^2\right) = 4n^2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} > 0. \tag{1.14}$$

Покажемо останній перехід у формулі (1.14):

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \underbrace{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{2\bar{x}\cdot n\bar{x}} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

Отже, якщо існує хоч одне $x_i \neq \bar{x}$, то МНК отримаємо точку мінімуму f (a,b), тобто оцінки a і b для α і β такі, що $\sum\limits_{s=1}^{n} e_s^2 = \min$.

Відзначимо, що МНК для обчислення a і b можливо використати для гомоскедастичних процесів: $\sigma_{x_i}^2 = \mathrm{const}$, фактори і випадкові величини не взаємопов'язані, тобто var $(x,\xi)=0$.

$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0 \operatorname{cov}(x, y)$, називається коефіцієнтом коваріації між x,y; cov (x,y) позначається також K(x,y)

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \mathrm{var}(x)$ – коефіцієнт варіації (дисперсія) позначається також D[x].

Визначення параметрів ЛР через числові характеристики показника факторів

Випишемо формулу для a:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\mathrm{var}(x)} \qquad (1.15)$$

Поділимо чисельник і знаменник на n^2:

$$a = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}}{\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2}_{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\mathrm{var}(x)},$$

тобто параметр a дорівнює відношенню коваріації (кореляційного моменту) до дисперсії фактора, і це тангенс кута нахилу $\hat{Y}$ до осі OX.

Випишемо формулу для b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{Y} - a\bar{X} \qquad (1.16),$$

звідси випливає, що лінія регресії проходить через точку, координати якої, є середнє значення показника У і фактора Х. Дійсно:

$y_i = b + ax_i = \bar{y} = a\bar{x} = ax_i \Rightarrow y_i - \bar{y} = a(x_i - \bar{x})$ – рівняння прямої, яка проходить через $\bar{x}$ і $\bar{y}$.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через середню точку під відомим кутом $a = \frac{K[x,y]}{D[x]}$, $Y - \bar{y} = \frac{\text{cov}[x,y]}{\text{var}(x)}(x - \bar{x})$ або $Y - \bar{y} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x)}(x - \bar{x})$.

Отже, проста ЛР виражена через середнє значення показника і фактора, коваріацію і дисперсію фактора.

Проведемо оцінку параметрів ЛР для згрупованих даних, тобто нехай вхідні дані фактора Х і показника У представлені у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1.

y_j / x_i	y_1	…..	y_i	….	y_l	m_x
x_1	m_{11}		m_{1j}		m_{1l}	m_{x1}
….						
x_k	m_{k1}		m_{kj}		m_{kl}	m_{xk}
m_y	m_{y1}		m_{yj}		m_{yl}	n

де x_i (i=1,k) і y_j (j=1,l) – середнє значення відповідних груп, то числові характеристики обчислюються за такими формулами:

$$n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij}$$ – число спостережень;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_{x_i} x_i}{n}$$ – середнє значення фактора;

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{l} m_{y_j} y_j}{n}$$ – середнє значення показника;

$$\text{cov}[x,y] = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij} x_i y_j}{n} - \overline{xy}$$ – коваріація X,Y.

$$D[x] = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_{x_i}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$ – дисперсія фактора.

Оцінка параметрів лінійної моделі для згрупованих даних:

$$a = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij} x_i y_j}{n} - n\overline{xy}}{\dfrac{\sum_{i-1}^{k} m_{x_i}(x_i - \overline{x})^2}{n}} = \frac{K[x,y]}{D[x]}$$

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{l} m_{y_j} y_j}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{k} m_{x_i} x_i}{n} = \overline{y} - a\overline{x}$$

Коефіцієнти кореляції і детермінації

Коефіцієнт кореляції – показник, який визначає кількісну оцінку зв'язку між двома величинами, він розраховується за формулою:

$$K_{yx} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)\,\mathrm{var}(y)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \qquad (1.17)$$

На відміну від коефіцієнта коваріації коефіцієнт кореляції є не абсолютний, а відносною мірою зв'язку між двома будь-якими факторами.

$-1 \leq к_{yx} \leq 1$.

Додатне значення $к_{yx}$ показує на прямий зв'язок між параметрами, від'ємне значення – на обернений зв'язок..

Якщо $к_{xy} \to \pm 1$, це вказує на наявність сильного зв'язку між величинами x і y;

Якщо $к_{xy} \to 0$, то зв'язку нема.

$$к_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} a \qquad (1.18)$$

Окрім коефіцієнта кореляції взаємозв'язок між двома або декількома факторами, а також аналіз на адекватність лінійної моделі реальному явищу оцінюється за допомогою коефіцієнта детермінації.

Частина дисперсії, яка пояснює регресію, називається коефіцієнтом детермінації, позначається R^2 та обчислюється за формулою:

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{регр}}{\sigma^2_{заг}}, \qquad (1.19)$$

де $\sigma^2_{регр} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = SSR$ – сума квадратів, що пояснює регресію,

$\sigma^2_{заг} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = SST$ – загальна сума квадратів,

$\sigma^2_{пом} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i)^2 = SSE$ – сума квадратів помилок.

SST = SSE + SSR – формула за якою розкладається дисперсія.

Враховуючи введені означення, можна записати:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}.$$

Для обчислення коефіцієнта детермінації використовується така формула:

$$R^2 = \frac{a^2 \operatorname{var}(x)}{\operatorname{var}(y)} = \frac{a \operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(y)} = \frac{\operatorname{cov}^2(x, y)}{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}.$$

Коефіцієнт R^2 завжди додатній, $0 \le R^2 \le 1$, він є мірою згоди регресії. Між коефіцієнтом кореляції $к_{xy} = \frac{a\sigma_x}{\sigma_y} = a\sqrt{\frac{\operatorname{var}(x)}{\operatorname{var}(y)}}$ і коефіцієнтом детермінації існує співвідношення $к^2 = R^2$. Якщо $R^2 \to 1$, то регресія добре погоджена.

Критерії оцінки лінійної регресії на адекватність

Перевірку на адекватність можна здійснювати за допомогою R^2, проте, якщо R^2 приймає не граничне значення, а 0,5;0,4;..., то потрібен інший критерій. Таким критерієм є F-критерій Фішера.

Перевірка моделі на адекватність по F-критерію Фішера виконується за таким алгоритмом:

а) обчислити F-відношення:

$$F = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1 - R^2)}{(n - 2)}} = \frac{MSR}{MSE},$$

де $MSR = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}{1}$; $MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i)^2}{(n-2)}$.

MSR – середній квадрат, пов’язаний з регресійною моделлю;

MSE – середній квадрат помилки;

1, n-2 – степінь свободи, відповідно MSR-чисельника і MSE-знаменника.

б) задати рівень значимості α або α 100%.

Якщо α = 0,05, то в 5% значень можлива помилка прогнозу, в інших 95% - висновки повинні бути правильними.

в) Із статистичної таблиці критичних значень F-розподіл Фішера з (1, n-2) степенем свободи і рівнем 100% (1-α) обчислюється критичне значення $F_{кр}$. Якщо $F \geq F_{кр}$, то H_o гіпотеза: a=0 відкидається, побудована модель адекватна, процесу що розглядається. Якщо $F_{кр} < F$, то H_o гіпотеза приймається, а модель вважається неадекватною.

Побудова інтервалів довіри

Основні припущення відносно параметрів a,b.

1. Математичне очікування в рівні E(b)= β.
2. Дисперсія b має вигляд:

$$\mathrm{var}(b) = E[b-\beta]^2 = \frac{\sigma_\varepsilon{}^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

3. Математичне очікування a:
   E(a) = α.
4. Дисперсія параметра a визначається за формулою

$$\mathrm{var}\,(a) = E[a - \alpha]^2 = \frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

5. Оцінка дисперсії випадкової величини ε має вигляд:

$$\sigma_\varepsilon{}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i^2}{n-k},$$

де k – кількість параметрів в регресії, що оцінюються, у випадку простої регресії k=2, звідси, $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i^2}{n-2}$ (докладне доведення в книжці Лук'яненко І.Г., Красникова Л.І. Економетрика, стор. 78-85).

В припущенні, що a, b розподілені по нормальному закону розподілення з відомим математичним очікуванням і дисперсією, формально можна записати:

$$b \sim N\left\{\beta; \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right\} \qquad (1.20)$$

$$a \sim N\left\{\alpha; \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right\} \qquad (1.21)$$

У виразах (1.20), (1.21) дисперсія взагалі невідома, оскільки вона залежить від дисперсії помилок σ_ε^2 випадкової величини ε, що не спостерігається, тому невідому величину σ_ε^2 змінюють на її оцінку σ_ε^2. Таким чином дійсна дисперсія a, b замінюється на оціночну:

$$\sigma_b^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right) \qquad (1.22)$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right) \qquad (1.23)$$

Встановлені значення параметрів регресії, побудованої за вибіркою є оцінками параметрів узагальненої регресійної моделі. Виникає питання: чи можна знайти довірчий інтервал узагальненої моделі, тобто інтервали, в яких із заданою ймовірністю потрапляють їх значення. Ці інтервали існують і можуть бути побудовані за допомогою деяких тестів.

Нехай існує деяка випадкова величина з математичним очікуванням a і дисперсією σ^2. Її можна перетворити до нормально розподіленої величини з математичним очікуванням 0 і дисперсією 1 шляхом перетворень:

$$Z_i = \frac{x_i - a}{\sigma_x} \qquad (1.24),$$

де x_i – випадкова нормально розповсюджена величина з математичним очікуванням 0 і дисперсією 1.

Наприклад, для параметра a таке перетворення має вигляд:

$$Z_i = \frac{a - \alpha}{\sigma_\alpha},$$

де a – нормально розподілена випадкова величина з математичним очікуванням α і дисперсією σ_α^2.

Якщо в формулі (1.24) замість невідомої дисперсії σ_ε^2 використовувати її оцінку σ_ε^2, то при невеликій кількості, даних, що спостерігаються (n < 30) перейдемо до другого t-перетворення:

$$t_i = \frac{x_i - a}{\sigma_x} \tag{1.25}$$

де x_i – нормально розподілена величина з математичним очікуванням a, дисперсією σ_x^2,

t_i – випадкова величина, розповсюджена по t-закону Ст'юдента с (n – 1) степеню свободи, де степені свободи розраховуються за виразом оціночної дисперсії:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{n=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Перетворення (1.25) можна записати і для випадкової величини $\bar{x}$, якщо вважати, що вона розподілена за нормальним законом розподілення з маточікуванням a і дисперсією $\sigma_{\bar{x}}^2$, тобто $\bar{x} \sim N(a, \sigma_{\bar{x}}^2)$.

Тоді t-перетворення має вигляд:

$$t = \frac{\bar{x} - a}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}} \tag{1.26}$$

де t-випадкова величина, розподілена за t-законом розподілення Ст'юдента з (n – 1) степенями свободи.

t-розподілення – це симетричне розподілення з середнім = 0 і дисперсією

$$\frac{n-1}{n-3},$$

яке → 1, при n → N, зрозуміло, що при n → ∞ t-розподілення наближається до нормального закону розподілення.

Для використання t-тесту Ст'юдента необхідно:

– вибрати бажаний рівень значущості (від 1 до 10%);
– визначити кількість степенів свободи.

Маючи ці дані можна визначити критичне значення t, яке поділяє всі можливі значення на 2 підмножини:

– підмножина, яка відкидається;
– підмножина, яка приймається при заданому рівні значущості.

Виділення першої підмножини – нуль-гіпотеза: H_o: $a=0_a$

Альтернативна гіпотеза H_1: $a \neq 0$.

Для вибірки з невідомою дисперсією.

Виберемо рівень значущості 5%. За таблицею t-розподілення Ст’юдента знаходимо для 10 степенем свободи і 5% рівня значущості $t_{кр} = \pm$ 2,228.

Зона, отримана нами:

$$-2{,}228 \le \left\{ t = \frac{(\bar{x} - b)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}} \right\} \le 2{,}228 .$$

За рішенням вибірки знаходимо $\bar{x}$ та обчислюємо t-статистику:

$$t^* = \frac{\bar{x} - b_o}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}}$$

Якщо t^* припадає в критичну зону, то можливі 2 випадки:

1. H_o – гіпотеза правильна, але відбувся малоймовірний випадок;
2. H_o – гіпотеза невірна.

Будемо розглядати тільки другий випадок, тобто H_o – гіпотеза про те, що a = 0 не вірна, тобто $a \neq 0$.

а,б, визначення МНК розподілені за нормальним законом, який формально можна записати так:

$$b \sim N\left(\beta_o, \sigma_b^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right) \qquad a \sim N\left(\alpha_o, \sigma_a^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right),$$

де дисперсії невідомі і можуть бути замінені оціночної дисперсії

$$\sigma_a^2 \to \sigma_b^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \sigma_a^2 \to \sigma_a^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

де $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k}$, k = *г* в найменшому випадку.

Побудуємо t-статистику для кожного параметра:

$t = \frac{b - \beta^*}{\sqrt{\sigma_b^2}}$ з (n – 2) степенем свободи,

$t = \frac{a - \alpha^*}{\sqrt{\sigma_a^2}}$ з (n – 2) степенем свободи.

де b (a) – оцінки параметрів β (α), отримані МНК;

β^* (α^*) – гіпотетичне значення, яке повинне приймати b (a) (H_o –гіпотеза) ;

$\sigma_b^2(\sigma_a^2)$ – оцінка дисперсії параметра b (a) з регресії;

n – розмір вибірки (кількість спостережень).

В економетриці розповсюдженою формою H_o гіпотези є: H_o: β^* (α^*) = 0; H_1: β^* (α^*) ≠ 0.

У такому випадку t-статистика для параметрів має вигляд:

$$t_b^* = \frac{b}{\sigma_b^2}; \qquad t_a^* = \frac{a}{\sigma_a^2}.$$

Її значення порівнюється з табличними значеннями, які дозволяє знайти критичну зону, тобто $-t_{\alpha\text{-}2} < t_a^* < t_{\alpha\text{-}2}$ з n – 2 степенями свободи і при α⊙100% рівні значимості, то можна стверджувати, що з ймовірністю (1 – α) оцінка b є статистично незначущою, тобто приймається H_o-гіпотеза.

У багатьох програмах разом із значеннями b (a) видаються значення оцінки стандартного відхилення й відношення між b (a) і це відношення називається t-значеннями для відповідних параметрів. Якщо воно перебільшує критичне значення, яке знайдено по таблиці, то приймається H_1 –гіпотеза: b (a) ≠ 0 та оцінюється відповідний параметр як статистично значущий. У випадку простої мінімальної регресії це також означає, що x має значний вплив на параметр y.

Т-тест може бути спрощено, а саме, якщо $t^* > 2$, то H_o-гіпотеза відкидається; або H_o-гіпотеза відкидається, якщо $\sigma_{b(a)}^2 < \frac{b(a)}{2}$.

Інші критерії оцінки ЛР

Тест Фішера має вигляд:

Відкинути H_o: a=0 з α⊙100% ризиком, якщо $$\frac{a^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\frac{\sum_{i=1}^{n} l_i^2}{n-2}} > F_{(1-\alpha)}(1, n-2)$$

Тест Ст'юдента:

Відкинути H_o: a = 0 з α⊙100% ризиком помилитись, якщо

$$\left| \frac{a\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}{\sigma_\varepsilon} > t_{\frac{\alpha}{2}} \right|,$$

де $t_{\frac{\alpha}{2}}$ – критичне значення із таблиці t–розподілу Ст'юдента з (n-2) степенями свободи при заданому рівні значущості.

Якщо проаналізувати ці дві формули, то побачимо, що

$$F_{(1-\alpha)}(1, n-2) = t^2_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Тобто обидва тести дають один результат відносно адекватності моделей.

t – статистику можна переписати $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{1-R^2}$,

Як бачимо коефіцієнт кореляції r визначає рівень зв'язку між двома показниками. У випадку ПЛР він встановлює силу зв'язку між x і y.

Тест Фішера для перевірки H_o–гіпотези: a = 0.

Тестування гіпотези H_o можна перевірити по іншому: по F–критерію Фішера перевірити на адекватність побудовану лінійну регресійну модель.

Для цього потрібно:

порахувати величину F–розподілу Фішера за формулою:

$$F = \frac{a^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{\frac{\sum_{i=1}^{n} l_i^2}{(n-2)}} = \frac{SSR}{\frac{SSE}{(n-2)}} \sim F(1, n-2),$$

тобто величина F розподіляється по F–розподілу Фішера з (1, n-2) степенями свободи.

Тестування по критерію Фішера значення величини x (адекватності моделі)складається із наступних 5 етапів.

1. Спочатку формується H_o-гіпотеза: a = 0.
2. Задається рівень значимості (помилка) $\alpha \cdot 100\%$ – наприклад 5%.
3. Обчислюється F–відношення.
4. За таблицею F–розподілу Фішера находять $F_{кр}$ при заданому рівні значимості і (1, n-2) степенями свободи (для простої лінійної репресії).
5. Якщо $F > F_{0,95}$ (1, n-2), де $F_{0,95}$ – значення F при 5% ризику відповімо на питання: як перевірити значущість коефіцієнта кореляції і як використати для цього t–статистику:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{(1-R^2)} \tag{1.27}$$

Використаємо (2.16) для визначення статистично значущий коефіцієнт кореляції для всієї сукупності ρ відрізняється від нуля.

Сформулюємо нуль–гіпотезу:

$$t^* = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-2^2}},$$

де r – вибірковий коефіцієнт кореляції між x і y,

n – кількість спостережень.

Величина t^* розподілена за t–розподілом Ст'юдента з (n-2) степенями свободи. Порахуємо t^* порівняємо із $t^{кр}_{\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha \cdot 100\%$ рівня значущості і (n-2) степенями свободи. Якщо $t^* > t^{кр}_{\frac{\alpha}{2}}$, тоді H^o–гіпотезу, що ρ=0 відкидаємо і приймаємо гіпотезу H_1: ρ≠0.

Якщо a значимо, то можна перейти до інтервального оцінювання, тобто вирахувати довірливі інтервали для a, y.

Інтервальне оцінювання:

a є [a – SE(a)t $_{кр}$; a + SE(a)$t_{кр}$]. Інтервальна оцінка a є рівнем довіри 1-α.

SE(a)= $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n \operatorname{var}(x)}}$

Точковий прогноз знаходиться за формулою:

$$y_o = b + ax_o$$

оскільки E(a) = α; E(b) = β, то E($\hat{y}_o$) = E (b + a + x_o) = E(b) + E(ax_o) = β + αx_o = E(y_o), тобто прогноз y_o = b + ax_o не зміщений. Дисперсія прогнозу

$\sigma^2(y_o) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_o - \bar{x})^2}{n \operatorname{var}(x)} \right]$, а для того, щоб використати цю формулу для інтервального оцінювання σ^2 замінимо на її оцінку σ^2, тоді

$SE(y_o) = \sqrt{\sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_o - \bar{x})^2}{n \operatorname{var}(x)} \right]}$ – стандартна помилка прогнозу.

Інтервальний прогноз з рівнем довіри 1-α знаходиться за формулою:

$$y_o \in \left[y_o - SE(y_o) \cdot t_{кр};\ \mathrm{y_o} + SE(y_o) \cdot t_{кр} \right]$$

де y_o – точковий прогноз, $t_{кр}$ – знайдено за таблицею Ст'юдента із заданим α і n – α степенями свободи.

Для оцінки якості лінійної регресії можуть бути використані і інші критерії, крім критерію Фішера і Ст'юдента.

Середня помилка прогнозу ME (mean error), яка часто використовується на практиці, обчислюється за формулою:

$$ME = \bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i ,$$

де $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

ME характеризують степінь зміщення прогнозу і для правильного прогнозу ME$\to 0$ при $n \to \infty$.

Дисперсія помилок (variation):

$$var(e) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2 = \sigma^2$$

і стандартне відхилення

$$\sigma = \sqrt{var(e)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2}$$

цей критерій визначає степінь розкиду значень змінної відносно свого середнього значення.

Для простої лінійної регресії

$$var(e) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \text{, оскільки } \bar{e} = 0.$$

Абсолютне середнє відхилення

$$MAD(e) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|e_i - \bar{e}\right|$$

Абсолютна середня процентна помилка MAPE

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|e_i|}{y_i}\cdot 100\% ,$$

цей критерій використовується при порівнянні точності прогнозів різних об'єктів, оскільки характеризує відносну точність прогнозу.

Якщо MAPE < 10%, то точність прогнозу висока, а відповідно, і модель; якщо 10% < MAPE < 20%, то хороша точність; 20% < MAPE < 50% – задовільна; MAPE > 50% – незадовільна.

Середня процентна помилка MPE

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{y_i}\cdot 100\% \qquad (e_i = y_i - \hat{y}_i).$$

Показник незміщеного прогнозу. З точки зору практики MPE не повинен бути > 5%. Як для MPE, так і для MAPE не обчислюються доданки для $y = 0$.

1.3. Багатофакторна лінійна регресія (БЛР) Приклади використання багатофакторного аналізу

Припустимо, що дослідник хоче вивчати динаміку ринку з обсягу продажу спортивного одягу фірми Reebok в Україні. Очевидно, що йому довелося б урахувати:

- частку ринку, яку утримує фірма;
- кількість продукції;
- імідж марки фірми поміж населення;
- середню зарплату населення в регіоні продажу;
- затрати на рекламу продукції в регіоні та ін.

Класична модель

Загальна багатофакторна модель записується у вигляді:

$$y = \beta_0 + \beta_l + ... + \beta_p x_p + \varepsilon \qquad (1.28)$$

де y – залежна змінна;

x_l, ..., x_p– незалежні змінні (фактори);

β_0, β_l, β_p – параметри моделі, які треба оцінити,

ε –випадкова величина, що не спостерігається.

Модель (2.1) справедлива для всієї генеральної сукупності факторів. модель, що базується на деякій обмеженій виборці, має вигляд:

$$y = b_0 + b_l + ... + b_p x_p + e_1 \qquad (1.29)$$

де b_0, b_1,..., b_p – оцінки невідомих параметрів загальної моделі;

e – випадкова величина (помилка).

Запишемо основні передумови багатофакторної регресії.

Припущення 1: Математичне очікування випадкової величини є дорівнює нулю для кожного i:

$$E(\varepsilon_i / x_{ie}, ..., x_{ni}) = 0$$

Припущення 2: Випадкові величини не корельовані, $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j.) = 0$, $i = j$.

Припущення 3: Модель гомоскедастична, тобто має однакову дисперсію для будь-якого спостереження: $var(\varepsilon_i) = \sigma^2 = const$.

Припущення 4: $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j.) = 0$ для любих ε_1 і x.

Припущення 5: Модель повинна бути вірно специфіцирована.

Припущення 6: Випадкова величина ε відповідає нормальному закону розподілу з нульовим математичним очікуванням і постійною дисперсією.

Припущення 7: Відсутня мультиколінеарність між факторами, тобто фактори не залежні між собою.

Математично відсутність мультиколінеарності між 2 факторами, наприклад, x_1 і x_2, визначається так: не існує чисел λ_1 і λ_2 одночасно не рівних нулеві таких, що

$$\lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} = 0, \ i = 1, n.$$

Етапи побудови багатофакторної регресійної моделі (БРМ)

Алгоритм побудови багатофакторної регресійної моделі (БРМ) складається із таких етапів:

1. Вибір і аналіз всіх можливих факторів, які на думку дослідника, впливають на показник, що вивчається;
2. Вимір і аналіз виділених факторів.
3. Математико-статистичний аналіз факторів.
4. Вибір метода і побудови БРМ.
5. Оцінка параметрів моделі.
6. Перевірка моделі на адекватність.
7. Розрахунок основних характеристик і побудова довірчих інтервалів.
8. Аналіз отриманих результатів, підсумок, висновки.

Якщо деякі з вибраних на першому етапі факторів не можна кількісно визначити, то їх треба уникнути.

Третій етап є одним з найважливіших етапів підготовки до побудови БРМ.

Якщо часовий ряд має недостатньо інформації, то спеціальними методами здійснюється її утворення; на цьому етапі здійснюється перевірка припущень та перевірка факторів на мультиплікативність. Для цього розраховується матриця коефіцієнтів парної кореляції:

$$R = \left(\begin{array}{c|ccccc} & y & x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline y & 1 & r_{ex_1} & \cdots & \cdots & r_{yx_k} \\ x_1 & r_{yx_1} & 1 & & & \\ \cdots & & & & & \\ x_k & r_{yx_k} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$r_{xjxi} = z_{xjxi}$ – коефіцієнти парної кореляції між x_j, x_j, $i = j = 1, k$;

r_{xjxi} – коефіцієнт кореляції між залежною змінною у та незалежною x_j. По головній діагоналі стоїть 1.

Якщо коефіцієнти кореляції між деякими факторами близькі до 1, це вказує на сильний зв'язок між ними або наявність мультиплікативності. Тоді один фактор потрібно залишити, а інші – виключити. Для вибору залишеного фактора можна скористатися такими міркуваннями:

– залишається той, який є найбільш впливовий, з економічної точки зору, на залежну змінну;

– залишається той, у якого більше значення коефіцієнта кореляції із залежною змінною.

Результатом цього етапу є вибір бази для побудови БРМ.

Розрахунок невідомих параметрів БРМ методом НК

Розрахунок коефіцієнтів моделі здійснюється МНК. Нехай маємо ряд спостережень залежної змінної $y = \{y_1, y_2, ..., y_п\}$, і факторів $x_l = \{x_{l1}, x_{l2},...,x_{ln}\}$, $x_p = \{x_{p1}, x_{p2},...,x_{pn}\}$.

За цими спостереженнями побудуємо лінійну багатофакторну модель:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + ... + b_p x_p + e,$$

де b_i, $i = 0, p$ – невідомі параметри, e – випадкова величина або помилка.

Як у випадку простої лінійній регресії знайдемо b_i методом найменших квадратів, тобто мінімізуючи:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_1 - \cdots - b_p x_p\right)^2$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x_1} - \cdots - b_p \overline{x_p} .$$

Для визначення параметрів b_i, $i = 1, p$ використаємо матрично-векторний підхід.

Матричний підхід до БЛР

Запишемо лінійну багатофакторну регресію (2.1) в матричному вигляді:

$$\overline{Y} = X\overline{\beta} + \overline{\varepsilon} , \qquad (1.30)$$

де $\overline{Y} = \left(y_1,...,y_n\right)^t$, $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ & . & . & . & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$ – матриця розмірності n (p+1), де n - кількість спостережень, p – число змінних $x_1, \ldots, x_p$,

$$\overline{\varepsilon} = \left(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\right)^t \quad \text{– вектор-стовпчик} \qquad (1.31)$$

$\overline{\beta} = \left(\beta_0, \beta_1,...,\beta_p\right)^t$ – вектор-стовпчик (p+1) – невідомих параметрів.

Вираз (1.31) – запис лінійної багатофакторної моделі в матричній формі.

Оцінка коефіцієнтів моделі багатофакторної лінійної регресії здійснюється МНК:

$$\overline{b} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \overline{Y} \qquad (1.32)$$

Рівняння вибірної регресії приймає вигляд:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_p x_p \qquad (1.33)$$

X^T – матриця транспортування до X; $(X^т \cdot X)^{-1}$ - обернена до матриці $(X^т \cdot X)$.

Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації

Мірою відповідності значень $\{\hat{y}_i, i =1, n\}$, отриманих із регресійної моделі, фактичним даним $\{y_i, i =1, n\}$ є коефіцієнт множинної кореляції, який визначається як коефіцієнт кореляції між $\overline{y}, \hat{y}$ та обчислюється за формулою:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} \qquad (1.34)$$

Квадрат коефіцієнту кореляції, як і у випадку ЛР, визначає коефіцієнт детермінації R^2:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} \qquad (1.35)$$

Нагадаємо означення:

$SST = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$; $SSR = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2$; $SSE = \sum_{i=1}^{n}\left(y_1 - y_i\right)^2$, тоді

$$SST = SSR + SSE \qquad (1.39)$$

Важливе значення має оцінений коефіцієнт детермінації.

Оцінений коефіцієнт детермінації R^2 та коефіцієнт детермінації R^2 пов'язані формулою:

$$R^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \cdot \frac{n-1}{n - p^{-1}} \qquad (1.40)$$

де p – кількість параметрів регресійної моделі,
n – кількість досліджень;
(п-р) – число степенів свободи в чисельнику;
п-1 – число степенів свободи в знаменнику.

Проаналізуємо формулу (10):

1. Якщо p > 1, то $R^2 < R^2$.
2. Якщо кількість факторів *x* збільшиться, то R^2 зростає повільніше ніж R^2, таким чином зменшується вплив кількості факторів на величину коефіцієнта детермінації, тому на практиці частіше використовується оцінений коефіцієнт детермінації, особливо при порівнянні різних моделей регресії.
3. Оцінений R^2 може бути й від'ємним на відміну від R^2, який завжди додатній.
4. Якщо $R^2 \to 1$, то R^2 прямує до одиниці, $R^2 \to 0$, то $R^2 \to 0$.

Перевірка моделі на адекватність за F-критерієм Фішера

Як і у випадку простої ЛР для оцінки адекватності моделі використовується *F* - критерій Фішера, при цьому гіпотеза приймає вигляд:

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0$$

проти альтернативної H_1- гіпотези: хоча б одного $\beta_i \neq 0$, i=1,p.

Для перевірки H_0 - гіпотези розраховується *F* - Статистика Фішера з *p* степенями свободи в чисельнику та *(n - p – 1)* степенями свободи в знаменнику:

$$F_p, n-p-1 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{p}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_i\right)^2}{n-p-1}},$$

де p – кількість факторів, які ввійшли в модель,

n – кількість спостережень.

Далі з F - таблиці Фішера знаходиться F_{Kp} с p степенями свободи в чисельнику *(n - p - 1)* степінню свободи в знаменнику та рівнем помилки a·100% або рівнем довіри *(1 - a) 100%.* Якщо $F > F_{Kp}$, то модель адекватна.

Знаходження інтервалів довіри для параметрів моделі

Для побудови довірчих інтервалів та перевірки значущості параметрів регресії b_i, необхідно:

1. Порахувати $SSE = \sum_{i=1}^{n}\left(y_1 - y_i\right)^2$;

2. $\delta_\varepsilon^2 = \dfrac{SSE}{n-p-1} = \dfrac{\sum_{n=i}^{n}\left(y_i - y_i\right)^2}{n-p-1}$;

3. $\delta_{b_1}^2 = \dfrac{\delta_\varepsilon^2 \cdot n \cdot \mathrm{var}(x_2)}{n^2 \cdot \mathrm{var}(x_1)\cdot \mathrm{var}(x_2) - n^2 \cdot \mathrm{cov}^2(x_{1,} x_2)}$;

4. $\delta_{b_1}^2 = \dfrac{\delta_\varepsilon^2 \cdot n \cdot \mathrm{var}(x_2)}{n^2 \cdot \mathrm{var}(x_1)\cdot \mathrm{var}(x_2) - n^2 \cdot \mathrm{cov}^2(x_{1,} x_2)}$;

5. В таблиці Ст'юдента знаходять критичні значення $t_{\frac{\alpha}{2}}^{\text{кр}}$ с (n-k) ступенями свободи.

6. За формулою $t_i = \dfrac{b_i}{\delta_{b_i}}$ знаходиться t розрахункове, якщо $t_i > t_{\frac{\alpha}{2}}^{\text{кр}}$, n-k, то b_i –значущій параметр і за формулою $\beta_i = b_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta_{b_i}$ знаходиться довірчий інтервал.

Якщо $t_i < t_{\frac{\alpha}{2}}^{\text{кр}}$, n-k, то b_i не є значущий.

Якщо модель адекватна за F-критерієм, то вона може бути використана для прогнозування

1.4. Мультиколінеарність (М)

1. Визначення терміна мультиколінеарності та її природа

Термін «мультиколінеарність» (М) означає, що в багатофакторній репресії два або більше незалежних факторів мають високу степінь кореляції

$$(r_{x_i x_j} \to 1,\ i \neq j).$$

Мультиколлінеарність може виникати з різних причин:

1 глобальна тенденція одночасного змінення економічних показників; на макрорівні на показники впливають одинакові фактори. Наприклад, дохід, споживання, накопичення, інвестиції, зайнятість мають тенденцію росту в період економічної економіки і спаду в період рецесії.

2 використання в економічних моделях лагових значень однієї змінної. Наприклад, в моделях споживання витрати на споживання за минулий період вводяться в модель разом з величиною поточного споживання.

Оскільки незалежні фактори – випадкові величини, то між ними у випадку мультиколлінеарності є приблизна лінійна залежність

$$x_i = \alpha x_j + \sum 1, \ \sum - \text{випадкова величина}.$$

Так як метод НК використовується в припущенні відсутності мультиколінеарності між факторами, то виникає питання про її тестування та усунення мультиколінеарності.

Теоретична послідовність мультиколінеарності (М).

Якщо в регресії є мультиколінеарність, тоді не виконується умова $\det\left|[x]^t[x]\right| \neq 0$ і при строгій мультиколлінеарності не можливо отримати оцінки параметрів МНК.

Якщо мультиколлінеарність нестрога, то отриманні оцінки параметрів репресії МНК мало надійні. В цьому випадку незначні зміни вибірки приводять до суттєвих змін оцінок параметрів. Якщо $\det\left|[x]^t[x]\right|$ близько до нуля, то в репресії присутнє явище мультиколлінеарності. При визначенні структури РМ ціленапрямлено побудувати кореляційну матрицю

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{yx_1} & \cdots & r_{yx_p} \\ r_{x1y} & & & \\ & \ddots & & \\ r_{x_p y} & & r_{x_p x_{p-1}} & 1 \end{bmatrix}.$$

В регресію включаються, в першу чергу, ті фактори, які корелюють з показниками і не корелюють між собою.

Практичними наслідками мультиколлінеарності є**:**

1. Велика дисперсія і коваріація оцінок параметрів і вирахованих МНК;
2. Збільшення довірливого інтервалу;
3. Незначимість t – статистики.

Тестування мультиколінеарності

Єдиного методу тестування мультиколлінеарності немає. Однак уже показано:

1. Метод по коефіцієнтам кореляції. Якщо r>0,8, тоді мультиколлінеарність є проблемою.

2. Велике значення R^2 та незначимість t – статистики одночасно.

3. F – тест для визначення мультиколлінеарності.

Цей тест був запропонований Глаубером, Фарром і складається із такого:
1. Побудова репресії для кожного фактора x_1 з усіма остальними факторами;
2. Розрахунок R^2 для цього доповнювального регресіонного рівняння;
3..Для кожного R^2 розрахунок F – відношення по формулі:

$$F_i = \frac{(R^2_{x_i x_1 \ldots x_p})/(p-1)}{(1-R^2_{x_i x_1 \ldots x_p})/(n-p)},$$

де n – кількість спостережень,
p – кількість факторів.

4. Перевірка гіпотези

$H_0: R^2 x_i x_1 \ldots x_p = 0$ проти альтернативної гіпотези

$H_1: R^2{}_{x_i} x_1 \ldots x_p \neq 0.$

5. Якщо $F_i \geq F_{кр}$, тоді H_0 відкидається, а x_i фактор мультиколлінеарний, якщо $F_{кр} \geq F_i$, то H_0 приймається, а фактор x_i не є мультиколлінеарним.

Способи усунення мультиколінеарності

Для усунення мультиколлінеарності, існує декілька способів:

а) Якщо між x_i, x_j має мультиколлінеарність, то один із факторів не розглядається, якщо

$$r_{yk_i} \prec r_{yx_j},$$

то x_i не розглядається.

б) спосіб заміни фактора $x*_j = x_i - x_j$, після цього перевіряється наявність мультиколлінеарності між x_i і x^*_j. Якщо немає, то x_j заміняється x^*_j, якщо є, то виключення по першому способу.

1.5. Моделі лінійної регресії з автокореляційним обуренням

Вступ і опис моделі

Незалежність випадкових величин – одно із основних припущень класично-регресійного аналізу, якщо воно не виконується, то має місце автокореляція.

Автокореляцією називається залежність між значенням однієї виборки із запізненням в один лаг.

Наприклад, якщо між $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ і $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_{p+1}$ однієї виборки є залежність, то це автокореляція. Якщо така залежність між значеннями двух різних виборок $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ і $W_2, \ldots, W_{p+1}$ це свідчить про наявність серійної кореляції. Автокореляція виникає в зв'язку з інертністю і циклічністю економічних процесів і лагових затримань.

Роздивимось модель

$$y = x\beta + U\ ,(1)$$

де $U=(U_1/i=1, n)^t$ має наступні свойства:

1. EU=0
2. $DU_i+EU_i^2=\delta^2 const, i=\overline{i_1n}$ (рівність дисперсій).
3. Колерівані обурення $cov(v_i,v_j) \neq 0,\ i \neq j$
4. Незалежність U_i і регресорів x_{ij} для всіх i, j.
5. Обурення U_i нормально розділені для всіх i.

Σ– обурення – обозначається для гомоскедастичних моделей.

Тестування автокореляції. Тест Дарбина-Уотсона

Найбільш розповсюдженим і відомим являється тест Дарбина-Уотсона, він складається із декількох етапів і включає зони невизначенності. Оцінюється модель МНК, розраховується значення d-статистики за формулою:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Теоретично доведено, що $d \in [0; 4]$.

III етап: Задати рівень значення λ і по таблиці Дарбіна-Уотсона знайти d при K – факторах, n – спостереженнях, їх два d_e і d_i.

IV етап: Якщо знайдене $0<d<d_e$, то є позитивна автокореляція; якщо $d_e \leq d \leq d_и$, або $4-d_и \leq d \leq 4-d_e$, тоді d потрапляє в зону невизначенності де неможна зробити висновок про наявність або відсутність автокореляції.

Якщо $4-d_e<d<4$, тоді є негативна автокореляція; якщо $d_и<d<4-d_и$, то автокореляція відсутня .

Якщо d попадає в зону невизначенності, тоді важають, що автокореляція є. Наприклад, нехай для деякої регресіонної моделі, яка має один фактор і 20 спостережень пораховано d=0,34, при λ=0,05 по таблиці Дарбіна-Уотсона маємо d_e=1,20; d_n=1,41, оскільки

$0< d<d_e$, то маємо позитивну кореляцію.

Нехай при λ=0,05, K=3, n=20, d=2,98,по таблиці маємо $d_{e=}1{,}10$, d_n=1,54, $d_n<d<4-d_4$, тут автокореляція відсутня.

Вплив автокореляції на оцінки МНК

1. Оцінки параметрів МНК будуть не зміщеними, але не будуть ефективними, тобто не мають найменшу дисперсію.

2. Оцінка дисперсії випадкової величини часто переоцінює дійсну дисперсію і, як наслідок, отримуємо переоцінений коефіцієнт детермінації R^2.

3. Стандартні оцінки коваріаційної матриці будуть зміщеними, а тому процедура перевірки гіпотез і інтервального оцінювання, основані на стандартних статистиках, будуть некоректними.

4. Розглянемо лінійну регресіонну модель:

$$y_i = \beta + \lambda x_i + v_i, \quad i = \overline{1_1 n},$$

при зробленних передбаченнях відносно v_i. Нехай між випадковими величинами буде лінійна залежність:

$$\nu_1 = \rho\nu_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1}_i n, \; -1 < \rho < 1,$$

де ρ– коефіцієнт автокореляції, ε_i – випадкова величина, відносно якої виконуються всі класичні передбачення МНК:

$$E(\varepsilon_i)=0, \; \operatorname{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0; \quad \operatorname{var}(\varepsilon_i^2) = \delta^2.$$

5. Модель авторегресії. Природа авторегресійних моделей і роль лага в економіці. Модель відома в літературі як авторегресійна модель Маркова першого порядку (AR(1)) або авторегресійна лагова модель. В такій інтерпретації ρ називається коефіцієнтом автокореляції першого порядка і коефіцієнтом з лагом 1. Оцінка α в моделі МНК визначається за формулою

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

дисперсія а розраховується за формулою:

$$var(a) = \delta_a^2 = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad ,$$

$$var(в) = \delta_в^2 = \frac{\delta_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad ,$$

Доведено, що при наявності автокореляції оцінки параметрів залишаються лінійними і незміщеними, але не мають найменшої дисперсії, а, отже, не є ефективними, вони розраховуються по формулі.

$$a^* = \frac{\sum_{i=2}^{n}(x_i - \rho x_{i-1})(y_i - \rho y_{i-1})}{\sum_{i=2}^{n}(x_i - \rho x_{i-1})^2} + A \;,$$

де A – коректуючий параметр;

$$\upsilon ar(a^*) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum_{i=2}^{n}(x_i - \rho x_{i-1})^2} + D,$$

де D – коректуючий параметр.

Саме такі оцінки дає загальний метод найменших квадратів. У випадку автокореляції не слід користуватися МНК.

Тому:

1. Тестування наявності автокореляції проводиться по критерію Дурбина-Уотсона.
2. Параметри моделі розраховуються загальним МНК.
3. Якщо регресійна модель включає не лише поточні значення незалежної зміної x_1, але і минулі, то вона називається дистрибутивно-лаговою моделлю. Якщо в модель включено одне і більше минулих значень залежної змінної, тоді вона називається авторегресійною моделлю.

$y_{t=\alpha+\beta_0} x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ дистрибутивно - лагова модель

$\mathrm{y}_{\mathrm{t}} = \alpha + \rho x_t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon$ авторегрисіонна модель

Авторегрисивні і дистрибутивно-лагові моделі мають великий попит в економіці. Наприклад, функція споживання. Нехай індивід отримав щорічно зростання зарплати на 1200 грн, це зростання постійне і буде зберігатися протягом років. Питання, як це відобразиться на схемі щорічних витрат на споживання?

Припустимо, що 480 грн на споживання в 1 році після зростання, 360 – на 2 році, 240 – на третій – решта на зберігання.

На кінець третього року витрати на споживання піднімуться до 1080 грн. Функцію споживання можна записати так :

$y = const + 0{,}4x_t + 0{,}3x_{t-1} + 0{,}2x_{t-2} + \varepsilon_t$

y витрати;

x прибуток

В загальному вигляді дистрибутивно-лагова модель записується так:

$$\mathrm{y_t} = \alpha + \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{K}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{x_{t-i}} + \varepsilon_{\mathrm{t}},$$

ця дистрибутивно-лагова модель з кінцевим лагом в К-м періоді.

Коефіцієнтом β_0 називається короткостроковий або впливовий мультиплікатор, оскільки показує вплив змінної х на зміну показника у в поточний період часу; $(\beta_0 + \beta_1)$ зміна в другому періоді і т.д. Вони називаються проміжними інтервалами.

$\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{K}} \beta_{\mathrm{i}} = \beta$ називається загальним дистрибутивно-лаговим мультиплікатором.

Існують 3 основні причини лагів:

- психологічні причини – через інерцію люди не змінюють своїх потреб, звичок відразу, а тому миттєве змінення матеріального положення не може миттєво змінити погляд на речі, звички, статус;
- технологічні причини, коли людина, раніше ніж прийняти рішення, аналізує стан ринку з урахуванням цінових очікувань і може відкласти прийняття рішень на певний час або навпаки прийняти негайно рішення;
- інституціональні причини, коли, наприклад, підписав контракт з роботодавцем на певний час, індивід не може прийняти більш вигідну пропозицію до закінчення строку.

Для оцінки параметрів дистрибутивно-лагових моделей існує 2 підхода: поступова оцінка і тарифне оцінювання, коли допускаємо, що параметри мають визначену систематичну закономірність.

1.6. Моделі з гетероскедастичним збуренням
Визначення гетероскедастичності та її природа

Одним з основних припущень класичної ЛР є постійність дисперсій кожної випадкової величини ε_i (гомоскедастичність):

$$\text{var}(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2 = \delta^2_{\sum} = \text{const}$$

Якщо це припущення не виконується для деякого і, то має місце гетероскедастичність:

$$\text{var}(\varepsilon_i) = \delta^2_{\sum i} \neq \text{const}$$

Розглянемо модель лінійної регресії:

$$y_i = \beta x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,\,k-1} + \upsilon_i,\ i = 1,n \qquad (1.41)$$

або модель з константою:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,\,k-1} + \upsilon_i,\ i = 1,n \qquad (1.42)$$

Тут υ_i, $i=1,n$ – компоненти вектора обурення $\upsilon = (\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n)$, який на відміну від $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ в гомоскедастичній постановці володіє наступними властивостями:

1. Маточікування $E\,\upsilon = 0$;
2. Дисперсія $Д\,\upsilon_i = \delta_i^2, i = \overline{1,n}, \delta_i^2 \neq \delta_j^2$, якщо $i \neq j$;
3. Незалежність обурень υ_i, υ_j при $i \neq j$;
4. Незалежність обурень і регресантів x_{ij} для всіх i, j;
5. Обурення υ_i нормально розподіленого для всіх i;

Припущення 2 і 3 зручно записати в матричному вигляді:

$$Д\,\upsilon = \begin{pmatrix} \delta_i^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n^2 \end{pmatrix}$$ – квадратична матриця.

Наслідки порушення припущення про гомоскедастичність

Внаслідок порушення припущення про гомоскедастичность, тобто у разі гетероскедастичності, МНК для визначення параметрів стає непридатним, оскільки:

1. Оцінки МНК будуть незміщеними, але не будуть ефективними, тобто не матимуть якнайменшої дисперсії;
2. Стандартні оцінки неваріаційної матриці МНК будуть зміщеними і, як правило, процедура перевірки гіпотез і інтервального оцінювання, засновані на стандартних статистиках, будуть некоректними.

Тестування гетероскедастичності

Для виявлення гетероскедастичності не існує єдиного правила, але можливість тестування існує. Такими прийомами є:

– аналіз змісту проблеми,
– критерій Голфельда-Кванта;
– критерій Уайта.

Аналіз змісту проблеми: іноді гетероскедастичність вгадується інтуїтивно або висувається як абсолютне припущення (наприклад, при вивченні бюджету сім'ї можна помітити, що дисперсія залишків зростає по мете збільшення доходу).

Загальні критерії характеризуються тим, що при формулюванні не використовується припущення про характер гетероскедастичності – в цьому їх гідність.

Недолік полягає у тому, що такі критерії тільки виявляють наявність гетероскедастичності, але не дають інформації для дозволу проблеми. Одним їх критеріїв даної групи є критерій Голфельда-Кванта: його використовують, якщо всі спостереження по деякій ознаці можна розбити на дві групи. Наприклад, у разі однієї незалежної змінної (регресанта) спостереження з якнайменшими значеннями включаються в одну групу, з найбільшими – в іншу. Частину спостережень з середніми значеннями можна відкинути.

Отже, нехай сукупність спостережень складається з n значень, в першій групі n_1, до другої увійшли n_2, тоді $n \geq n_1 + n_2$.

Для того, щоб застосувати критерій Голфельда-Кванта, треба для кожної вибірки оцінити модель МНК і знайти:

δ_1^2 – оцінку дисперсії збурення для 1-групи спостережень,

δ_1^2 – оцінку дисперсії збурення для другої групи: $\delta^2 = \dfrac{SSR}{n-k}$,

де k- кількість регресантів включаючи константу.

Порахувати

$$F = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2} \tag{1.43}$$

Якщо гетероскедастичність відсутня, то статистика (1.43) має розподіл Фішера з $n_1 - k_1$, $n_2 - k$ ступенями свободи.

Перевірка гіпотези здійснюється по алгоритму:

1. Якщо $\delta_1^2 > \delta_1^2$, то $F = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$ і порівняти з F_{kp} (α_1, $n_1 - k_1$, $n_2 - k$). Знайти при вибраному рівні значущості α в таблиці розподілів Фішера із $n_1 - k_1$, $n_2 - k$ ступенями свободи F_{kp}.

Якщо $\delta_1^2 < \delta_1^2$, то обчислити $F = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$ і порівняти її з F_{kp} (α_1, $n_1 - k_1$, $n_2 - k$).

2. Якщо $F < F_{kp}$, то гетероскедастичність відсутня. Якщо $F \geq F_{kp}$, то гетероскедастичність має місце.

Регресійні критерії виявлення гетероскедастичності будуються на основі припущення, що дисперсія пропорційна функції деякої невідомої змінної:

$$w_i^2 = f(z_i), i = \overline{1,n}$$

Одним з критеріїв цієї групи є критерій Уайта.

Критерій Уайта.

Нехай ми маємо модель:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_{k-1} x_{i,\,k-1} + \upsilon_i,\ i = 1,n$$

1 етап: оцінимо модель МНК і знайдемо погрішності U_i, $i = 1,n$

2 етап: побудувати регресію квадратів залишків щодо всіх змінних, їх квадратів і попарних добутків.

Наприклад, хай ми маємо модель:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_2 + \upsilon_i,\ i = 1,n \tag{1.44}$$

На другому етапі будуємо регресію:

$$u_i^2 = \gamma_0 + \gamma_1 x_{i1} + \gamma_2 x_{i2} + \gamma_3 x_{i1}^2 + \gamma_4 x_{i2}^2 + \gamma_5 x_{i1} x_{i2} + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n} \tag{1.45}$$

3 етап: перевіряється одержана модель на значущість, тобто розраховується

$$F = \frac{\frac{R^2}{(k-1)}}{\frac{(1-R^2)}{(n-K)}} = \frac{\frac{SSE}{(k-1)}}{\frac{SSR}{(n-k)}} \tag{1.46}$$

Потім по звичному алгоритму: якщо $F \geq F_{kp}$, то модель значуща і приймається.

Якщо модель значуща, то збурення в початковій моделі гетероскедастичне. Головний недолік регресійних критеріїв полягає у тому, що, якщо критерій не виявляє гетероскедастичність, це не означає, що її немає. Коректний висновок: немає гетероскедастичності певного вигляду.

Переваги цих критеріїв: з їх допомогою можна знаходити вагові коефіцієнти для узагальненого МНК.

Оцінювання параметрів моделі у разі гетероскедастичності. Порівняння МНК і узагальненого МНК

Припустимо, що коваріаційна матриця відома з печністю до коефіцієнта пропорційності, тобто

$$Дv_i = \delta^2 w_i^2, \quad i = \overline{1,n},$$

де w_i^2 – відомі, а δ^2 – невідомий коефіцієнт пропорційності. Розділимо рівняння системи (1) на $w_i \quad (i = \overline{1,n})$, тобто і-е рівняння системи на w_i, одержимо

$$y_i^* = \beta_0 x_{i0}^* + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_s x_{is}^* + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{1.47}$$

де $y_i^* = \dfrac{y_i}{w_i}, \quad i = \overline{1,n}$ (1.48)

$$x_{is}^* = \frac{x_{is}}{w_s}, \quad s = 1, \overline{k-1}, i = \overline{1,n} \tag{1.49}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\upsilon_i}{w_i}, \quad i = \overline{1,n} \tag{1.50}$$

Якщо розглянути модель з константою, то $x_{i0}^* = \dfrac{1}{w_i}, \quad i = \overline{1,n}$.

Зауважимо, що вектор коефіцієнтів β в моделях   співпадають. Неважко показати, що (1.47) є класичною ЛР моделлю. Для того знайдемо коваріаційну матрицю обурень ε в моделі (7); спочатку обчислимо математичне очікування:

$$E\varepsilon_i = E\frac{\upsilon_i}{w_i} = \frac{1}{w_i}E\upsilon_i = 0, \quad i = \overline{1,n} \tag{1.51}$$

Отже,

$$ДE_i = E\varepsilon_i^2 = E\left(\frac{\upsilon_i}{w_i}\right)^2 = \frac{1}{w_i^2}E\upsilon_i^2 = \frac{1}{w_i^2}D\upsilon_i = \frac{1}{w_i^2}\delta^2 w_i^2 = \delta^2 \tag{1.52}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E\varepsilon_i\varepsilon_j = E\frac{\upsilon_i\upsilon_j}{w_i w_j} = \frac{1}{w_i w_j}E\upsilon_i\upsilon_j = \frac{1}{w_i w_j}\operatorname{cov}(\upsilon_i\upsilon_j) = 0 \tag{1.53}$$

З (11), (13) можна зробити висновок, що модель (7) є класичною лінійною регресією. А, звідси, оцінки вектора параметрів регресії β, знайдені в моделі (7) методом якнайменших квадратів можна використовувати для статистичних висновків.

Отже, оцінкою узагальненого методу НК коефіцієнтів моделі (1) називаються оцінки звичного МНК, але знайдені по моделі (7).

На практиці в більшості випадків w_i невідомі, тому, якщо не зробити ніяких додаткових пропозицій, то їх оцінити неможливо, оскільки їх кількість рівна кількості спостережень.

Для порівняння МНК і ОМНК запишемо однорегресійну модель: $y_i = b + ax_i + e_i$, $i=1,n$

У МНК невідомі a,b знаходяться шляхом мінімізації:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b - ax_i)^2 \rightarrow \min \qquad (1.54)$$

Одночасно мінімізується вираз:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (y_i - b - ax_i)^2 \qquad (1.55)$$

де $\gamma = \frac{1}{\delta_i^2}$ вагові коефіцієнти.

Спостереженням з меншими δ_i мають більша вага, а з великими δ_i – менший.

Параметри a, b обчислені з (1.55), в літературі одержали назву зважені найменші квадратичні оцінки.

1.7. Економетричні симультативні моделі (ECM)

У всіх попередніх розглядах передбачалося, що $y = f(x)$. Якщо ця умова не виконується і $x = f(y)$, то порушується вимога про незалежність чинників і випадкових величин, тобто $\operatorname{cov}(x, \varepsilon) \neq 0$ і використовування МНК для визначення невідомих параметрів регресії приведе до появи неефективних оцінок з відхиленнями, тобто неефективних зсунутих оцінок. У такому разі переходять від регресійних моделей з одним рівнянням до регресійних моделей з багатьма рівняннями, які включають x та y, як в ролі ендогенних, так в ролі екзогенних змінних.

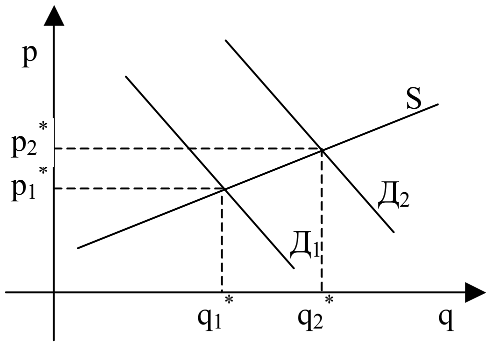
Системи, що описують взаємозв'язок між x та y, які виступають в ролі ендогенних і екзогенних змінних, називаються системою симультативних рівнянь.

Розглянемо приклад. Припустимо, що необхідно оцінити попит на деякий товар. З економетрії відомо, що попит (q) залежить від ціни (p), цін на інші товари (p_0) і доходу (y) , тобто:

$$q = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p_0 + \beta_3 y + \varepsilon \qquad (1.56)$$

де ε – випадкова величина, що враховує всю решту змін.

Попит є функцією від ціни, але ринкова ціна теж є функцією від попиту, тобто ε и p корельовані між собою (якщо крива пропозиції не є вертикальною). На малюнку показане зрушення функції попиту із зміною ціни.



Оскільки попит є функцією від ціни, а ціна є функцією від попиту, то необхідно розглянути ще одне рівняння:

$$p = c_0 + c_1 q + c_2 w + v, \tag{1.57}$$

де w – індекс погодних умов,
v – випадкове обурення, що впливає на ціну.

Отже, одержимо два рівняння:

$$\begin{cases} q = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p_0 + \beta_3 y + \varepsilon \\ p = c_0 + c_1 q + c_2 w + v \end{cases}$$

Підставимо (1.56) в (1.57), одержимо:

$$p = c_0 + c_1 (\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p_0 + \beta_3 y + \varepsilon) + c_2 w + v_1 \tag{1.58}$$

Одержимо, що p залежить від ε, а тому припущення класичної регресії про незалежність p і ε порушується.

Порушення умови про незалежність випадкової величини і регресанта привело до необхідності розробки інших методів, відмінних від МНК, для визначення невідомих параметрів ЕСМ.

Система симультативних рівнянь складається з рівнянь поведінки і тотожності.

У нашому прикладі (1.56), (1.57) – рівняння поведінки; попит = пропозиція – це тотожність.

Серед невідомих, входять в ЕСР, розрізняються ендогенні і екзогенні. Значення ендогенних змінних обчислюються в моделі, а у значення екзогенних змінних включаються також лагові значення ендогенних змінних (значення ендогенних змінних в попередні моменти часу). Ендогенні змінні корельовані із збуреннями в рівняннях; екзогенні – ні.

Система симультативних рівнянь повинна задовольняти умовою повноти: кількість рівнянь співпадає з кількістю ендогенних змінних в системі.

Структурний і зведений вигляд симультативних рівнянь

Запишемо систему рівнянь попиту і пропозиції:

$$\begin{cases} q_i^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_i + \alpha_2 y_i + \varepsilon_i & (1.59) \\ q_i^s = \beta_0 + \beta_1 p_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i & (1.60) \\ q_i^d = q_i^s, \quad i = \overline{1, n} & (1.61) \end{cases}$$

де q_i^d – попит, q^s – пропозиція, p – ціна, y – дохід, z – неціновий чинник, який впливає на пропозицію (наприклад, в с/г – кількість опадів).

(1.5) – визначає функцію попиту, (1.60) – пропозиції, (1.61) – тотожність локальної ринкової рівноваги.

Як наслідок систему можна переписати у вигляді:

$$q_i = \alpha_0 + \alpha_1 p_i + \alpha_2 y_i + \varepsilon_i^{(1)} \quad (1.62)$$

$$q_i = \beta_0 + \beta_1 p_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i^{(2)}, \quad i = \overline{1,n} \quad (1.63)$$

Обидві системи записані в структурному вигляді.

Симультативна система записана в структурному вигляді, якщо кожне рівняння визначає деякий елемент економічної системи, яка розглядається і має економічну інтерпретацію.

Симультативна система записана в приведеному вигляді, якщо в кожному рівнянні зліва стоїть ендогенна змінна, а справа – тільки екзогенні змінні.

Трансформуємо систему (1.62), (1.63) до приведеного вигляду, опустивши для простоти індекс i. Віднімемо (1.63) від (1.62), одержимо:

$$0 = -\beta_0 + \alpha_0 + p\,(-\beta_1 + \alpha_1) - \beta_2 z + \alpha_2 y + \varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}.$$

Звідси

$$p = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 y}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\beta_2 z}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\beta_1 - \alpha_1} \quad (1.64)$$

Помножимо (1.62) на β_1 і (1.63) на α_1 і віднімемо від нового (1.62) нове (1.63), одержимо :

$$q\,(\beta_1 - \alpha_1) = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_0 y - \alpha_0\beta_2 z + \beta_1\varepsilon^{(1)} - \alpha_1\varepsilon^{(2)}$$

або

$$q = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2\beta_0 y}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_0\beta_2 z}{\alpha_1 - \beta_0} + \frac{\beta_1\varepsilon^{(1)} - \alpha_1\varepsilon^{(2)}}{\beta_1 - \alpha_1}. \quad (1.65)$$

За умови, що $\alpha_1 \neq \beta_1$, одержимо вираз для p, q через екзогенні змінні.

Введемо позначення

$$\Pi_{11} = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}; \qquad \Pi_{12} = \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1}, \qquad \Pi_{13} = \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\Pi_{21} = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} \qquad \Pi_{22} = \frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} \qquad \Pi_{23} = \frac{\beta_2\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\upsilon^{(1)} = \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\beta_1 - \alpha_1} \qquad \upsilon^{(2)} = \frac{\beta_1\varepsilon^{(1)} - \alpha_1\varepsilon^{(2)}}{\beta_1 - \alpha_1}$$

Отже, одержимо систему рівнянь приведеного вигляду.

$$p = \Pi_{11} + \Pi_{12}\,y + \Pi_{13}z + v^{(1)} \qquad (1.66)$$

$$q = \Pi_{21} + \Pi_{22}\,y + \Pi_{23}z + v^{(2)} \qquad (1.67)$$

Оскільки в рівняннях приведеної системи справа стоять тільки екзогенні змінні, некорельовані з обуреннями, то для них коректно застосовувати звичайно метод НК.

Можливість виразу коефіцієнтів структурної системи через коефіцієнти рівнянь приведеної системи називається проблемою ідентифікації.

Рівняння називається строго ідентифікованим, якщо його коефіцієнти можна однозначно виразити через коефіцієнти рівнянь приведеного вигляду.

Рівняння називається надідентифікованим, якщо існує більше одного рішення (тобто неоднозначно).

Рівняння називається неідентифікованим, якщо його коефіцієнти не можна виразити через коефіцієнти рівнянь приведеного вигляду.

Можна показати, що обидва рівняння (1.62), (1.63) строго ідентифіковані.

Досліджуємо на ідентифікованість систему (1.62), (1.63) через приведені рівняння

Виразимо α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2 через Π_{11}, Π_{12}, Π_{13}, Π_{21}, Π_{22}, Π_{23}

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{\Pi_{11}}{\Pi_{12}}; \qquad \alpha_1 = \dfrac{\Pi_{23}}{\Pi_{13}} \\ \alpha_2 = \Pi_{12}(\beta_1 - \alpha_1) = \Pi_{12}\left(\dfrac{\Pi_{22}\cdot\Pi_{13} - \Pi_{23}\cdot\Pi_{12}}{\Pi_{12}\Pi_{13}}\right) \\ \beta_2 = \Pi_{13}(\alpha_1 - \beta_1) = \Pi_{13}\left(\dfrac{\Pi_{23}\cdot\Pi_{12} - \Pi_{22}\cdot\Pi_{13}}{\Pi_{12}\Pi_{13}}\right) \\ \alpha_0 = \Pi_{21} - \alpha_1\Pi_{11} = \Pi_{21} - \dfrac{\Pi_{23}}{\Pi_{13}}\cdot\Pi_{11} \\ \beta_0 = \Pi_{21} - \beta_1\Pi_{11} = \Pi_{21} - \dfrac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}}\cdot\Pi_{11} \end{cases} \qquad (1.68)$$

(формули Крамера).

тобто обидва рівняння строго ідентифіковані.

Існують інші методи ідентифікаці.

Методи оцінювання невідомих параметрів.

Серед різних методів оцінювання невідомих систем симультативних рівнянь можна виділити два напрями: методи, що використовують тільки одне рівняння системи; всі рівняння.

Вибір методу істотно залежить від ідентіфікованності рівнянь.

До таких методів належать:

- метод зменшеної форми або метод непрямих найменших квадратів (МНК);
- метод інструментальних змінних (МІЗ);
- двокроковий МНК (2 МНК);
- метод найбільшої вірогідності обмеженої інформації (НВОІ);
- метод змішаної оцінки (МЗО);
- трьохкроковий МНК (3 МНК);
- метод найбільшої вірогідності повної інформації (НВПІ).

Перші 5 методів називаються методами одного рівняння, оскільки досліджують тільки одне рівняння системи.

Для строго ідентифікованих рівнянь можна використовувати непрямий метод якнайменших квадратів, для цього треба систему рівнянь записати в приведеному вигляді і використати МНК.

Застосовуватимемо його до системи (1.62), (1.63) оскільки коефіцієнти рівнянь приведеного типу можна оцінювати звичним МНК, то позначимо через

Π_{ij} – оцінки МНК $\Pi_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,3}$

Щоб знайти оцінки непрямого методу НК коефіцієнтів рівнянь структурного вигляду достатньо у формулах (1.68) замінити Π_{ij} їх оцінками, тобто $\beta_1 = \frac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}}$ і так далі.

Двокроковий МНК (2 МНК) можна використовувати і для оцінки надідентифікованих рівнянь.

Алгоритм:

1. МНК оцінити регресію кожної ендогенної змінної щодо всіх екзогенних змінних.
2. Замість ендогенних змінних, що входять в праву частину рівняння, підставити оцінки, знайдені на 1 етапі.
3. Одержані рівняння оцінити за допомогою звичного МНК.

Для строго ідентифікованих рівнянь оцінки 2 МНК і непрямого методу НК співпадають.

Проілюструємо алгоритм для оцінки функції попиту .

Для оцінки функції попиту необхідно побудувати регресію p відносно y і z:

$$p_i = \gamma_0 + \gamma_1 y_i + \gamma_2 z_i + \varepsilon_i \tag{1.69}$$

Нехай g_0, g_1, g_2 – оцінки коефіцієнтів рівняння , знайденого МНК.

Маємо

$$p_i = g_0 + g_1 y_i + g_2 z_i \tag{1.70}$$

На другому етапі замість ендогенної змінної p_i, що входить в праву частину $q_i = \alpha_0 + \alpha_1 p_i + \alpha_2 y_i + \varepsilon_i^{(1)}$ поставимо її оцінку p_i , знайдену МНК на першому етапі, тобто будуємо регресію:

$$q_i = \delta_0 + \delta_1 p_i + \delta_2 y_i + \varepsilon_i, i = \overline{1,n} \quad (1.71)$$

де p_i обчислено по формулі.

Оцінки d_0, d_1, d_2 коефіцієнтів δ_0, δ_1, δ_2 рівняння одержують звичним МНК, вони є оцінками 2 МНК параметрів функції попиту .

Введемо позначення

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & y_1 \\ 1 & p_2 & y_2 \\ . & . & . \\ 1 & p_n & y_n \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & y_1 \\ 1 & p_2 & y_2 \\ . & . & . \\ 1 & p_n & y_n \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Асимптотична коваріаційна матриця оцінки d обчислюється за формулою:

$$Dd = \delta^2 \left(Z^T Z\right)^{-1}, \qquad \delta^2 = \frac{(q - Zd)^T (q - Zd)^T}{n}.$$

Залежно від ознаки ідентифікованності використовуються методи відшукання невідомих параметрів.

2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

2.1. Плани проведення практичних занять

Плани проведення практичних занять побудовані таким чином.
По кожному з занять надано:

- перелік питань за темою заняття, які пропонуються для обговорення, деякі з них деталізуються за допомогою рефератів, що за бажанням або за завданням викладача виконуються студентами групи;
- посилання на джерела, що містять відповіді на поставлені запитання та можуть бути використані при виконанні рефератів. Саме ці джерела студент повинен самостійно проробити перед заняттям.

Практичне заняття 1
Економіко-математичні моделі . Основні поняття економіко-математичного моделювання

ПЛАН

1. **Економіко-математичні моделі .** Фундаментальні основи навчальної дисципліни:

- об’єкт;
- предмет;
- задачі;
- зміст;
- методи дослідження.

Реферат на тему: «Головні напрямки розвитку математичного моделювання як науки».

2. Становлення моделювання як навчальної дисципліни:
   - етапи становлення та розвитку;
   - похідні дисципліни;
   - структурно-логічна схема вивчення курсу.

Реферат на тему: «Історія розвитку модеювання».

Реферат на тему: «Провідні наукові діячі в галузі математичного моделювання».

3. Основні поняття ЕММ на транспорті:
   - математичні моделі;
   - види моделей;
   - класифікація моделей;

Реферат на тему: «Роль та особливості ЕММ в системі світових економічних зв'язків».

Література: 1 -9 .

Практичне заняття 2
Побудова ЕММ . Етапи побудови ЕММ

ПЛАН

1. Побудова ЕММ :
   - роль та значення ЕММ у виробничому процесі;
   - специфіка ЕММ;
   - місце ЕММ в економіці країни.
2. Етапи побудови ЕММ:
   - побудова концептуальної моделі;
   - побудова математичної моделі .
   - дослідження моделі.

Реферат на тему: «Тенденції розвитку ЕММ».

Література: 5 - 9, 1 7- 22.

Практичне заняття 3
Економетрія як частина економіко- математичного моделювання

ПЛАН

1. Економетрія як наукова категорія:
   - визначення;
   - етапи побудови економетричних моделей.
2. Інформаційна база економетричних моделей:
   - часові та динамічні ряди;
   - основні показники, які характеризують динамічні ряди.

Комплекс рефератів на тему: «Економетричні моделі у прогнозуванні економіки».

Література: 3 - 8, 9- 11.

Практичне заняття 4
Проста лінійна регресія

ПЛАН

1. Загальні поняття про лінійну регресію (ЛР) :
   - поняття;
   - особливості;
   - умови звстосування.

Реферат на тему: «Економетричні моделі на транспорті ».

2. Оцінка параметрів ЛР методом найменших квадратів (МНК) :
   - умови застосування МНК;
   - визначення параметрів моделі;
   - вивод основних формул для обчислення параметрів .

3. Визначення параметрів ЛР через числові характеристики показника і факторів:
   - показник;
   - фактор.

4.Формули для визначення коефіцієнтів моделі:
   - вивід формул коефіцієнтів моделі ;

.

   - умови використання МНК

Література: 9, 11.

Практичне заняття 5
Оцінка адекватності моделі

ПЛАН

1. Коефіцієнти кореляції і детермінації:
   - сутність та визначення коефіцієнта кореляції;
   - сутність та визначення коефіцієнта детермінації;
   - завдання коефіцієнтів;
2. Критерії оцінки лінійної регресії на адекватність:
   - характеристика критерію Фішера ;
   - характеристика критерію Ст’юдента .
3. Побудова інтервалів довіри:

Реферат на тему: «Основні напрямки удосконалення управління математичних моделей на залізничному транспорті».

Література: 5 - 10, 12, 16 – 21.

Практичне заняття 6
Багатофакторна лінійна регресія (БЛР)

ПЛАН

1. Приклади використання багатофакторного аналізу:
   - основні умови;
   - фактори, що впливають на економічні дослідження.
2. Класична модель :
   - запис багатофакторної моделі;
   - умови застосування багатофакторної моделі;
   - статистичні припущення.
3. Етапи побудови багатофакторної регресійної моделі .

Реферат на тему: «Застосування БЛР».

Література: 12, 15, 16 - 21.

Практичне заняття *7*
Розрахунок невідомих параметрів БЛР методом НК

ПЛАН

1.МНК для багатофакторних моделей:

- основні умови застосування МНК;
- матриця парної кореляції.

2. Матричний підхід до БЛР:

- запис багатофакторної моделі у матричному вигляді;
- застосування математичних методів для дослідження моделі;

3. Знаходження коефіцієнтів в моделі .

Література: 11, 15, 16 - 20.

Практичне заняття 8
Коефіцієнти дослідження адекватності БЛР

ПЛАН

1. Коефіцієнт множинної кореляції:
   - запис формули коефіцієнта множинної кореляції;
2. Коефіцієнт детермінації :
   - запис формули коефіцієнта множинної детермінації;
3. Перевірка моделі на адекватність за F - критерієм Фішера.
4. Знаходження інтервалів довіри для паперів, параметрів моделі.

Література: 10, 15, 16 .

Практичне заняття 9
Мультиколінеарність (М)

Організація управління матеріальними ресурсами

ПЛАН

1. Визначення мультиколінеарності та її природа.
2.Теоретична послідовність мультиколінеарності (М).
Реферат на тему: «Практичні наслідки мультиколінеарності ».
3.Тестування мультиколінеарності
- способи усунення мультиколінеарності.

Література: 10, 16 - 21.

Практичне заняття 10
Моделі з автокореляційним збуренням

1. Визначення автокореляції
2. Тестування автокореляції
3. Вплив автокореляції на оцінки МНК
4. Оцінка параметрів регресії при наявності автокореляції
5. Модель авторегресії. Природа авторегресіонних моделей і роль лага в економіці
6. Запитання для контролю

ПЛАН

1. Вступ і опис моделі:
   - сутність та складові автокореляційної моделі;
   - причини виникнення автокореляції.
2. Тестування автокореляції.
3. Тест Дарбіна-Уотсона .

Реферат на тему: « Природа авторегресійних моделей і роль лага в економіці».
Література: 10, 11, 16 - 20.

Практичне заняття 11
Моделі авторегресії

ПЛАН

1. Вплив автокореляції на оцінки МНК:
   - умови застосування МНК для моделей автокореляції;
   - особливості авто кореляційної моделі.
2. Оцінка параметрів регресії при наявності автокореляції.
3. Модель авторегресії Маркова.

Реферат на тему: « Застосування авторегресійних моделей в економіці».
Література: 10, 11, 13 .

Практичне заняття 12
Гетероскедастичні моделі

ПЛАН

1. Визначення гетероскедастичності та її природа :
   - визначення гетероскедастичності;
   - особливості дослідження гетероскедастичних моделей.
2. Наслідки порушення припущення про гомоскедастичності.
3. Тестування гетероскедастичності:
   - аналіз змісту проблеми;
   - критерій Голфельда-Кванта.

Література: 10, 11, 16 - 21.

Практичне заняття 13
Дослідження гетероскедастичних моделей

ПЛАН

1. Оцінювання параметрів моделі у разі гетероскедастичності:
   - особливості застосування МНК;
   - порівняння МНК і узагальненого МНК.
2. Тестування гетероскедастичності :
   - критерій Уайта;
   - використовування критерію Уайта для обчислення ваги.

Література: 9, 10, 16.

Практичне заняття 14
Моделі структурних рівнянь

ПЛАН

1. Поняття про одночасну залежність економічних змінних:
- порушення правила незалежності випадкових величин та регресантів;
- приклади ЕСМ .
2. Структурний і зведений вигляд симультативних рівнянь:
   - ендогенні та екзогенні змінні;
   - визначення системи структурних рівнянь
   - приведення структурних рівнянь до приведеного вигляду.

Література: 1, 5, 10 - 11.

Практичне заняття 15
Симультативні моделі

ПЛАН

1. Оцінювання параметрів моделі у структурному вигляді:
   - особливості застосування УМНК ;
   - порівняння МНК і узагальненого МНК .
2. Дослідження ЕСМ на адекватність.

Література: 2, 5, 6 - 11.

Практичне заняття 16
Економічні ризики

ПЛАН

1. Економічні ризики . Фундаментальні основи теорії ризиків:
   - об'єкт;
   - предмет;
   - визначення;
   - принципи;
   - методи дослідження.

Реферат на тему: «Головні напрямки розвитку теорії ризиків як наук».

2. Моделювання ризиків :
   - функції ризиків;
   - основні статистичні підходи до моделювання ризиків;

Реферат на тему: «Провідні наукові діячі в галузі моделювання ризиків».

3. Основні поняття теорії ризиків:
   - математичні ризики;
   - види ризиків;
   - класифікація ризиків;

Реферат на тему: «Роль та особливості ризиків в системі економічних зв'язків».

Література: 17 - 21.

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ КУРСУ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

3.1. Загальні відомості

Самостійна робота є невід’ємною частиною навчального процесу і основою пізнавальної діяльності студента.

Метою самостійного вивчення курсу є всебічне підвищення рівня знань про математичне моделювання, раціоналізація процесів підготовки, виконання і захист індивідуальної роботи, єдність навчання та науково-дослідної праці.

Освоєння курсу відповідно до програми передбачає самостійне опрацювання студентом літературних джерел, вивчення та узагальнення матеріалів теоретичних питань, виконання практичних розрахунків за індивідуальними завданнями.

Навчальні завдання за кожною темою (*тематичні навчальні завдання*) містять перелік питань згідно з програмою курсу та планом проведення практичних занять, список літературних джерел.

Тематичними навчальними завданнями для самостійного вивчення курсу є методичні вказівки до практичних занять.

Викладач курсу спрямовує і контролює самостійну роботу студента за тематичними завданнями, встановлює час консультацій та термін виконання самостійної роботи за кожною темою курсу.

З метою поглиблення вивчення теоретичного і практичного матеріалу студент відпрацьовує *індивідуальні завдання*.

Індивідуальна робота студентів денної та заочної форм навчання дещо відрізняється.

Для студентів *стаціонару* індивідуальна робота полягає у підготовці реферату і вирішенні задач за варіантами завдань.

У **рефераті** тезисно окреслюється сутність та виявляються основні напрямки вирішення проблем тематично спрямованих на отримання додаткових, поглиблених знань по курсу. Тематика рефератів охоплює питання, що залишилися поза увагою лекційного викладання та практичних розрахунків, передбачених сукупністю задач.

Вирішення **задач за варіантами завдань** є необов’язковим, але рекомендується до виконання. Завдання цієї складової самостійного опрацювання навчальної дисципліни – набути власних навичок здійснення розрахунків.

Рекомендаційний характер виконання розрахунків за варіантами пов’язаний з обмеженістю часу та значною загальною трудомісткістю роботи.

Студенти *заочної форми навчання* у межах індивідуального відпрацювання навчальної дисципліни виконують **контрольну роботу**, яка включає теоретичну та розрахункову частини.

Теоретична частина за змістом та методикою виконання відповідає підготовці рефератів, окрім цього містить додаткове теоретичне запитання з переліку матеріалів лекційного курсу стаціонару, які у зв’язку з обмеженістю аудиторних годин не висвітлюються при проведенні лекцій та практичних занять на заочному відділенні.

Розрахункова частина полягає у вирішенні за індивідуальними завданнями комплексу задач. У зв’язку з нормативною обмеженістю обсягу контрольної роботи у розрахунковій частині рекомендується виконувати три завдання. Подібна вимога дозволяє скоротити обсяг розрахунків та забезпечує ознайомлення з різними специфічними аспектами процесу визначення економічних показників.

Контрольну роботу можна виконувати згідно з даними методичними вказівками, тоді задачі розрахункової частини обираються за номерами відповідно до рекомендованого переліку. Або може бути використано окреме видання – методичні вказівки до виконання контрольної роботи за курсом.

По суті, індивідуальна праця студентів денної та заочної форм навчання відрізняється не за змістом, а за строками виконання та формою надання матеріалів самостійної роботи.

Підготовка рефератів, розрахункових завдань і контрольних робіт – один з етапів вивчення курсу «Економіко-математичне моделювання» . Його метою є розширення і поглиблення теоретичних знань та отримання практичних навичок аналітичної роботи з певної теми на основі самостійного узагальнення зібраного матеріалу.

Перелік питань письмової самостійної роботи виходить за межі лекційних планів та планів практичних занять (окрім реферативної складової, яка і є презентацією результатів індивідуального пізнання). Це питання, що містить програма курсу, але відповідних матеріалів не розглянуто в процесі аудиторного навчання.

При виконанні письмової самостійної роботи студент повинен показати вміння користуватися нормативними документами, літературними джерелами, узагальнювати матеріали, формулювати обґрунтовані висновки і рекомендації.

3.2. Завдання на самостійну роботу

Етапність виконання самостійної роботи:

а) вибір теми;

б) складання плану реферату або контрольної роботи;

в) підбір літературних джерел;

г) вивчення спеціальної літератури за тематикою завдань реферату, теоретичної частини контрольної роботи;

д) підбір і вивчення додаткової літератури за тематикою завдань реферату, теоретичної частини контрольної роботи (поточних матеріалів, які опубліковані в журналах, газетах, тощо);

е) підбір практичного і статистичного матеріалу та його обробка;

ж) виконання розрахунків по завданнях розрахункової частини контрольної роботи, комплексної розрахункової роботи;

з) написання та оформлення реферату, комплексної розрахункової та контрольної робіт;

и) підготовка доповіді до захисту реферату (контрольної роботи).

Вибір теми самостійної роботи здійснюється, опираючись, на такі положення.

Тема реферату обирається студентом з переліку тем самостійно або за допомогою викладача.

Тема теоретичної частини контрольної роботи обирається згідно з двома останніми цифрами шифру залікової книжки студента, але може корегуватися або замінюватися за узгодженням з викладачем.

Розподіл варіантів за двома останніми цифрами залікової книжки студента наведено в табл. 3.1.

При виборі теми реферату та теоретичної частини контрольної роботи необхідно враховувати науково-дослідні інтереси студента і актуальність теми для практичної діяльності. Студент може також запропонувати свою тему, при цьому вона повинна мати теоретичне або практичне значення для конкретного транспортного підприємства, галузі або економіки України. Важливо, щоб тема реферату була пов’язана з темою дослідження майбутньої дипломної або магістерської роботи студента.

Обравши тему, необхідно визначити мету і об’єкт дослідження. Це допоможе встановити сукупність завдань, які потрібно вирішити при підготовці реферату або при написанні теоретичної частини контрольної роботи.

Мета – закріплення теоретичних знань з курсу «Економіко-математичне моделювання», поглиблене вивчення і розробка окремих проблем, систематизація, узагальнення та підготовка на цій основі пропозицій галузевого організаційно-економічного розвитку.

Після визначення мети і завдань дослідження студент складає *план* реферату або теоретичної частини контрольної роботи.

Реферат або контрольна робота складається із:

- титульного аркуша затвердженої форми;
- змісту;
- вступу;
- основної частини;
- висновків;
- списку використаних джерел;
- додатків.

Таблиця 3.1

Варіанти завдань

Дві останні цифри шифру	Варіант теоретичної частини	Варіант розрахункової частини (номери задач)	Дві останні цифри шифру	Варіант теоретичної частини	Варіант розрахункової частини (номери задач)
01	1	1, 11, 21	16	16	6, 17, 26
02	2	2, 12, 22	17	17	7, 18, 27
03	3	3, 13, 23	18	18	8, 19, 28
04	4	4, 14, 24	19	19	9, 20, 29
05	5	5, 15, 25	19	19	9, 20, 30
06	6	6, 16, 26	20	20	10, 11, 20
07	7	7, 17, 27	22	22	2, 14, 25
08	8	8, 18, 28	23	23	3, 15, 23
09	9	9, 19, 29	24	24	4, 16, 27
10	10	10, 20, 30	25	25	5, 17, 25
11	11	1, 12, 23	26	26	6, 18, 29
12	12	2, 13, 24	27	27	7, 19, 30
13	13	3, 14, 21	28	28	8, 20, 21
14	14	4, 15, 22	29	29	9, 11, 22
15	15	5, 16, 23	30	30	10, 12, 29

Вступ містить коротку характеристику теми, її актуальність, завдання, які необхідно виконати для розкриття теми (дослідження загальних відомостей, оцінка специфічних характеристик, систематизація практичних рекомендаційних матеріалів тощо), узагальнено – джерела, які необхідно використати для виконання завдань, перелік основних економічних категорій.

Основна частина складається з розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів. Кожен розділ починається з нової сторінки і містить матеріал по одному з поставлених завдань. Наприкінці кожного розділу формулюються висновки, що дає можливість вивільнити загальні висновки від незначних подробиць.

Відповіді не повинні дублювати текст підручника або іншого джерела. Студенту необхідно повною мірою виявити свої загальноекономічні та специфічні знання. Разом з тим, не рекомендується давати однозначні відповіді без належних пояснень.

Пояснювальні матеріали повинні містить критичну оцінку літературних джерел, практичного та теоретичного досвіду з питань економіки транспорту і характеризувати ступінь самостійного узагальнення та індивідуальної підготовки студентів.

Комплексні розрахункові завдання за курсом та розрахункова частина контрольної роботи оформляється у вигляді розв'язку задач відповідно до методичних рекомендацій та наведених прикладів. Всі розрахунки, які обґрунтовують цифрові дані, треба виконувати з точністю до 0,001, а при переведенні у відсотки – до 0,1. Вони повинні бути складовою частиною роботи.

Наприкінці кожної задачі за результатами розрахунків, виконаних згідно з варіантом індивідуального завдання, та з позначенням розміру отриманих даних, робляться висновки. У висновках студенту необхідно повною мірою виявити свої знання та досвід практичної роботи. Не рекомендується робити однозначні висновки без належних пояснень.

Загальні висновки вміщують найважливіші результати, отримані по кожному завданню, а також рекомендації щодо подальшого розвитку розглянутих проблем.

Список використаних джерел містить лише ті джерела, які були безпосередньо використані при написанні реферату або теоретичної частини контрольної роботи.

До підготовки реферату, виконання розрахункової та контрольної робіт студент повинен *вивчити необхідну літературу*: спеціальні та додаткові джерела, законодавчі і нормативні документи, конспект лекцій. Деякі пояснення і стисле викладання питань, які розглядаються в розрахункових завданнях, даються в методичних вказівках. До розв'язання кожної задачі треба приступати тільки після ознайомлення з ними.

Підбір та вивчення літератури є процесом творчого засвоєння поставлених питань. Вивчати літературні джерела слід починати від популярних і до монографічних, наукових статей та ін. Доцільно спочатку опрацювати підручники, навчальні посібники, а потім нормативно-законодавчі документи, теоретичні розробки, статті тощо.

В процесі роботи над літературними джерелами необхідно виділити основне у прочитаному, ретельно розібратися у термінології, записати питання, які виникають під час роботи з літературою.

Для написання самостійної роботи слід використовувати фактичний матеріал транспортного підприємства або галузеві статистичні дані. Подібні відомості дозволяють унаочнити та деталізувати дослідження. До початку збирання фактичних матеріалів доцільно визначити перелік необхідних показників, джерела інформації, послідовність збирання даних. Інформаційними джерелами можуть бути статистичні та нормативні довідники, форми звітності, сайти Інтернет (ukrstat.gov.ua, ін.). Зібраний практичний матеріал необхідно систематизувати з використанням статистичних та економіко-математичних методів (середні величини, індекси, ряди динаміки, групування, кореляційний аналіз та ін.).

Під час складання списку літератури рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Закони України;
2. Укази Президента України;
3. Постанови Верховної Ради України;
4. Постанови, декрети, рішення Кабінету Міністрів України;
5. Інструктивні матеріали міністерств і відомств;
6. Монографії, наукові праці, статті, навчальна література;
7. Матеріали транспортного підприємства або галузі.

У переліку використаних джерел законодавчі і нормативні матеріали розташовуються у хронологічному порядку, монографії, статті та ін. – в алфавітному порядку.

Додатки вміщують допоміжний матеріал, який надається у разі потреби для повноти сприйняття реферату. Це таблиці допоміжних цифрових даних, схеми, графіки, форми документів та приклади їх заповнення, розрахункові приклади та інші ілюстрації допоміжного характеру, які роблять результати дослідження більш наочними.

В процесі *оформлення* матеріалів самостійної роботи слід дотримуватися таких рекомендацій.

Загальний обсяг реферату та контрольної роботи (тобто двох теоретичних питань) без врахування розрахункової частини не повинен перевищувати 8 - 18 сторінок (без титульного аркуша, завдання, списку літератури і додатків).

Приблизна структура підготовлених матеріалів:

- словник економічних термінів (1-2 стор.);
- вступ (1 - 2 стор.);
- основна частина – теоретична (5 - 6 стор.);
- висновки (1 - 2 стор.).

Робота може бути написана власноручно, надрукована на друкарській машинці (через 2 інтервали) чи набрана на комп’ютері (з інтервалом 1,5) українською мовою на аркушах формату А 4. Обсяг роботи не повинен перевищувати відповідно 40 тис. знаків комп’ютерного набору або 25 сторінок, надрукованих на машинці (але не менше 20 сторінок), при цьому враховується тільки вступ, основна частина (теоретична та розрахункова) та висновки. Робота, подана в рукописному варіанті, має бути написана розбірливим почерком.

Написання реферату або теоретичної частини контрольної роботи передбачає кілька етапів. На початковому етапі відбирається і систематизується матеріал для підготовки роботи згідно з планом. Потім формулюються висновки і рекомендації, які випливають з основного змісту, оцінюється можливість їх використання в практичній діяльності галузевих підприємств. На наступному етапі уточнюються окремі питання, остаточно формулюються висновки і пропозиції. На завершальному етапі зібраний матеріал підлягає літературній обробці і оформленню.

На титульному аркуші (заповнюється згідно зі зразком поданим у додатку А) зазначається міністерство, офіційна назва університету, кафедри, назва реферату або контрольної роботи. Нижче зазначається шифр групи, прізвище, ініціали та шифр залікової книжки студента, вчений ступінь, посада, прізвище, ініціали викладача. Внизу титульної сторінки – місто і рік.

На другій сторінці наводиться зміст роботи, який відображає її структуру – складові частини із зазначенням сторінок розміщення.

Текст пишеться на одній сторінці аркуша з дотриманням таких вимог: зліва поле шириною 3,5 см, справа – 1 см, зверху і знизу – по 2 см. Усі сторінки нумеруються у правій верхній частині арабськими цифрами. Загальна нумерація починається з титульного аркуша, але порядковий номер на ньому не ставиться. Кожна структурна частина (зміст, словник економічних термінів, вступ, розділи, висновки, список використаних джерел, додатки) починаються з нової сторінки.

В текстовій частині і додатках умовні позначки, зображення, схеми, графіки повинні відповідати чинним стандартам.

Розділи нумеруються послідовно. Підрозділи – за кожним розділом окремо: перша цифра – номер розділу, друга – підрозділу.

В тексті реферату (теоретичної частини контрольної роботи) повинні міститися посилання на літературні джерела, наведений цифровий матеріал. При посиланні на літературні джерела в квадратних дужках вказують порядковий номер за списком використаної літератури. При наведенні в тексті цитат, в кінці них після лапок ставиться порядковий номер літературного джерела і номер сторінки, на яких розміщена цитата.

Рисунки розміщують відразу після посилання на них у тексті і нумерують послідовно в межах розділу арабськими цифрами: перша цифра – номер розділу, друга – порядковий номер рисунка.

Таблиці також розміщують відразу після згадування про них у тексті. Вони повинні бути простими і зрозумілими. Нумеруються послідовно в межах розділу, причому номер розміщується разом із словом «Таблиця».

При використанні в тексті формул обов'язково вказується значення символів. Після формули ставиться кома, з нового рядка після слова «де» наводяться умовні позначки показників, через дефіс їх тлумачення з наведенням одиниць виміру. Кожен показник розкривається з нового рядка. Формули нумеруються послідовно в межах розділу. Перша цифра вказує розділ, друга – порядковий номер формули. Якщо в подальшому тексті на приведені формули відсутні посилання формули можна не нумерувати.

Виконання розрахунків по завданнях розрахункової частини контрольної роботи здійснюється по варіантах. Варіант, як і у разі вибору теми теоретичної частини, визначається на підставі останніх двох цифр залікової книжки студента, але корегуванню або заміні не підлягає.

Для розрахункового завдання передбачено варіанти задач, що містить раніше наведена табл. 3.1.

Зброшурована та підписана студентом контрольна робота здається на кафедру для перевірки не пізніше, ніж за тиждень до початку екзаменаційної сесії. Строки та порядок представлення рефератів та комплексної розрахункової роботи узгоджується з викладачем.

Формою контролю індивідуальної роботи студента є перевірка підготовлених завдань і співбесіда або захист реферату, і співбесіда або проведення заліку за результатами перевірки контрольної роботи.

Співбесіда або публічний захист включає доповідь та додаткові запитання. *Доповідь* містить загальну презентацію поставлених у межах самостійної роботи завдань та визначеної проблематики, стислу характеристику головних узагальнень, здобутих в процесі дослідження, надання рекомендацій та окреслення шляхів вирішення виявлених проблем. По можливості висвітлені положення повинні бути обґрунтовані посиланнями на провідний досвід, статистичними даними, матеріалами аналітичних розрахунків тощо.

В процесі підготовки доповіді слід усвідомлювати обмеженість тривалості виступу (5-7 хв.), а також враховувати необхідність запам'ятовування значного обсягу специфічного матеріалу, тому рекомендується будувати короткі, але змістовні фрази, представляти округлені дані та висвітлювали лише головні моменти дослідження.

Оцінку за виконану самостійну роботу з курсу «Економіко-математичне моделювання» викладач виставляє згідно з існуючими положеннями. Критерії оцінок подано у розділі «Підсумковий контроль знань» методичних вказівок.

3.3. Тематика теоретичних індивідуальних завдань

1. Економічні і економетричні моделі.
2. Інформаційна база економетричних моделей.
3. Статистичні методи аналізу та обробки спостережень.
4. Часовий ряд, основні величини, що визначають часовий ряд та їх обчислення.
5. Проста лінійна регресія, основні припущення, оцінка параметрів лінійної регресії, коефіцієнти кореляції та детермінації.
6. Парний регресійний аналіз.
7. Аналіз регресійної моделі.
8. Перевірка на адекватність регресійної моделі.
9. Багатофакторна лінійна регресія та приклади її застосування.
10. Загальна багатофакторна модель та основні припущення відносно її компонентів.
11. Обчислення параметрів багатофакторної лінійної регресії.

12. Аналіз багатофакторної лінійної регресії.
13. Моделі з декількома змінними.
14. Обчислення довірчих інтервалів та перевірка значущості параметрів багатофакторної лінійної регресії.
15. Прогнозування на основі багатофакторної лінійної регресіої.
16. Моделі з гетероскедастичністю та природа їх виникнення.
17. Тестування гетероскедастичності.
18. Множинна регресія в нелінійних моделях.
19. Узагальнений метод найменших квадратів.
20. Моделі з автокореляційним збуренням.
21. Тестування автокореляції.
22. Моделі з лаговими змінними.
23. Приклади авторегресійних моделей. Лаг в економічних дослідженнях.
24. Економічні симультативні моделі.
25. Приклади симультативних моделей. Основні припущення відносно залежних та незалежних змінних.
26. Структурні та зведені симультативні рівняння.
27. Ідентифікованість та її типи в симультативних моделях.
28. Прогнозування в регресійних моделях.
29. Алгоритм двокрокового методу найменших квадратів.
30. Нелінійна регресія, оцінка її параметрів.

3.4. Тематика теоретичних питань до контрольної роботи

1. Моделі та моделювання.
2. Класифікація моделей.
3. Етапи побудови ММ.
4. Економічні та економетричні моделі.
5. Оцінка параметрів простої лінійної регресії, коефіцієнти кореляції та детермінації.
6. Інформаційна база економетричних моделей.
7. Параметри нелінійної залежності.
8. Статистичні методи аналізу та обробки спостережень.
9. Розрахувати параметри гіперболічної залежності.
10. Часовий ряд, основні величини, що визначають часовий ряд та їх обчислення.
11. Побудова інтервалів довіри.
12. Проста лінійна регресія, основні припущення, оцінка параметрів лінійної регресії.
13. Параметри степеневої залежності.
14. Алгоритм двокрокового методу найменших квадратів.
15. Аналіз регресійної моделі.
16. Параметри параболічної залежності.
17. Перевірка на адекватність регресійної моделі.

18. Багатофакторна лінійна регресія та приклади її застосування.
19. Розрахувати параметри логарифмічної залежності.
20. Загальна багатофакторна модель та основні припущення відносно її компонентів.
21. Обчислення параметрів багатофакторної лінійної регресії.
22. Аналіз багатофакторної лінійної регресії.
23. Обчислення довірчих інтервалів та перевірка значущості параметрів багатофакторної лінійної регресії.
24. Моделі з гетероскедастичністю та природа їх виникнення.
25. Тестування автокореляції.
26. Узагальнений метод найменших квадратів.
27. Моделі з автокореляційним збуренням.
28. Тестування автокореляції.
29. Економічні симультативні моделі.
30. Структурні та зведені симультативні рівняння.

4. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ

4.1. Методичні вказівки щодо розв'язання задач

Оцінка параметрів простої лінійної моделі методом найменших квадратів.

Оцінити параметри простої лінійної регресії, знайти коефіцієнти кореляції та детермінації.

У	Х
50	4
60	5
62	7
65	8
70	9
70	9
72	10
68	9
73	11
75	15

Запишемо формули визначення параметрів простої лінійної моделі I та II способом.

I спосіб

$$a = \frac{\operatorname{cov}(x;y)}{\operatorname{var} x}$$

$$b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

II спосіб

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Оцінимо параметри моделі I та II способами

№	Y	X	$X_i - \overline{X}$	$(X_i - \overline{X})^2$	$Y_i - \overline{Y}$	$(Y_i - \overline{Y})^2$	$(X_i - \overline{X}) \cdot (Y_i - \overline{Y})$	$X \cdot Y$	X^2
1	50	4	-4,7	22,09	-16,5	272,25	77,55	200	16
2	60	5	-3,7	13,69	-6,5	42,25	24,05	300	25
3	62	7	-1,7	2,89	-4,5	20,25	7,65	434	49
4	65	8	-0,7	0,49	-1,5	2,25	1,05	520	64
5	70	9	0,3	0,09	3,5	12,25	1,05	630	81
6	70	9	0,3	0,09	3,5	12,25	1,05	630	81
7	72	10	1,3	1,69	5,5	30,25	4,55	720	100
8	68	9	0,3	0,09	1,5	2,25	0,45	612	81
9	73	11	2,3	5,29	6,5	42,25	14,95	803	121
10	75	15	6,3	39,69	8,5	72,25	53,55	1125	225
$\sum$	665	87	0	86,1	0	508,5	185,9	5974	843
$\frac{\sum}{n}$	66,5	8,7	-	8,61	-	508,5	18,59	597,4	84,3

1. $Y = ax + b$

$$\grave{a} = \frac{18{,}59}{8{,}61} = 2{,}16;$$

$$b = 66{,}5 - 2{,}16 \cdot 8{,}7 = 47{,}71$$

$$Y = 2{,}16X + 47{,}71$$

Визначимо коефіцієнт кореляції за формулою:

$$K_{yx} = \frac{cov(x;y)}{\sqrt{\operatorname{var} x \cdot \operatorname{var} y}};$$

$$K_{\acute{o}\tilde{o}} = \frac{18{,}59}{\sqrt{8{,}61 \cdot 50{,}85}} = \frac{18{,}59}{20{,}92} = 0{,}89$$

Коефіцієнт кореляції має додатне значення – це вказує на прямий зв'язок між факторами, коефіцієнт прямує до 1, значить зв'язок тісний.

2. $a = \dfrac{10 \cdot 5974 - (87 \cdot 665)}{10 \cdot 843 - 87^2} = 2{,}16$;

$b = \dfrac{665 - (2{,}16 \cdot 87)}{10} = 47{,}71$.

Зробимо аналіз на адекватність лінійної моделі за допомогою коефіцієнта детермінації

$$R^2 = \frac{\alpha^2 \operatorname{var}(x)}{\operatorname{var}(y)};$$

$$R^2 = \frac{2{,}16^2 \cdot 8{,}61}{50{,}85} = 0{,}7899.$$

Коефіцієнт детермінації наближається до 1, це означає, що лінійна регресія добре погоджена.

Обчислимо F-критерій Фішера за такою формулою

$$F = \frac{\dfrac{R^2}{1}}{\dfrac{(1-R^2)}{n-2}};$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\dfrac{0{,}7899}{1}}{\dfrac{(1-0{,}7899)}{10-2}} = \frac{0{,}7899}{0{,}2101} = \frac{0{,}7899}{0{,}026} = 30{,}38$$

$F_{р.} > F_{кр.}$

Модель адекватна економічному процесу.

Оцінка параметрів багатофакторної лінійної регресії

Оцінити параметри багатофакторної регресії та дослідити модель на адекватність процесу, який ми досліджуємо.

Вихідні дані для задачі

У	X_1	X_2
15	0,6	17
6	0,2	7
6	0,2	7
7	0,3	8
8	0,4	9
8	0,4	10
10	0,6	13
12	0,7	16
14	0,6	13
12	0,8	15

№ за/п	x_1	x_2	y	x_1y	x_2y	$x_1\,x_2$	$(x_1-\overline{x_i})$	$(x_1-\overline{x_i})^2$	$(x_2-\overline{x_i})$	$(x_2-\overline{x_i})^2$	$(y-\overline{y})$	$(y-\overline{y})^2$
1	0,6	17	15	9	255	10,2	0,12	0,0144	5,5	30,25	5,2	27,04
2	0,2	7	6	1,2	42	1,4	-0,28	0,0784	-4,5	20,25	-3,8	14,44
3	0,2	7	6	1,2	42	1,4	-0,28	0,0784	-4,5	20,25	-3,8	14,44
4	0,3	8	7	2,1	56	2,4	-0,18	0,0324	-3,5	12,25	-2,8	7,84
5	0,4	9	8	3,2	72	3,6	-0,08	0,0064	-2,5	6,25	-1,8	3,24
6	0,4	10	8	3,2	80	4	-0,08	0,0064	-1,5	2,25	-1,8	3,24
7	0,6	13	10	6	130	7,8	0,12	0,0144	1,5	2,25	0,2	0,04
8	0,7	16	12	8,4	192	11,2	0,22	0,0484	4,5	20,25	2,2	4,84
9	0,6	13	14	8,4	182	7,8	0,12	0,0144	1,5	2,25	4,2	17,64
10	0,8	15	12	9,6	180	12	0,32	0,1024	3,5	12,25	2,2	4,84
$\sum$	4,8	115	98	52,3	1231	61,8	0	0,396	0	128,5	0	97,6
$\overline{\sum}$	0,48	11,5	9,8	5,23	123,1	6,18	0	0,0396	0	12,85	0	9,76

$\tilde{o}x_1 = \sqrt{0{,}0396} = 0{,}199$; $\tilde{o}x_2 = \sqrt{12{,}85} = 3{,}585$; $\tilde{o}x = \sqrt{9{,}76} = 3{,}124$

Розрахуємо коефіцієнт кореляції:

$$rx_1y = \frac{\overline{x_1y} - \overline{x_1}\,\overline{y}}{\tilde{o}x_1 \cdot \tilde{o}y} = \frac{5{,}23 - (0{,}48 \cdot 9{,}8)}{0{,}199 \cdot 3{,}124} = \frac{5{,}23 - 4{,}704}{0{,}622} = \frac{0{,}526}{0{,}622} = 0{,}846;$$

$$rx_1x_2 = \frac{\overline{x_1x_2} - \overline{x_1x_2}}{\tilde{o}x_1 \cdot \tilde{o}x_2} = \frac{6{,}18 - (0{,}48 \cdot 11{,}5)}{0{,}199 \cdot 3{,}585} = \frac{6{,}18 - 5{,}52}{0{,}713} = \frac{0{,}66}{0{,}713} = 0{,}926.$$

$$rx2y = \frac{\overline{x2y} - \overline{x_1y}}{\tilde{o}x2 \cdot \tilde{o}y} = \frac{123{,}1 - (11{,}5 \cdot 9{,}8)}{3{,}585 \cdot 3{,}124} = \frac{123{,}1 - 112{,}704}{11{,}199} = \frac{10{,}4}{11{,}199} = 0{,}931$$

Випишемо загальний коефіцієнт кореляції:

$R = \sqrt{£_1 rx_1y + £_2 rx_2y}$, де J_1, J_2 – стандартизовані коефіцієнти, які можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} rx_1y = £_1 + £_2 \cdot rx_1x_2 \\ rx_1y = £_1 \cdot rx_1x_2 + £_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} £_1 = rx_1y - £_2 \cdot rx_1x_2 \\ £_2 = rx_2y - £_1 \cdot rx_1x_2 \end{cases}$$

$J_1 = \boldsymbol{rx_1y}$ - $rx_1x_2\ (rx_2y - £_1 \cdot rx_1x_2)$;

J_1 = 0,846 – 0,926 (0,931 - $£_1$ ·0,926); J_1 = 0,846 – 0,862 + 0,857 ·$£_1$;

J_1 - 0,857 ·$£_1$ = - 0,016;

0,143 ·$£_1$ = - 0,016;

J_1 = - 0,112;

J_2 = 0,931 - (- 0,112) ·0,926; J_2 = 0,931 + 0,104 = 1,035.

$$R = \sqrt{(-0{,}112) \cdot 0{,}846 + 1{,}035 \cdot 0.931} = \sqrt{-0{,}095 + 0{,}964} = \sqrt{0{,}869} = 0{,}932.$$

Загальний вигляд багатофакторної моделі: $y = в_0 + в_1x_1 + в_2x_2 + e$, а вид оціненої моделі такий: $\hat{y} = b_0 - b_1x_1 + b_2x_2$

Коефіцієнти: $b_1 = £_1 \cdot \tilde{o}y / \tilde{o}x_1$; $b_2 = £_2 \cdot \tilde{o}y / \tilde{o}x_2$;

$$b_0 = \overline{y} - b_1x_1 - b_2x_2$$

$$b_1 = (-0{,}112) \cdot 3{,}124 / 0{,}199 = (-0{,}112) \cdot 15{,}698 = -1{,}758;$$

$b_2 = 1{,}035 \cdot 3{,}124 / 3{,}585 = 1{,}035 \cdot 0{,}871 = 0{,}901$;

$b_0 = 9{,}8 - (-1{,}758) \cdot 0{,}48 - 0{,}901 \cdot 11{,}5 = 9{,}8 - (-0{,}844) - 10{,}362 = 0{,}282$

$\hat{y} = 0{,}282 - 1{,}758x_1 + 0{,}901x_2$

Висновок: Оскільки r та $R^2 \to 1$, то модель адекватна економічному процесу, що ми досліджуємо. Оскільки $rx_1y \to 1$ та $r\ x_2y \to 1$, то має місце тісний прямий зв'язок між фактором і результативним показником.

Оцінка параметрів параболічної моделі

Відповідно до вимог методу найменших квадратів для визначення параметрів a, *b* і *c* необхідно вирішити таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{na + b\sum x + c\sum x^2 = \sum y;} \\ \boldsymbol{a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 = \sum xy;} \\ \boldsymbol{a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 = \sum x^2 y.} \end{cases}$$

Значення сум знаходять на підставі початкових даних

Середній вік по групі (*x*)	Середньомісячна виручка (*y*)	*x/10*	*xy*	x^2	x^2y	x^3	x^4	y_x
20	4,2	2,0	8,4	4,00	16,8	8,00	16	3,93
25	4,8	2,5	12,0	6,25	30,0	15,62	39	4,90
30	5,3	3,0	15,9	9,00	47,7	27,00	81	5,55
35	6,0	3,5	21,0	12,25	73,5	42,87	150	5,95
40	6,2	4,0	24,8	**16,00**	99,2	64,00	256	6,05
45	5,8	4,5	26,1	20,25	117,4	91,13	410	5,90
50	5,3	5,0	26,5	25,0	132,5	125,00	625	5,43
55	4,4	5,5	24,2	30,25	133,1	166,40	915	4,78
60	4,0	6,0	24,0	36,00	144,0	216,00	1296	3,70
Всього	46,0	36,0	183,0	159,0	794,0	756,00	3788	46,00

Прідставивши отримані значення в систему рівнянь, одержимо

$$\begin{cases} 9\boldsymbol{a} + 36\boldsymbol{b} + 159\boldsymbol{c} = 46\boldsymbol{;} \\ 36\boldsymbol{a} + 159\boldsymbol{b} + 756\boldsymbol{c} = 183\boldsymbol{;} \\ 159\boldsymbol{a} + 756\boldsymbol{b} + 3788\boldsymbol{c} = 794\boldsymbol{.} \end{cases}$$

Параметри *a, b* і *c* знаходять методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 36 & 159 \\ 36 & 159 & 756 \\ 159 & 756 & 3788 \end{vmatrix} =$$

$= 9 \times 159 \times 3788 + 36 \times 756 \times 159 + 36 \times 756 \times 159 - 159^3 - 36^2 \times 3788 - 756^2 \times 9 = 2565$;

потім часткові визначники Δa, Δb та Δc

$$\Delta \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} 46 & 36 & 159 \\ 183 & 159 & 756 \\ 794 & 756 & 3788 \end{vmatrix} = -6846;$$

$$\Delta \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 9 & 46 & 159 \\ 36 & 183 & 756 \\ 159 & 794 & 3788 \end{vmatrix} = 11349;$$

$$\Delta \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} 9 & 36 & 46 \\ 36 & 159 & 183 \\ 159 & 756 & 794 \end{vmatrix} = -1440.$$

Звідси

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta} = \frac{-6846}{2565} = -2{,}67;$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta} = \frac{11349}{2565} = 4{,}424;$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{\Delta \boldsymbol{c}}{\Delta} = \frac{-1440}{2565} = -0{,}561.$$

Рівняння параболи буде мати такий вигляд:

$$\mathrm{Y}_x = -2{,}67 + 4{,}424\,\boldsymbol{x} - 0{,}561\,\boldsymbol{x}^2.$$

З таблиці видно, що продуктивність праці робітників підвищується до сорока років, а після цього поступово знижується. Підприємства, які мають більшість робітників у віці 30-40 років будуть мати більш високі показники продуктивності праці. Цей фактор необхідно враховувати при плануванні рівня продуктивності праці і при підрахунках резервів її росту.

Аналіз моделі нелінійної регресії

Використовуючи показник ефективності роботи локомотивного депо, розрахувати параметри моделі степеневої залежності. Використовуючи метод екстраполяції, знайти прогнозні дані для наступного року динамічного ряду.

№ за/п	Показники	Роки						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Продуктивність праці	3554	3487	3648	3742	3806	3851	4007

1. Таблиця розрахункових даних:

№	*x*	*y*	*lg x*	*lg y*	*lg x lg y*	*lg x^2*
1	1	3354	0	3,525563	0	0
2	2	3487	0,30103	3,542452	1,066384	0,090607

3	3	3648	0,477121	3,562055	1,699532	0,227644
4	4	3742	0,60206	3,573104	2,151223	0.362476
5	5	3806	0,69897	3,580469	2,50264	0,488559
6	6	3851	0,778151	3,585574	2,790119	0,605518
7	7	4007	0,845098	3,602819	3,044736	0,714190
Сума	–	–	3,702431	24,97204	13,25463	2,488994

2. Визначаємо коефіцієнт степеневої моделі:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\lg x_i \lg y_i - \sum_{i=1}^{n}\lg x_i \sum_{i=1}^{n}\lg y_i}{n\sum_{i=1}^{n}\lg x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\lg x_i\right)^2} = 0{,}0085;$$

$$\lg a = \frac{\sum_{i=1}^{n}\lg y_i - b\sum_{i=1}^{n}\lg x_i}{n} = 3{,}55629;$$

3. Загальний вигляд моделі: $\hat{y} = 1050x^{0{,}0085}$

4. З допомогою методу екстраполяції, знайдемо прогнозні дані для наступного року: $y = 1050 \cdot 8^{0{,}0085} = 4163$.

Висновок: використовуючи показник ефективності роботи локомотивного депо, розраховано параметри моделі степеневої залежності (*a = 1050, b = 0,0085*). Використовуючи метод екстраполяції, знайдені прогнозні дані для наступного року динамічного ряду (y *= 4163*).

4.2 Типові завдання

1. Використовуючи оператор оцінювання МНК, знайдіть оцінки параметрів моделі $Y = a_0 + a_1 x + \varepsilon$. Задані вектори Y і X.

Y	4	6	3	7	7	8	10	11
X	2	4	4	5	6	5	8	10

2. Визначте вектор коваріації параметрів моделі по результатах задачі № 1.

3. Знайдіть оцінки параметрів моделі МНК на основі вихідних даних попередньої задачі, до яких приєднується ще одне спостереження.

Y	9
X	15

4. Знайдіть оцінки параметрів моделі на основі МНК, якщо до вихідних даних задачі приєднати ще два спостереження.

Y	15	14
X	9	12

5. Економетрична модель, яка характеризує залежність між середньомісячною зарплатою і продуктивністю праці та коефіцієнтом плинності робочої сили має вигляд:

$\hat{y} = 227,48 + 2,95x_1 - 0,22x_2$

де y – середньомісячна зарплата;

x_1 – продуктивність праці;

x_2 – коефіцієнт плинності робочої сили.

Дайте оцінку параметрів цієї моделі при умові, то всі змінні її будуть в стандартизованому масштабі:

$$x_j^* = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}} \qquad y_j^* = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y};$$

коли стандартні абсолютні відхилення:

середньоквадратичне відхилення змінної y = 19,5;

середньоквадратичне відхилення змінної x_1= 3,23;

середньоквадратичне відхилення змінної x_2 = 3,56.

6. Кореляційна матриця для змінних попередньої задачі запишеться:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,63 & -0,39 \\ 0,63 & 1 & -0,57 \\ -0,39 & -0,57 & 1 \end{pmatrix}$$

Дайте характеристику цієї матриці. Використовуючи дані завдання № 1, розрахуйте множинний коефіцієнт кореляції і детермінації.

7. Для трьох екзогенних змінних розрахована матриця r:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,3 \\ 0,9 & 1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдіть характеристичні числа λ_k матриці r.

8. На основі матриці (r - λE) розрахуйте власні вектори a_k:

$$(r - \lambda E) = \begin{pmatrix} -5/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & -2/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & -5/6 \end{pmatrix}$$

де елементи a_k є нормалізованими.

9. Сформулюйте матрицю S^{-1}, якщо додатньо визначена діагональна матриця:

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_5} \end{pmatrix}$$

10. Якщо умова $M(u'u) = \delta^2 x_j$, де $\{x_j\} = \{15\ 17\ 20\ 22\ 25\ 30\ 35\}$, то як розрахувати параметри λ_i ?

11. Нехай для моделі $Y = XA + u$ відомі залишки $u = Y\text{-}XA$

$u = (3; -2; -1; -0{,}5; 0{,}3; 0{,}2; 4; -2; -1; -0{,}7)$

Визначте незміщену оцінку дисперсії залишків, враховуючи результат попередньої задачі.

12. Використовуючи дисперсію залишків, визначте матрицю коваріацій параметрів, якщо матриця:

$$(XS^{-1}X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}01 & -0{,}15 \\ -0{,}01 & 0{,}12 & -0{,}10 \\ -0{,}15 & -0{,}10 & 0{,}08 \end{pmatrix}$$

Знайдіть прогнозне значення Y_8 по моделі $Y = 5{,}3 + 0{,}6x_1 + u_t$ на основі таких даних:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	*10*	*12*	*13*	*11*	*14*	*15*	*14*
X	*-0,5*	*-0,3*	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*-0,6*	*0,6*

коли $x_8 = 15$.

13. Визначте вектор W, коли відомі залишки:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_t	*1*	*-1*	*1,2*	*1,1*	*-1,2*	*-1,1*	*0,6*	*-0,5*	*0,2*

14.Визначте тип нелінійної регресії:

Номер									
	18	22	26	30	34	38	42	46	50
	Тривалість реформування состава, Y								
1	11,2	13,1	14,8	16,5	18,1	19,6	21,0	22,3	24,8
2	9,6	10,3	10,5	11,2	11,8	12,4	12,8	12,9	13,3
3	6,1	7,3	8,5	9,9	10,5	13,0	13,5	14,4	15,2
4	5,8	6,8	7,8	9,5	11,9	14,12	17,12	20,0	22,7
5	11,0	11,7	12,1	12,5	12,8	13,0	13,2	13,4	13,9
6	10,0	11,7	13,4	15,0	16,6	18,1	21,6	23,1	24,3
7	6,0	6,7	7,7	8,5	9,1	9,9	10,9	11,6	12,8

8	11,8	13,3	14,6	15,9	17,1	18,2	19,3	20,1	21,5
9	11,2	11,7	12,2	12,7	13,3	13.9	14,5	15,1	16,2
10	13,0	13,8	14,4	14,9	15,2	15,5	15,7	15,9	16,3
11	8,7	10,2	12,4	13,9	15,2	16,3	17,9	18,5	20,8
12	12,2	14,0	15,2	16,6	17,9	18,2	19,6	20,3	21,4
13	11,9	12,6	13,7	14,6	15,1	16,9	17,3	18,8	19,2
14	14,0	15,2	17,0	18,8	19,8	20,3	21,5	22,3	23,6
15	11,6	12,3	13,6	14,5	15,9	16,3	17,2	18,2	19,9
16	11,5	12,1	13,3	15,8	17,2	20,5	21,1	23,5	25,1
17	9,6	10,2	11,8	12,3	13,5	13,9	14,7	15,3	16,2
18	8,2	10,1	11,9	12,3	14,6	16,2	17,9	18,6	20,1
19	6,6	6,9	11,1	11,3	13,8	14,8	15,4	16,9	18,2
20	7,0	8,8	10,0	11,1	12,2	12,9	15,4	19,1	21,3
21	7,8	8,2	9,3	10,4	11,8	12,4	13,6	14,7	15,3
22	7,7	9,3	12,1	12,9	13,2	15,2	16,3	17,4	18,1
23	11,6	11,9	12,6	12,9	13,3	13,9	14,1	15,0	15,9
24	13,3	13,9	14,8	15,2	16,9	17,2	18,0	18,9	19,2
25	10,2	10,5	11,2	11,9	11,7	13,0	13,9	14,5	15,2
26	11,2	12,3	13,5	14,6	15,7	16,8	17,9	18,4	18,9
27	10,6	11,2	12,6	13,5	14,2	15,3	16,3	16,5	17,3
28	9,6	11,1	12,3	13,5	14,9	15,6	16,1	17,2	18,2
29	9,7	10,2	11,3	12,5	13,6	14,8	15,6	16,9	17,8
30	11,1	12,6	13,8	14,9	15,3	16,5	17,9	18,5	19,5

4.3. Завдання контрольної роботи

Варіанти до завдання 4.3.1.

Знайти коефіцієнт кореляції моделі та оцінити адекватність моделі. Примітка. Номер варіанта обирається в першому рядку таблиць.

1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**	
y	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**
26	3	5	3	60	4	40	20	10	3	90	23	12	4	32	13	36	50	16	8
30	5	7	4	70	5	42	22	12	4	95	22	14	6	32	11	40	40	11	10
32	6	6	3	72	7	43	24	13	5	100	30	17	8	12	15	38	45	13	11
40	7	10	5	75	8	50	30	14	6	105	34	19	10	20	15	36	48	20	16
41	7	9	4	80	9	55	35	15	7	110	40	21	12	22	16	39	52	30	18
43	8	11	8	82	9	60	40	16	8	115	38	23	14	25	16	41	55	25	16
48	10	12	8	82	10	62	42	17	9	120	43	25	16	27	17	42	53	32	18
49	10	13	9	78	9	65	45	18	10	125	45	27	18	32	19	44	47	28	18
50	11	15	10	81	11	66	46	19	11	130	48	29	20	39	20	44	48	30	19
52	12	16	11	85	15	68	48	20	12	135	50	31	22	40	21	46	52	34	20

11		12		13		14		15		16		17		18		19		20	
y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x
6	4	15	3	40	5	15	4	110	40	9	2	12	5	320	120	90	23	22	4
8	5	20	5	50	6	20	6	120	50	9	2	15	7	322	110	95	25	25	6
7	4	22	6	52	8	22	7	130	60	10	3	17	9	120	116	100	30	27	8
10	6	30	6	55	9	30	7	140	70	11	4	19	11	200	150	105	32	29	10
11	7	31	7	60	10	31	8	150	80	15	5	21	13	220	150	110	40	31	12
12	9	35	8	60	10	35	9	160	90	16	4	23	15	250	153	115	38	33	14
13	9	38	10	62	11	38	11	170	100	17	6	25	17	270	152	120	42	35	16
14	10	39	10	58	10	39	11	180	110	18	7	27	18	320	190	125	45	37	18
16	11	40	11	63	12	40	12	190	120	19	7	29	22	390	200	130	48	39	20
15	10	42	12	65	16	42	13	200	130	20	8	31	23	400	210	135	50	41	22

21		22		23		24		25		26		27		28		29		30	
y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x
26	40	25	7	100	24	15	4	220	30	35	50	15	6	36	60	15	13	15	3
30	30	20	9	105	22	17	5	222	10	39	40	10	8	40	50	17	14	20	5
28	35	22	10	110	30	16	4	120	15	37	45	12	9	38	55	16	13	22	6
26	38	30	15	115	35	19	6	100	50	35	48	20	14	36	58	19	15	32	6
29	42	40	18	120	40	20	7	120	52	38	52	30	17	39	62	20	16	41	7
31	45	35	16	125	35	18	5	150	54	40	55	25	15	41	65	18	14	45	8
32	43	42	18	130	43	21	9	170	52	41	53	32	17	42	63	21	18	48	10
34	37	38	18	135	45	22	9	225	90	43	47	28	17	44	57	22	18	49	11
34	38	40	19	140	48	23	8	290	100	43	48	30	18	44	58	23	19	500	12
36	42	43	20	145	50	25	10	300	110	45	52	34	20	46	62	25	20	52	13

Варіанти до завдання 4.3.2.

Оцінити параметри моделі лінійної багатофакторної регресії. Побудувати кореляційну матрицю. Зробити висновки про зв'язок між факторами і результативним показником. Оцінити адекватність моделі.

1			2			3			4			5		
y	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
2	0,4	10	10	2	1	5	3	10	6	4	10	33	0,6	11
5	0,9	8	14	2	3	8	7	11	8	7	11	30	0,5	16
6	1,2	10	17	8	11	6	8	9	6	8	9	31	0,8	14
7	1,3	9	15	3	4	9	5	12	9	5	12	32	0,7	10
7	1,1	12	16	7	9	2	10	13	2	10	13	26	0,6	12
8	1,4	13	11	3	4	7	6	14	7	6	14	35	0,6	13
4	0,7	9	15	5	7	3	7	9	3	9	10	30	0,7	18
6	0,9	12	11	4	4	4	9	8	4	9	8	25	0,5	15

7	1,4	13	17	9	10	8	5	13	8	5	13	21	0,6	15
3	0,4	11	18	10	12	7	6	12	7	6	12	34	0,9	7

6			**7**			**8**			**9**			**10**		
y	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**
50	1,5	2	11	6	6	9	11	5	29	1	4	4	5	6
40	2,5	3	12	4	6	10	12	5	34	4	6	5	6	7
54	3,5	4	9	6	3	14	12	4	33	8	6	6	7	8
44	4	5	14	4	2	15	12	5	41	5	6	6	3	5
65	5,5	6	7	4	5	12	15	6	50	6	9	8	1	7
64	3	6	9	8	1	19	15	3	55	4	9	11	6	8
70	2,5	7	16	7	2	13	19	7	54	7	10	14	6	9
80	4,5	8	15	6	8	11	20	5	56	7	10	14	7	8
72	4,5	9	16	4	10	14	19	7	62	8	11	16	8	10
110	3,1	10	19	6	10	15	22	9	60	7	12	14	8	9

11			**12**			**13**			**14**			**15**		
y	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**
3	1,3	11	11	3	2	6	4	10	33	1,5	11	51	2,5	3
5	1,9	8	13	3	3	8	7	11	30	1,4	16	41	3,5	4
7	2,2	11	18	9	11	6	8	9	31	1,7	14	56	4,3	5
8	2,3	14	14	3	5	9	5	12	32	1,6	10	45	5	6
8	2,1	14	16	7	9	2	10	13	26	1,5	12	68	6,7	7
9	2,4	14	11	4	5	7	6	14	35	1,5	13	66	4	7
5	1,7	9	15	6	8	3	7	9	30	1,6	18	80	3,9	8
7	1,9	13	13	4	4	4	9	8	25	1,4	15	90	5,1	9
8	2,3	13	17	10	11	8	5	13	21	1,5	15	73	5,5	10
4	1,4	12	19	11	12	7	6	12	34	1,9	8	111	4,1	11

16			**17**			**18**			**19**			**20**		
y	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**
13	7	7	10	13	6	10	3	6	5	6	7	16	1,6	18
14	5	7	12	14	7	12	6	7	6	10	9	7	1,2	8
10	8	5	15	14	6	15	9	7	7	5	6	7	1,2	8
15	5	3	16	15	6	16	7	8	7	4	6	8	1,3	9
8	6	7	13	16	7	13	6	9	9	2	8	9	1,4	10
10	9	2	20	17	5	20	5	10	12	6	9	9	1,4	11
18	8	3	14	20	8	14	8	10	15	7	10	11	1,6	14
15	7	9	12	20	6	12	7	11	15	8	9	13	1,7	17

17	6	10	15	21	9	15	9	12	17	9	11	15	1,6	14
20	7	11	16	23	10	16	8	13	15	10	10	13	1,8	16

21			**22**			**23**			**24**			**25**		
y	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**	**y**	**x_1**	**x_2**
1	0,3	9	9	1	1	4	8	8	31	0,5	9	11	0,5	1
4	0,9	6	11	1	2	6	5	9	28	0,4	14	12	1,5	2
5	1,2	9	16	7	9	4	6	7	29	0,7	12	8	2,3	3
6	1,3	8	12	1	3	7	3	10	30	0,6	8	13	3	4
6	1,1	12	14	5	7	1	8	11	24	0,5	10	6	4,7	5
7	1,4	12	9	2	3	5	4	12	33	0,5	11	8	2	5
3	0,7	7	13	4	6	1	5	7	28	0,6	16	16	1,9	6
5	0,9	11	11	2	2	2	7	6	23	0,4	13	13	3,1	5
6	1,3	11	15	8	9	6	3	11	19	0,5	13	15	3,5	4
2	0,4	10	17	9	10	5	14	10	32	0,9	8	18	2,1	5

Варіанти до завдання 4.3.3.

Використовуючи показники ефективності роботи локомотивного депо, розрахувати параметри моделі нелінійної залежності.

Використовуючи метод екстраполяції, знайти прогнозні дані для наступного року динамічного ряду.

варіант	Показники	Роки						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Обсяг перевезень, млн. т-км	6244	6895	6970	7020	7275	7381	7620
2	Собівартість перевезень, грн	2,63	2,601	2,57	2,52	2,439	2,51	2,45
3	Продуктивність праці, т-км/осіб	3554	3687	3848	3942	4006	4051	4207
4	Фондовіддача, т-км/грн	304	306	305	307	311	313	318
5	Продуктивність локомотива, тис. т-км	529	531	535	540	551	574	576
6	Вага локомотива, т	930	938	940	943	990	1015	1022
7	Середньодобовий прохід локомотива, км	440	460	480	475	500	531	513
8	Продуктивність локомотива у вантажному русі, тис. т-км	2319	2335	2355	2367	2350	2380	2386
9	Вага поїзда у вантажному русі, т	3060	3085	3091	3110	3090	3095	3005
10	Середньодобовий прохід проїзда у вантажному русі, км	640	641	631	635	649	647	655

варіант	Показники	Роки						
		1	2	3	4	5	6	7

11	Обсяг перевезень, млн. т-км	7114	7685	7860	7910	8165	8271	8510
12	Собівартість перевезень, грн	2,43	2,401	2,37	2,32	2,293	2,31	2,24
13	Продуктивність праці, т-км/осіб	3354	3487	3648	3742	3806	3851	4007
14	Фондовіддача, т-км/грн	284	286	285	287	291	293	298
15	Продуктивність локомотива, тис. т-км	319	321	325	330	331	354	366
16	Вага локомотива, т	820	828	840	863	890	905	912
17	Середньодобовий прохід локомотива, км	530	550	570	565	590	621	603
18	Продуктивність локомотива у вантажному русі, тис. т-км	2209	2225	2245	2257	2240	2270	2276
19	Вага поїзда у вантажному русі, т	3050	3075	3081	3000	3080	3085	3095
20	Середньодобовий прохід проїзду у вантажному русі, км	730	731	721	725	739	737	745

варіант	Показники	Роки						
		1	2	3	4	5	6	7
21	Обсяг перевезень, млн. т-км	7214	7785	7960	8010	8265	8371	8610
22	Собівартість перевезень, грн.	2,44	2,411	2,38	2,33	2,303	2,32	2,25
23	Продуктивність праці, т-км/осіб	3364	3398	3658	3752	3816	3861	4017
24	Фондовіддача, т-км/грн	384	386	385	387	391	393	398
25	Продуктивність локомотива, тис. т-км	519	521	525	530	541	564	566
26	Вага локомотива, т	920	928	930	963	980	995	1002
27	Середньодобовий прохід локомотива, км	430	440	490	465	480	501	493
28	Продуктивність локомотива у вантажному русі, тис. т-км	2009	2025	2045	2057	2040	2070	2076
29	Вага поїзда у вантажному русі, т	3140	3165	3171	3195	3170	3175	3185
30	Середньодобовий прохід проїзда у вантажному русі, км	710	722	711	716	729	728	735

4.4. Основні тестові завдання
ТЕСТ 1

Тема: Основні поняття теорії моделювання

1. Модель це:
а) фізичне представлення предмета;
б) фізичне або символічне представлення об'єкта;
в) символічне представлення об'єкта;
г) всі перераховані.
2. Математичне моделювання це :
а) опис економічного явища за допомогою формул, рівнянь, нерівностей;
б) опис економічного явища за допомогою тренда.
3. Моделі поділяються на:
а) фізичні та символічні;
б) символічні та мішані;
в) фізичні,символічні, мішані.
4.Фізичні моделі поділяються на:
а) аналогові та подібності;
б) аналітичні та алгоритмічні;
в) аналогові та аналітичні.
5.Символічні моделі поділяються на:
а) семантичні та математичні;
б) аналогові та подібності;
в) семантичні та аналогові;
6. У моделюванні виділяють поняття:
а) об'єкт;
б) суб'єкт;
в) прогнозний фон.

7. Об'єкт моделювання це :
а) процес, явища і події, на які спрямована дослідницька та практична діяльність;
б) умови, на які спрямована дослідницька та практична діяльність;
в) сукупність даних, на які направлена практична діяльність.

8. Фоном моделювання називається сукупність:
а) зовнішніх по відношенню до об'єкту умов;
б) внутрішніх по відношенню до об'єкту умов.

9*. До параметрів системи моделювання належать:*
а) пропозиція;
б) попит;
в)дохід;

г) нецiновий чинник.
10. Параметром, який часто обчислюється, і характеризує систему моделювання є:
а) пропозиція;
б) попит ;
в)дохід;
г) нецiновий чинник.
11. Системність в моделюванні означає вимогу підпорядкованості:
а) об'єкта, фону та елементів моделювання;
б) об'єкта та елементів моделювання;
в) даних та фону моделювання.

12. Варіантність у моделюванні означає вимогу розробки варіантів прогнозу, виходячи з:
а) варіантів кінцевих даних;
б) варіантів прогнозного фону;
в) варіантів об'єкту.
13.Моделі бувають :
а) структурні;
б) функціональні;
в) вартісні;
г) всі відповіді вірні.
14. Структурні моделі поділяються на:
а) канонічні;
б) внутрішньої структури;
в) ієрархічні;
г) всі відповіді вірні.
15.Функціональні моделі поділяються на:
а) моделі операцій;
б) процедурні моделі;
в) часові та інформаційні моделі.
16. Алгоритмічні моделі:
а) мають розгалуження;
б) не мають розгалуження.
17. Оптимізаційні моделі характеризуються:
а) критерієм оптимальності;
б) цільовою функцією;
в) системою обмежень.

ТЕСТ 2
Тема: Проста лінійна регресія

1. Складіть графік продажу картоплі у магазині (у тоннах) за тиждень:
1-й день – 1; 2-й день – 1,2; 3-й день – 1,4; 4-й день – 1,2; 5-й день – 1,3; 6-й день – 1,4; 7-й день – 1,3. За 8 день продаж складає:

а) 1,26 (т);   б) 1,7 (т);   в) 2,1 (т).

2. Які елементи у організації моделювання зайві?
а) організація системи;
б) порядок і послідовність роботи;
в) варіаційні обчислення;
г) виконавці;
д) оцінка параметрів моделі.

3. Які елементи організації модельованої системи зайві?
а) колектив спеціалістів окремої фірми, відділу, служби;
б) технічні та математичні засоби;
в) системи інформації, що застосовується;
г) організаційні міроприємства.

4. Порядок і послідовність роботи по моделюванню включають етапи (знайти правильні):
а) вибір факторів;
б) аналіз факторів;
в) побудова моделі;
г) проспекція;
д) оцінка моделі.

5. Методом короткострокового прогнозування попиту є:
а) трендова модель;
б) імітаційна модель.

6. При моделюванні ми спостерігаємо запізнення одного явища від іншого, що пов'язане з ним у:
а) тренда;
б) лага;
в) періодичних коливань.

7. Періодичні коливання залежать від:
а) сезонів, циклів;
б) від змін, що не повторюються;
в) конкретної дати.

8. Яка функція відповідає графіку
а) у = а + вlgx;
б) у = а + вх;
в) у = а + вx + сx^2.

9. Яка функція відповідає графіку

а) $\frac{1}{a+bx}$;

б) y = a + вlgx;

в) y = $\frac{H}{1+be^{-ax}}$.

10. Яка функція відповідає графіку

а) y=a+вx;

б) $y = a + bx + cx^2$;

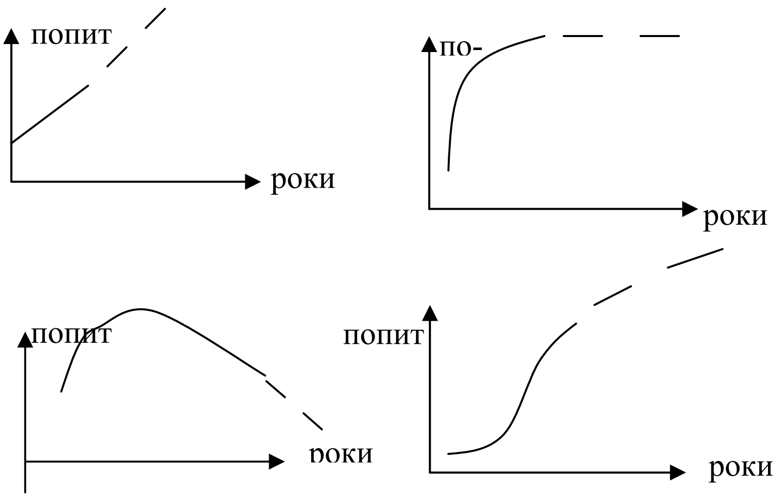
в) $y = a^x$.

11. Яка функція відповідає графіку

а) $y = a^x$;

б) $\frac{1}{a+bx}$;

в) y = $\frac{H}{1+be^{-ax}}$.



12. В багатофакторних моделях попит на товар характеризується як функція:

а) однієї незалежної змінної;

б) однієї залежної змінної;

в) декількох незалежних змінних.

13. В практиці середньострокового прогнозування найчастіше використовуються:

а) однофакторні моделі;

б) багатофакторні кореляційні та регресивні моделі.

14. Довгострокові прогнози потребують:

а) лінійних типів зв'язків;

б) нелінійних типів зв'язків.

15. До розробки прогнозів, що будуть використані при плануванні показників діяльності фірми належать:
а) кон'юнктури ринку;
б) нові потреби та технології на ринку.

5. ПІДСУМКОВИЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ

5.1. Контрольні заходи

Контрольні заходи, які дозволяють оцінити рівень знань студентів по курсу, поділяються на поточні та підсумкові.

У поточному порядку знання оцінюються в процесі виконання теоретичних та розрахункових контрольних завдань і тестування у формі опитування або письмово.

Поточні контрольні заходи проводяться наприкінці вивчення тем курсу згідно з тематичним планом навчальної дисципліни залежно від обсягу вивченого матеріалу. Перелік запитань та задач визначається змістом лекційного курсу та виконаними практичними завданнями.

Періодичність та складність поточних контрольних заходів обирається викладачем. Можливо систематичне проведення опитування, надання коротких письмових відповідей або тестування на початку кожного практичного заняття протягом 5-10 хвилин за матеріалом вивченим на попередньому занятті. Або періодичне, більш глибоке розкриття за відносно ширшим переліком завдань, що охоплює матеріали декілька занять, змісту окремих аспектів економіки транспортної галузі три-чотири рази у семестрі.

Якість засвоєння навчального матеріалу по дисципліні в цілому визначення за підсумком виконання контрольної роботи, при проведенні іспиту по курсу.

Контрольна робота виконується студентами безвідривної форми навчання у письмовій формі згідно з другим розділом даних методичних вказівок.

Іспит по дисципліні проводиться в усній формі. Студенти отримують екзаменаційні білети, які містять два комплексних питання з курсу та одне розрахункове завдання. Білети побудовано таким чином, що можлива оцінка знань по загальних економічних проблемах функціонування і розвитку транспорту та по особливостях господарювання залізниць. Задачі дозволяють оцінити рівень надбання навичок прикладної роботи та побудовано по розрахункових матеріалах практичних занять.

Після отримання білета студенту надається 20 хв. на підготовку по теоретичних питаннях та вирішення задачі. Після підготовки проводиться співбесіда з екзаменатором, протягом якої викладач може задавати додаткові питання. Якість підготовки оцінюється за чотирибальною системою («відмінно», «добре» , «задовільно», «не задовільно»).

5.2. Критерії атестаційної оцінки

«**Відмінно**» – відповідь побудована на рівні самостійного творчого мислення на основі ґрунтовного знання проблеми, що висвітлюється, основних понять та категорій, розуміння закономірностей процесів моделювання в ринкових умовах господарювання, грамотне, логічно-послідовне викладення теоретичного матеріалу, вміння пов'язувати його з практикою транспортних підприємств, а також робити узагальнення та висновки.

«**Добре**» – вірна відповідь, побудована на рівні самостійного мислення з елементами творчого пошуку, розуміння студентом основних закономірностей економічних процесів. Допускаються окремі незначні помилки та неточності у висвітленні неосновних аспектів проблеми.

«**Задовільно**» – в цілому вірна відповідь на рівні загального сприйняття економічних ситуацій. Допускаються недостатньо вірні формулювання, окремі незначні помилки у висвітленні основних аспектів проблеми, незнання другорядних понять і категорій.

«**Незадовільно**» – невірна відповідь на питання. Допущені значні помилки, що мають принципове значення в теоретичних визначеннях і практичному застосуванні. Незнання більшості понять і категорій економіки транспорту. Нерозуміння основних закономірностей розвитку транспортних підприємств в умовах ринкових відносин. Неспроможність аналізувати процеси моделювання.

«**Зараховано**» – при дотриманні вимог по оцінках «відмінно», «добре», «задовільно».

«**Не зараховано**» **-** відповідає оцінці «незадовільно».

5.3 Запитання для контролю

1. Дайте коротку характеристику алгоритму покрокової регресії.
2. Чим відрізняються коефіцієнти парної та часткової кореляції.
3. Покажіть співвідношення між коефіцієнтами кореляції і детермінації
4. Покажіть, як визначаються дисперсія залишків, загальна дисперсія і дисперсія регресії. Який між ними зв'язок?
5. Як визначається F-критерій? Для чого він застосовується?
6. Покажіть залежність між F- критерієм і коефіцієнтом детермінації.
7. Як оцінити вірогідність коефіцієнта кореляції?
8. Доведіть, чому для визначення значущості параметрів моделі можна застосувати t-критерій?
9. Як розраховується t-критерій?
10. Що означає, стандартна помилка параметрів моделі. Дайте альтернативні форми її розрахунку.
11. Як визначити довірчі інтервали для параметрів моделі?
12. Класична модель багатофакторної регресійної моделі (БРМ)
13. Етапи побудови БРМ
14. Розрахунок параметрів БРМ методом найменших квадратів.

15. Коефіцієнт моделей множинної кореляції та детермінації.
16.Запишіть загальну модель багатофакторної лінійної регресійної (БЛР).
17. Основні припущення відносно незалежних змінних моделей.
18. Алгоритм побудови багатофакторної лінійної регресії (БЛР).
19. Матричний підхід до БЛР.
20. Як перевірити модель на адекватність за критерієм Фішера.
21. Знаходження інтервалів довіри параметрів моделі.
22. Що означає «мультиколінеарність» змінних?
23. Які ознаки мультиколінеарності Ви знаєте?
24. Як впливає наявність мультиколінеарності змінних на оцінку параметрів моделі?
25. Які статистичні критерії використовуються для виявлення мультиколінеарності?
26. Дайте коротку характеристику алгоритму Фаррара-Глобера.
27. Що лежить в основі методу головних компонент? Коли він застосовується?
28. Як розрахувати головні компоненти і яким умовам вони задовольняють?
29. Як оцінюються параметри моделі на основі головних компонент?
30. Покажіть, як можна оцінити параметри моделі: $Y = X\beta$ на основі параметрів моделі $Y = Zb$.
31. Запишіть загальний вигляд нелінійної моделі.
32. Дати визначення виробничої функції.
33. Наведіть формули для обрахування коефіцієнтів гіперболічної моделі.
34. Наведіть формули для обрахування коефіцієнтів параболічної моделі.
35. Приведіть степеневу модель до лінійного виду.
Наведіть методи визначення невідомих параметрів нелінійної моделі
36. Дайте визначення гомоскедастичності і гетеро скедастичності.
37. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?
38. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.
39. Як перевіряється гетероскедастичність на основі критерію μ?
40. Як застосовується параметричний тест для визначення гетероскедастичності?
41. У чому сутність непараметричного тесту?
42. Як визначається гетероскедастичність на основі регресії залишків?
43. Як використовується матриця S в методі Ейткена?
44. Які властивості повинна мати матриця?
45. Запишіть формулу розрахунку матриці коваріацій параметрів моделі. Чим вона відрізняється від формули при застосуванні МНК?
46. Як одержати незміщену оцінку дисперсії залишків при наявності гетероскедастичності?
47. Запишіть оператор оцінювання параметрів моделі па основі методу Ейткена.
48. Дайте визначення автокореляцій.
49. Які причини виникнення автокореляції залишків?
50. Як впливає автокореляція залишків на оцінку параметрів економетричної моделі?
51. В яких випадках при автокореляції залишків доцільніше використовувати методи Кочрена-Оркатта або Дарбіна?

52. Дайте коротку характеристику алгоритму метода Кочрена-Оркатта.
53. Чим відрізняється метод Дарбіна від методу Кочрена-Оркатта?
54. Як записати формулу прогнозу залежної змінної при автокореляції залишків? Чому вона має такий вигляд?
55. Запишіть у загальному вигляді структурну форму моделі на основі одночасних рівнянь.
56. Що означає приведена форма моделі? Як її одержати?
57. Дайте визначення рекурсивних систем і запишіть модель на основі рекурсивної системи.
58. Яка система рівнянь називається строго ідентифікованою?
59. Яка система рівнянь називається надідентифікованою?
60. Запишіть умову ідентифікованості системи рівнянь.
61. На основі якого методу можна оцінити параметри моделі, якщо вона складається із системи рекурсивних рівнянь?
62. Який метод оцінки параметрів можна застосувати, коли всі рівняння моделі є точно ідентифікованими?
63. На основі якого методу можна оцінити параметри моделі, якщо вона має наді де інтифіковані рівняння?
64. Чи можна виконувати оцінку параметрів моделі окремо для групи строго ідентифікованих і надідентифікованих рівнянь?
66. Покажіть, що якщо в системі рівнянь між змінною У та залишками , існує залежність, то застосування МНК дасть зміщення оцінки параметрів. Визначте величину цього зміщення.

6. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
2. *Джонстон Дж.* Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
3. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 402 с.
4. *Задорожний Г.В., Иващенко П.А.* Эконометрика. Часть 1. – Харьков: Харьковский институт бизнеса и менеджмента, 1996. – 104 с.
5. *Задорожний Г.В., Иващенко П.А.* Эконометрика. Часть 2. – Харьков: Харьковский институт бизнеса и менеджмента, 1996. – 99 с.
6. *Иванова В.М.* Основы эконометрики: Учебное пособие – М.: Моск. эконом.-стат. ин-т. – М., 1995. – 145 с.
7. *Кейн Э.* Эконометрическая статистика и эконометрия. Вып. 2. – М.: Статистика, 1977. – 255 с.
8. *Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.* Эконометрика. Начальный курс. – М.: Депо, 1997. – 248 с.
9. *Назаренко А.М.* Эконометрика: Учебное пособие. – Сумы: Изд-во СумГу, 2000. – 404 с.
10. *Наконечний С.Н., Терещенко Т.О., Романюк Т.П.* Економетрія: Підручник. – Вид. 2-ге, допов. та перероб. – К.: КНЕУ, 2000. – 296 с.
11. *Толбанов Ю.В.* Економетрика: Учбовий посібник. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.

Додаткова:

12. Бирман Г., Шмидт С. Экономический анализ инвестиционных проектов / Пер. с англ. под ред. Л.П. Белых. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 631 с.

13. Гочаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономическо-математические модели: Учебное пособие. – М.: Компьютер, ЮНИТИ, 1995. – 170 с.

14. Кейн Э. Эконометрическая статистика и эконометрия. Вып. 1. – М.: Статистика, 1977. – 255 с.

15. Грубар Й. Эконометрия: Учебное пособие для студентов экономических специальностей. – К., 1996. Т.1. Введение в эконометрию. – 400 с.

16. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 301 с.

17. Коршунова Н.И., Плясунов В.С. Математика в экономике: Учебное пособие. – М.: Вита-Пресс, 1996. – 368 с.

18. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрія: Підручник. – К.: Товариство "Знання", КОО, 1998. – 494 с.

19. Пирогов Г.Г., Федоровський Ю.П. Проблемы структурного оценивания в эконометрии. – М.: Статистика, 1979. – 327 с.

20. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968. – 288 с.

20. *Розин Б.Б., Соколов В.М., Ягольницер М.Я.* Статистические модели в эконометрическом анализе, планировании и управлении непрерывными процессами. – Новосибирск: Наука, 1991. – 255 с.
21. *Справочник* по прикладной статистике. Т.1 / Пер. с англ. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и справочники, 1989. – 510 с.
22. *Справочник* по прикладной статистике. Т.2 / Пер. с англ. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, С.А. Айвазяна, Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и справочники, 1990. – 526 с.
23. *Фишер Ф.* Проблема индентификации в эконометрии. – М.: Статистика, 1978. – 223 с.

Періодичні видання

1. «Весь транспорт».
2. «Железнодорожный транспорт».
3. «Железные дороги мира».
4. «Залізничний транспорт України».
5. «Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті».
6. «Магістраль».
7. «Транспорт».
8. «Экономика железных дорог».

Додаток

Зразок оформлення титульної сторінки

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ , МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Економіка підприємств транспорту»

РЕФЕРАТ /КОНТРОЛЬНА РОБОТА/

з дисципліни «Економіко-математичне моделювання»

Виконав студент групи ___________

____

(Прізвище, ініціали)

Шифр_________________________

Перевірив

____

(посада, наукове звання)

____

(Прізвище, ініціали)

Київ – 2012

Навчально-методичне видання

Творонович Вікторія Ігорівна
Гудкова Вікторія Петрівна
Андрієнко Марія Михайлівна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Методичні вказівки до вивчення курсу
для студентів економічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання
6.050107 «Економіка підприємства»
денної та заочної форм навчання

Відповідальний за випуск:
Творонович В.І.

Редактор: Щербак Н.В.

Підписано до друку 17.06.11 р. Формат паперу 60х84/16, папір – офсетний,
друк – на різографі. Зам.№ 75-2/41. Наклад 100.

Надруковано у видавництві ДЕТУТ
Свідоцтво про реєстрацію Серія № 3079 від 27.12.07.
03049, м. Київ-49, вул. Миколи Лукашевича, 19