

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ**

Кафедра вищої математики

**Т.В. КРИЖАНОВСЬКА
О.О.КІЛЬЧИНСЬКИЙ**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 1

для студентів денної прискореної форми навчання

за напрямками підготовки

6.070105 «Рухомий склад залізниць»,

6.050701 «Залізничні споруди і колійне господарство»,

6.050702 «Електромеханіка»

Київ 2016

УДК 51:517

Крижановська Т.В., Кільчинський О.О.

ВИЩА МАТЕМАТИКА: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 1 для студентів денної прискореної форми навчання за напрямками підготовки 6.070105 «Рухомий склад залізниць», 6.050701 «Залізничні споруди і колійне господарство», 6.050702 «Електромеханіка» / Крижановська Т.В., Кільчинський О.О. – К.: ДЕДУТ, 2016. – 69 с.

В даних методичних вказівках підбрано варіанти розрахункових робіт з вищої математики. На прикладах типових завдань викладено методику їх виконання.

Роботу призначено для самостійного опрацювання студентами програмного матеріалу за тематикою I семестру: лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної. Самостійна робота з варіантами потрібна для засвоєння всіх зазначених тем на належному рівні.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол №2 від 29.10.15) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол №3 від 25.11.15).

Методичні вказівки призначені для студентів всіх форм навчання за напрямками підготовки 6.070105 «Рухомий склад залізниць», 6.050701 «Залізничні споруди і колійне господарство», 6.050702 «Електромеханіка».

Укладачі: Т.В. Крижановська, к.ф.-м.н., професор
О.О. Кільчинський, к.ф.-м.н., доцент

Рецензенти: В.М. Семененко, д.т.н, провідний науковий співробітник
А.Ю. Андрейцев, к.ф.-м.н., доцент

ЗМІСТ

<i>Передмова</i>	4
<i>Методичні рекомендації до виконання розрахункової роботи</i>	6
<i>Завдання для самостійної роботи студентів</i>	19
<i>Контрольні питання з дисципліни</i>	66
<i>Додаток</i>	67
<i>Список рекомендованої літератури</i>	68

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки призначено для поглиблення вивчення теоретичного матеріалу, удосконалення навичок самостійної роботи та контролю знань з вищої математики у студентів денної прискореної форми навчання за напрямками підготовки 6.070105 «Рухомий склад залізниць», 6.050701 «Залізничні споруди і колійне господарство», 6.050702 «Електромеханіка» за I семестр I курсу. З цією метою розроблено тематику завдань і викладено відповідну методику розв'язування типових задач по всіх варіантах розрахункової роботи. Послідовність розв'язаних типових задач співпадає послідовністю вивчення тем у навчальному курсі і послідовністю задач у варіантах. Це полегшує засвоєння студентами методичних вказівок і забезпечує умови для їх рівномірної роботи протягом семестру.

При оформленні розрахункової роботи треба дотримуватись таких вимог:

- 1) номер варіанта індивідуального завдання має збігатись з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
- 2) розрахункова робота має подаватись на аркушах білого паперу у форматі А4 (записи робити тільки з одного боку – зворотній бік аркуша призначається для подальшої роботи при виправленні можливих недоробок та помилок, – писати акуратно та розбірливо);
- 3) перед розв'язуванням кожної задачі безпосередньо має записуватись її умова і всі конкретні дані;
- 1) розв'язування кожної задачі слід супроводжувати достатніми поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

- 1) ознайомитись з наведеним переліком контрольних питань із дисципліни «вища математика» та додатками (див. у кінці методичних вказівок – с. 69, 70), опанувати необхідний теоретичний матеріал з допомогою конспекту лекцій та рекомендованої літератури (див. на с. 71);

- 2) ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до відповідних номерів варіанта розрахункової роботи;
- 3) роботу над варіантом виконувати поетапно протягом усього семестру (в міру проходження відповідних тем лекційних та практичних занять);
- 4) по завершенні кожного етапу відповідну частину роботи (оформлену належним чином) здати на перевірку керівнику;
- 5) на зворотному боці відповідних аркушів, враховуючи зауваження керівника, зробити необхідні доробки;
- 6) повністю завершену роботу здати на перевірку керівнику не пізніше, ніж за два тижні до кінця семестру.

Студенти, які не здали роботу вчасно і не виконали необхідних вимог, до іспиту з дисципліни не допускаються, як такі, що не виконали навчальний план.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

- Задача 1.** Знайти границі:
- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 4n}{5n - 2};$ | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 4n + 8}{2 - 4n^2 + 7n^3};$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5n}{n^2 - 7} \right)^{3n-1};$ | 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4};$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin 3x^2}.$ |

Розв'язання:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 4n}{5n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{3}{n} - 4 \right)}{n \left(5 - \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - 4}{5 - \frac{2}{n}} = \frac{0 - 4}{5 - 0} = -\frac{4}{5};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 4n + 8}{2 - 4n^2 + 7n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^2} + 7 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n^3}}{\frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^2} + 7} = \frac{5 - 0 + 0}{0 - 0 + 7} = \frac{5}{7};$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5n - 1}{n^2 - 7} \right)^{3n-1} &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n^2 - 7} = 1 \right| = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left[\frac{n^2 + 5n - 1}{n^2 - 7} - 1 \right] \right)^{3n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5n + 6}{n^2 - 7} \right)^{\frac{n^2 - 7}{5n + 6} \cdot \frac{(5n + 6)(3n - 1)}{n^2 - 7}} = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5n + 6}{n^2 - 7} \right)^{\frac{n^2 - 7}{5n + 6}} = e \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(5n + 6)(3n - 1)}{n^2 - 7}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n + 6)(2n + 3)}{n^2 - 1}} = e^{10}; \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 3)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 3}{x - 2} = \frac{-2 + 3}{-2 - 2} = -\frac{1}{4};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 6x}{\sin 3x^2} = \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, \sin x \sim x, \\ \operatorname{tg} 6x \sim 6x, \sin 3x \sim 3x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x)^2}{3x^2} = \frac{6^2}{3} = 12.$$

Відповідь: 1) $-\frac{4}{5}$; 2) $\frac{5}{7}$; 3) e^{10} ; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) 0; 6) 12.

Задача 2. Дослідити на неперервність функцію: $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 3^x + 1, & 0 \leq x < 1. \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

Розв'язання:

Функція $y = f(x)$ є композицією елементарних функцій, які неперервні в своїх областях задання, тобто $y = f(x)$ неперервна на множині $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Тому дослідження треба провести в точках стику $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$$1) x_1 = 0: \quad f(x_1) = f(0) = 3^0 + 1 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 0 + 2 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + 1) = 2.$$

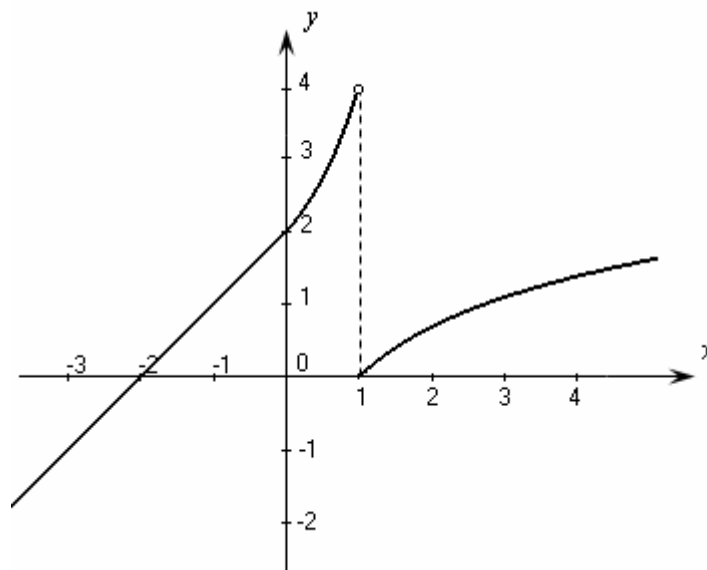
За означенням функція $f(x)$ точці $x_1 = 0$ неперервна.

$$2) x_2 = 1: \quad f(x_2) = f(1) = \ln 1 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3^x + 1) = 4;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0.$$

За означенням $x_2 = 1$ – точка розриву 1-го роду (стрибок).



Таким чином, функція $f(x)$ неперервна в усіх точках, крім $x = 1$, в якій має розрив 1-го роду (стрибок).

Відповідь: $x = 1$ – точка розриву 1-го роду (стрибок).

Задача 3. Для функції $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 8 + \ln x$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

Розв'язання:

$$1) y'(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x - 8 + \ln x)' = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 - 0 + \frac{1}{x} = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{1}{x};$$

$$2) dy = y'(x)dx = \left(3x^2 - 4x + 5 + \frac{1}{x}\right)dx;$$

$$3) y''(x) = (y'(x))' = \left(3x^2 - 4x + 5 + \frac{1}{x}\right)' = (3x^2 - 4x + 5 + x^{-1})' = 6x - 4 - x^{-2} = 6x - 4 - \frac{1}{x^2}.$$

Відповідь: 1) $3x^2 - 4x + 5 + \frac{1}{x}$; 2) $\left(3x^2 - 4x + 5 + \frac{1}{x}\right)dx$; 3) $6x - 4 - \frac{1}{x^2}$.

Задача 4. Знайти похідні заданих функцій:

$$1) y = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \log_2 x;$$

$$2) y = \frac{3 \sin x}{x - \ln x};$$

$$3) y = \arcsin x^5;$$

$$4) y = \ln \sqrt{1 - x^2};$$

$$5) y = 2^{x^2 \operatorname{tg} x};$$

$$6) \begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$$

$$7) x \ln x - e^y + y = 1;$$

$$8) y = (2x + 3)^{\operatorname{tg} x}.$$

Розв'язання:

1) $y = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \log_2 x$ – це добуток функцій, отже похідну будемо шукати за

формулою $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(x^{-2} + x^{-3}\right) \log_2 x\right)' = \left(x^{-2} + x^{-3}\right)' \log_2 x + \left(x^{-2} + x^{-3}\right) (\log_2 x)' = \\ &= \left(-2x^{-3} - 3x^{-4}\right) \log_2 x + \left(x^{-2} + x^{-3}\right) \frac{1}{x \ln 2} = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right) \log_2 x + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{x \ln 2}; \end{aligned}$$

2) $y = \frac{3 \sin x}{x - \ln x}$ – це частка двох функцій, отже похідну будемо шукати за

формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$y' = \left(\frac{3 \sin x}{x - \ln x}\right)' = \frac{(3 \sin x)'(x - \ln x) - 3 \sin x(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2} =$$

$$= \frac{3 \cos x(x - \ln x) - 3 \sin x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{3x \cos x(x - \ln x) - 3 \sin x(x - 1)}{x(x - \ln x)^2};$$

3) $y = \arcsin x^5$ – це складена функція вигляду $y = u(v(x))$, тому її похідну будемо шукати за формулою $y' = u'_v \cdot v'_x$:

$$y' = (\arcsin x^5)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^5)^2}} \cdot (x^5)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{10}}} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{\sqrt{1 - x^{10}}};$$

4) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$ – це складена функція, отже $y' = u'_v \cdot v'_x$:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} (\sqrt{1 - x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} (1 - x^2)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$= -\frac{2x}{2(1 - x^2)} = -\frac{x}{1 - x^2};$$

5) $y = 2^{x^2 \operatorname{tg} x}$ – це складена функція, отже

$$y' = \left(2^{x^2 \operatorname{tg} x}\right)' = 2^{x^2 \operatorname{tg} x} \ln 2 \cdot (x^2 \operatorname{tg} x)' = 2^{x^2 \operatorname{tg} x} \ln 2 \cdot \left((x^2)' \operatorname{tg} x + x^2 (\operatorname{tg} x)'\right) =$$

$$= 2^{x^2 \operatorname{tg} x} \ln 2 \cdot \left(2x \operatorname{tg} x + x^2 \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 2^{x^2 \operatorname{tg} x} \ln 2 \cdot \left(2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}\right);$$

6) $\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$ – це параметрично задана функція, тому її похідну будемо

шукати за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = (3t^2 - 2t^3)' = 6t - 6t^2; \quad x'_t = (t - \ln t)' = 1 - \frac{1}{t};$$

$$\text{Отже, } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6t - 6t^2}{1 - \frac{1}{t}} = \frac{6t^2 - 6t^3}{t - 1};$$

7) $x \ln x - e^y + y = 1$ – це неявно задана функція, продиференціюємо обидві частини рівності по x , враховуючи, що y є функцією від x :

$$(x \ln x - e^y + y)' = (1)';$$

$$x' \ln x + x \ln' x - e^y y' + y' = 0$$

$$\ln x + x \frac{1}{x} - e^y y' + y' = 0;$$

$$e^y y' - y' = \ln x + 1;$$

$$y' = \frac{\ln x + 1}{e^y - 1};$$

8) $y = (2x + 3)^{\operatorname{tg} x}$ – це функція вигляду $y = (f(x))^{g(x)}$, тому скористаємось логарифмічною похідною. Прологарифмуємо обидві частини рівняння:

$$\ln y = \ln(2x + 3)^{\operatorname{tg} x}, \text{ а тепер винесемо показник степеня за знак логарифма:}$$

$$\ln y = \operatorname{tg} x \ln(2x + 3);$$

$$(\ln y)' = (\operatorname{tg} x \ln(2x + 3))';$$

$$\frac{y'}{y} = (\operatorname{tg} x)' \ln(2x + 3) + \operatorname{tg} x (\ln(2x + 3))';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(2x + 3) + \operatorname{tg} x \frac{(2x + 3)'}{2x + 3};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(2x + 3)}{\cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{2x + 3};$$

$$y' = (2x + 3)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(2x + 3)}{\cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{2x + 3} \right).$$

Відповідь: 1) $-\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right) \log_2 x + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{x \ln 2}$; 2) $\frac{3x \cos x (x - \ln x) - 3 \sin x (x - 1)}{x(x - \ln x)^2}$;

3) $\frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}$; 4) $-\frac{x}{1-x^2}$; 5) $2^{x^2 \operatorname{tg} x} \ln 2 \cdot \left(2x \operatorname{tg} x + \frac{x^{2'}}{\cos^2 x}\right)$;

6) $\frac{6t^2 - 6t^3}{t-1}$; 7) $\frac{\ln x + 1}{e^y - 1}$; 8) $(2x + 3)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(2x + 3)}{\cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{2x + 3}\right)$.

Задача 5. Обчислити наближено а) $\sqrt[3]{26,94}$; б) $\cos 63^\circ$.

Розв'язання:

Використаємо наближену рівність $\Delta y \approx dy$ або $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

а) Введемо в розгляд функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Запишемо число у вигляді $26,94 = 27 - 0,06$ і покладемо $x_0 = 27$; $\Delta x = -0,06$.

$$\text{Маємо } f(x_0) = \sqrt[3]{27} = 3;$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27};$$

$$\text{Отже, } \sqrt[3]{26,94} \approx 3 + \frac{1}{27}(-0,06) = 3 - \frac{2}{9} = \frac{25}{9} \approx 2,778.$$

б) Розглянемо функцію $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$.

$$\text{Покладемо } x_0 = 60^\circ; \quad \Delta x = 3^\circ = \frac{3\pi}{180} = \frac{\pi}{60};$$

$$f(x_0) = \cos 60^\circ = 0,5;$$

$$f'(x_0) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 63^\circ \approx 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{60} = 0,5 - \frac{\sqrt{3}\pi}{120} \approx 0,455.$$

Відповідь: а) 2,778; б) 0,455.

Задача 6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

1) Обчислимо визначник за правилом Саррюса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 4 + 2 \cdot (-3) \cdot 5 + 4 \cdot (-6) \cdot 2 - 2 \cdot (-5) \cdot 5 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 - 3 \cdot (-6) \cdot 2 = -60 - 30 - 48 + 50 + 48 + 36 = -4;$$

2) Обчислимо визначник Δ , розкладаючи його за елементами 4-го рядка:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 9 & 5 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & -8 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -8 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{4+3} + \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 9 & -8 \end{vmatrix} - 11 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-8 + 18 + 15 - 27 - 10 + 8) + \\ &+ 7 \cdot (-8 + 10 + 15 - 15 - 10 + 8) - 7 \cdot (-8 + 10 + 27 - 15 - 18 + 8) - 11 \cdot 0 = \\ &= 16 + 0 - 28 - 0 = -12. \end{aligned}$$

Відповідь: 1) -4 ; 2) -12 .

Задача 7. Обчислити $AB - 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) & 5 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$2B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$AB - 2B = \begin{pmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -1 & 16 \\ 10 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 24 & -1 & 16 \\ 10 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ 6 & 20 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} . Обчислимо спочатку визначник матриці A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 15 + 3 - 20 + 15 - 30 - 2 = -19.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 13 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 25 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -9 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

Тоді обернена матриця дорівнює: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 & 25 & 18 \\ -9 & -10 & -11 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ 6 & 20 & -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{19} \right) \begin{pmatrix} 13 & 25 & 18 \\ -9 & -10 & -11 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -163 & -274 & -214 \\ -95 & -114 & -114 \\ -101 & -51 & -115 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{163}{19} & \frac{274}{19} & \frac{214}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{6}{19} & \frac{6}{19} \\ \frac{101}{19} & \frac{51}{19} & \frac{115}{19} \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $\begin{pmatrix} \frac{163}{19} & \frac{274}{19} & \frac{214}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{6}{19} & \frac{6}{19} \\ \frac{101}{19} & \frac{51}{19} & \frac{115}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ 6 & 20 & -1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} \frac{163}{19} & \frac{274}{19} & \frac{214}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{6}{19} & \frac{6}{19} \\ \frac{101}{19} & \frac{51}{19} & \frac{115}{19} \end{pmatrix}.$

Задача 9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -2 \\ 4x - 5y + 2z = -3 \\ 5x - 6y + 4z = -1 \end{cases}$$

Розв'язання:

1) Розв'яжемо систему за правилом Крамера. Для цього обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -60 - 30 - 48 + 50 + 36 + 48 = -4;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -3 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 40 + 6 + 36 - 10 - 24 - 36 = 12;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -36 - 20 - 8 + 30 + 6 + 32 = 4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 15 + 45 + 48 - 50 - 54 - 12 = -8.$$

Тоді за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-4} = -3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{-4} = -1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

$$\text{Перевірка: } \begin{cases} 3(-3) - 3(-1) + 2 \cdot 2 = -2 \\ 4(-3) - 5(-1) + 2 \cdot 2 = -3 \\ 5(-3) - 6(-1) + 4 \cdot 2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = -2 \\ -3 = -3 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

Відповідь: $-3; -1; 2$.

Задача 10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 2x - 3y - 3z = 6 \end{cases}$$

Розв'язання:

Розв'яжемо систему методом Гаусса.

Запишемо головну матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -5 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Складемо розширену матрицю $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -8 \\ 5 & 7 & -2 & -5 \end{array} \right)$.

Зведемо розширену матрицю до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -8 \\ 5 & 7 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{II-I \times 4 \\ III-I \times 5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -13 & -16 \\ 0 & -3 & -12 & -15 \end{pmatrix} \underset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -13 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{II \times (-1)}{\sim} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 13 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(B) = 3$, отже за теоремою Кронекера-Капеллі система має єдиний розв'язок.

Тепер згідно з матрицею відтворимо систему, еквівалентну заданій:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 13x_3 = 16 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо $x_3 = 1$, потім з другого $x_2 = 1$ і з першого $x_1 = -2$.

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Перевірка: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -8 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2 \\ -8 = -8 \\ -5 = -5 \end{cases}$

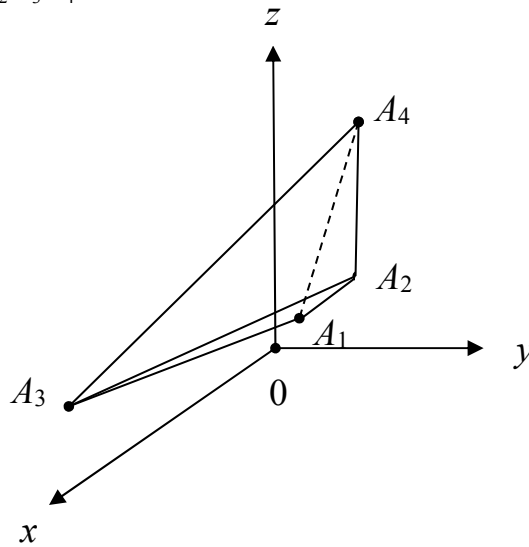
Відповідь: 1) $-3; -1; 2$; 2) $-2; 1; 1$.

Задача 11. Задано точки $A_1(1; 1; 1)$, $A_2(2; 2; 2)$, $A_3(3; 0; 1)$, $A_4(0; 1; 2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ і $\overline{A_1A_4}$;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$;
- 3) кут, утворений векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$;
- 4) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
- 5) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
- 6) рівняння прямої A_1A_2 ;
- 7) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
- 8) рівняння висоти A_4H , опущеної з точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$.

Розв'язання:

Побудуємо піраміду $A_1A_2A_3A_4$:



а) Знайдемо координати вектора $\overline{A_1A_2} = (2 - 1; 2 - 1; 2 - 1) = (1; 1; 1)$.

Довжина ребра A_1A_2 – це модуль вектора $\overline{A_1A_2}$

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

б) Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 – це кут між векторами $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_1A_4}$.

$$\overline{A_1A_2} = (1; 1; 1); \quad \overline{A_1A_4} = (0 - 1; 1 - 1; 2 - 1) = (-1; 0; 1).$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = 90^\circ$$

в) Знайдемо нормальний вектор до площини $A_1A_2A_3$ як векторний добуток

$$\vec{n} = \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}.$$

$$\overline{A_1A_2} = (1; 1; 1); \quad \overline{A_1A_3} = (3 - 1; 0 - 1; 1 - 1) = (2; -1; 0)$$

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k} = (1; 2; -3).$$

Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$.

$$\overline{A_1A_4}(-1; 0; 1); \quad \bar{n}(1; 2; -3)$$

$$\sin \psi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{-4}{2\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} \approx -0,76$$

Отримали $\sin \psi < 0$, це означає, що кут між $\overline{A_1A_4}$ і \bar{N} більше 180° . За кут між ребром A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$ візьмемо кут, для якого

$$\sin \psi = 0,76, \quad \psi = \arcsin 0,76 = 49^\circ.$$

г) Площа грані $A_1A_2A_3$ обчислюється за формулою $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|$.

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \bar{n} = (1; 2; -3).$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ кв.од.}$$

д) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знаходиться за формулою $V_{nip} = \frac{1}{6} |\overline{abc}|$,

$$\text{де } \bar{a} = \overline{A_1A_2} = (1; 1; 1); \quad \bar{b} = \overline{A_1A_3} = (2; -1; 0); \quad \bar{c} = \overline{A_1A_4} = (-1; 0; 1).$$

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 + 0 - 1 - 2 - 0 = -4 \quad \Rightarrow \quad V_{nip} = \frac{1}{6} |\overline{abc}| = \frac{1}{6} |-4| = \frac{2}{3} \text{ куб. од.}$$

е) Складемо рівняння прямої A_1A_2 як прямої, що проходить через дві точки $A_1(1; 1; 1)$ і $A_2(2; 2; 2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{z - 1}{2 - 1}$$

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1}.$$

є) Запишемо рівняння площини $A_1A_2A_3$ як площини, що проходить через задану точку $A_1(1; 1; 1)$ з заданим нормальним вектором $\bar{n}(1; 2; -3)$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$1(x - 1) + 2(y - 1) - 3(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 3z = 0.$$

ж) Запишемо рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$, як канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $A_4(0;1;2)$ паралельно нормальному вектору $\vec{n}(1;2;-3)$ площини $A_1A_2A_3$.

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}.$$

Відповідь: а) $|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{3}$; б) $\varphi = 90^\circ$; в) $\psi = 49^\circ$; г) $S = \frac{\sqrt{14}}{2}$ кв.од.;

д) $V = \frac{2}{3}$ куб.од.; е) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$; є) $x+2y-3z=0$; ж) $\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ВАРІАНТ № 1

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n+4}{n+4}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{2n - n^2}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n+1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{5 + x^2})$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1-3x)}{x \arcsin 3x}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x < 0. \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

3. Для функції $y = x^3 - x^2 + 12x + \sin x + 1$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1) $y = (9x^5 + x^2) \cos x$; | 2) $y = \frac{6x^2 + \arcsin x}{\ln x}$; |
| 3) $y = \cos(2x - 4)$; | 4) $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; |
| 5) $y = x^3 \cdot 4^{\cos x}$; | 6) $\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{3t^2}{t+1} \end{cases}$ |
| 7) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$; | 8) $y = x^{x^2}$. |

5. Обчислити наближено $\ln 0,98$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|--|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$. |
|--|--|

7. Обчислити $B^2 - 5A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x - 5y - z = 8 \\ 2x - 3y - 5z = 7 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 5x + 5z = -6 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(5; 1; 0)$, $B(0; 1; 2)$, $C(3; 0; 1)$, $D(2; 2; 2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 2

1. Знайти границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27n - 1}{3n + 1}$;	2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 2n + 4}{n^2 - n + n^3}$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3} \right)^{n-1}$;	4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$;
5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{4}{\sin^2 2x} \right)$;	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 6x)}{x \sin 3x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & 1 < x \leq 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 - 6x^2 - 2x - \cos x + 11$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--|---|
| 1) $y = (4x^3 - 6x^7) \arcsin x$; | 2) $y = \frac{7 \ln x + 5^x}{\sqrt{x}}$; |
| 3) $y = \sin^5 x$; | 4) $y = \ln \operatorname{tg} 5x$; |
| 5) $y = \sqrt[3]{2x+1} \log_5 x$; | 6) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \arcsin t \end{cases}$ |
| 7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} + 1$; | 8) $y = x^{\sin x}$. |

5. Обчислити наближено $\sin 29^\circ$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $BA + 3A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + 4z = -4 \\ 5x - 3y - z = 0 \end{cases}$.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x + 2y + 5z = -2 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ 3x + 3y + 8z = 1 \end{cases}$.

11. Задано точки $A(1;1;1)$, $B(2;2;2)$, $C(3;0;1)$, $D(0;3;5)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;

- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 3

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+9}{n+1}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+1}{5-n^2}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^{n-1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x}-x)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{5x}-1)^2}{x \arcsin 2x}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} 2x+4, & x < -2 \\ x^3+1, & -2 \leq x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$.

3. Для функції $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 7 + \ln x$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = (5x^3 - 2)\arccos x$; | 2) $y = \frac{6 \ln x - \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$; |
| 3) $y = e^{\sqrt[3]{x}}$; | 4) $y = \arccos^5 3x$; |
| 5) $y = e^{2x} \cos 3x$; | 6) $\begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$ |
| 7) $x^2 \sin y + \cos y - \cos x = 2$; | 8) $y = x^{e^{-x}}$. |

5. Обчислити наближено $\ln 1,02$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $A^2 + 4B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ 3x - 3y + 4z = 5 \end{cases}$.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 3x + y - 8z = 0 \\ 4x - 2y - 7z = 4 \end{cases}$.

11. Задано точки $A(1; 0; -2)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -2; 3)$, $D(1; 1; 3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 4

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+4}{2n+1}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - 8n^2 + n - 1}{n^2 - 5n - 2n^3}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-2} \right)^{n-9}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{1 - \cos 2x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} -(x+2)^2, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2. \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 + 5x^2 - x - 3 + \operatorname{tg} x$ знайти:

1) похідну $y'(x)$;

2) диференціал dy ;

3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (5x^2 - 7x) \ln x$;

2) $y = \frac{12x^3 + 4e^x}{\log_2 x}$;

3) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}}$;

4) $y = \arctg^2 \frac{x}{5}$;

5) $y = x^3 \operatorname{tg} 2x$;

6)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$$

7) $e^{y^2} = x^2 - 2y$;

8) $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

5. Обчислити наближено $\sin 31^\circ$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $AB - 3B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 3x + y - 8z = 0 \\ 4x - 5y - 6z = 3 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \\ 4x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(3; -2; 3)$, $B(6; 6; -3)$, $C(5; -8; -5)$, $D(-3; 6; 5)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 5

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{n+18}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - n - 2}{1 + 2n^2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-4} \right)^n$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x + 1} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e^{\arctg 3x} - 1 \right)^2}{1 - \cos 8x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 - 5x^2 + 6x + \sin x - 7$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- 1) $y = (3x^5 - 2x^4) e^x$;
- 2) $y = \frac{\sqrt{x} - \ln x}{3x}$;
- 3) $y = \sqrt[3]{5x^2 + 4}$;
- 4) $y = (20^x + 2)^4$;

$$5) \quad y = \frac{2x}{\ln^2 x};$$

$$7) \quad y^2 - xy = e^y + x + 1;$$

$$6) \quad \begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$8) \quad y = (\ln x)^{\sqrt{x}}.$$

5. Обчислити наближено $\sqrt{64,01}$.

6. Обчислити визначник:

$$1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$2) \quad \begin{vmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити $B^2 - 4A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x - y + 6z = -2 \\ 3x - 2y + z = 9 \\ 5x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 4x + 8y - 2z = 14 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(0;1;2)$, $B(3;1;4)$, $C(7;1;1)$, $D(6;2;3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 6

1. Знайти границі: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{1-2n}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 8n - 5}{1 + n^3}$;

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-3} \right)^{n-7};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9x + 14};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin 4x}{e^{3x} - 1}.$$

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2. \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$.

3. Для функції $y = 4x^3 - x^2 - 6x + \cos x + 3$ знайти:

1) похідну $y'(x)$;

2) диференціал dy ;

3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

$$1) y = (7x^6 + 3x^3) \cdot 8^x;$$

$$2) y = \frac{3 \arcsin x + 5}{x^2};$$

$$3) y = \ln \frac{1}{x};$$

$$4) y = \ln \operatorname{arctg} 2x;$$

$$5) y = x^2 \cdot e^{1-\cos x};$$

$$6) \begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \frac{t}{\ln t} \end{cases}$$

$$7) x \ln y = \cos(xy^2);$$

$$8) y = (\cos x)^{x^2}.$$

5. Обчислити наближено $\cos 92^\circ$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $BA + 2A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 6x - 2y + 7z = 11 \end{cases} .$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ x - 4y - 2z = 1 \\ 2x - 6y - 3z = 6 \end{cases} .$$

11. Задано точки $A(5; 5; 3)$, $B(3; 1; 4)$, $C(7; 1; 1)$, $D(2; 2; 2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 7

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 4n}{2n - 1}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n - 7}{1 - n - n^2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-5} \right)^{\frac{n}{2}}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 4x - 12}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{8x + x^2} - x)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (e^{5x} - 1)}{\operatorname{tg} 4x \cdot \arctg x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ (x+2)^2, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases} .$$

3. Для функції $y = x^3 - 8x^2 + x + \operatorname{ctg} x - 9$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (-5x^2 + 7)\ln x$;

3) $y = 4(1 + 4x)^6$;

5) $y = x^3 \operatorname{arctg}(2x - 5)$;

7) $x \ln y - y \ln x = 8$;

2) $y = \frac{\arccos x + 3}{5x}$;

4) $y = \arcsin^5 6x$;

6) $\begin{cases} x = 2 \cos 2t \\ y = t \cos 2t \end{cases}$

8) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin 2x}$.

5. Обчислити наближено $\sqrt{16,02}$.

6. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $A^2 - 4B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: $\begin{cases} 2x + y + 5z = 2 \\ 3x - y + z = 2 \\ 4x + 2y + 4z = 10 \end{cases}$.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 3z = 9 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$.

11. Задано точки $A(0; 2; 1)$, $B(5; 1; 0)$, $C(5; 5; 3)$, $D(2; 7; 1)$. Знайти:

1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;

2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;

3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;

4) площу трикутника ABC ;

5) об'єм піраміди $ABCD$;

6) рівняння прямої AB ;

7) рівняння площини ABC ;

8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 8

1. Знайти границі:
- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-5}{2-n}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - n + 7}{1 + 3n^3 + 8n}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-3} \right)^{n-5}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{x(x+2)}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4. \\ 6-x, & x > 4 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 2x^3 - 4x^2 + 3x + \log_2 x - 1$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--|--|
| 1) $y = 3^x (2x^4 - 8x)$; | 2) $y = \frac{5\sqrt{x} - 2 \cos x}{\operatorname{arctg} x}$; |
| 3) $y = \sqrt{4x^2 - 2x + 5}$; | 4) $y = e^{1 - \sin 2x}$; |
| 5) $y = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$; | 6) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = t \cos t \end{cases}$ |
| 7) $x^2 + y^2 = 4xy$; | 8) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$. |

5. Обчислити наближено $\cos 62^\circ$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|--|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. |
|--|--|

7. Обчислити $AB + 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 3x - 2y - 7z = 7 \\ 2x - 3y - 5z = 1 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(1; 2; -1)$, $B(5; 5; 11)$, $C(3; 8; 2)$, $D(1; 5; 2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 9

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{n-1}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n - 5}{1 - n^2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-3} \right)^{n+1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 6x)}{x \sin 3x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2 \\ 3-x, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 1 + \sin x$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- 1) $y = (x^2 + 5x) \log_2 x$;
- 2) $y = \frac{5 \cos x}{x - \ln x}$;

3) $y = \arcsin x^2$;

4) $y = \operatorname{arccotg}^3 \frac{1}{x}$;

5) $y = 9^{\sqrt{x} \operatorname{tg} x}$;

6)
$$\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$$

7) $x^2 y^2 + 2 \ln xy = 4$;

8) $y = x^{\arcsin x}$.

5. Обчислити наближено $\sqrt{9,04}$.6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.7. Обчислити $A^2 - 3B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$.9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$
.10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 2x - 3y - 3z = 6 \end{cases}$$
.11. Задано точки $A(-2;1;2)$, $B(3;4;1)$, $C(4;3;2)$, $D(-2;1;2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 10

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+2}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n-2n^3}{n^3-5n^2+1}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{n-2}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-4}{4-x^2} - \frac{1}{x-2}\right)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos^2 3x)\sin 2x}{\arctg x^3}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ x - \pi/4, & x > \pi/4 \end{cases}$

3. Для функції $y = 3x^3 - x^2 + 2x - 5 + e^x$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--|---|
| 1) $y = (3x^2 - x)\sin x$; | 2) $y = \frac{\arctg x - 3x^2}{5 + e^x}$; |
| 3) $y = (x^2 + 5)^3$; | 4) $y = e^{\sqrt[3]{6x+1}}$; |
| 5) $y = e^{-x^2} \operatorname{ctg} x$; | 6) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ |
| 7) $xy + \ln y - 2 \ln x = 0$; | 8) $y = x^{x^{-2}}$. |

5. Обчислити наближено $\cos 58^\circ$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|--|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. |
|--|--|

7. Обчислити $AB - 2A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(7;2;-6)$, $B(-1;3;-2)$, $C(-4;-4;-3)$, $D(7;3;-3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 11

1. Знайти границі: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-2n}{3-n}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 2n - 1}{8 - n^2}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{n-2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$;

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 4} \right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x \sin 2x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 - 3x^2 + 2x + \ln x + 2$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (x^5 - 2x^8) \operatorname{arctg} x;$

2) $y = \frac{8 \sin x - 6x}{\operatorname{tg} x};$

3) $y = \arccos(3 + x^2);$

4) $y = \ln \arcsin 5x;$

5) $y = x^5 \cdot \sqrt{2x + 3};$

6) $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 1 \\ y = \frac{e^t}{t} \end{cases}$

7) $xy = \sin(x + y);$

8) $y = (\ln x)^{x^2}.$

5. Обчислити наближено $\sqrt[4]{80,98}.$

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$

7. Обчислити $A^2 + 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: $\begin{cases} x + 2y + 5z = -2 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}.$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + z = 5 \\ 6x + 3y + 2z = 6 \end{cases}.$

11. Задано точки $A(5; 1; 2), B(1; 2; 3), C(3; 1; 2), D(7; 0; 4).$ Знайти:

- 1) координати і довжини векторів $\overline{AB}, \overline{AC}$ і $\overline{AD};$
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і $\overline{AC};$
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і $\overline{AC};$
- 4) площу трикутника $ABC;$
- 5) об'єм піраміди $ABCD;$
- 6) рівняння прямої $AB;$
- 7) рівняння площини $ABC;$

8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 12

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{5n+1}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3n-4n^3}{4+n^3}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{n+1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-7x+6}{x^2-36}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 10x - \cos 2x}{e^{\sin^2 x} - 1}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2. \\ x-3, & x > 2 \end{cases}$.

3. Для функції $y = 2x^3 + 6x^2 - x + e^x - 3$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = (7x^3 - 5x^4) \operatorname{arccotg} x$; | 2) $y = \frac{2 \log_3 x - 3}{\operatorname{ctg} x}$; |
| 3) $y = \operatorname{tg}^8 x$; | 4) $y = \sqrt{e^{7x-5}}$; |
| 5) $y = x^6 \cdot \sqrt{2x^2 + x}$; | 6) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \frac{\sqrt{t+1}}{t} \end{cases}$ |
| 7) $y \sin x + \cos y = \cos(2x + y)$; | 8) $y = x^{3x+1}$. |

5. Обчислити наближено $\operatorname{ctg} 47^\circ$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|--|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. |
|--|--|

7. Обчислити $AB - 4B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.
9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$
10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x - y + 6z = -2 \\ 3x + 2y + z = 9 \\ 5x + y + 7z = 7 \end{cases}$$
11. Задано точки $A(2; 1; 3)$, $B(0; 5; 4)$, $C(7; 1; 1)$, $D(6; 2; 3)$. Знайти:
- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
 - 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
 - 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
 - 4) площу трикутника ABC ;
 - 5) об'єм піраміди $ABCD$;
 - 6) рівняння прямої AB ;
 - 7) рівняння площини ABC ;
 - 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 13

1. Знайти границі:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{1 - n}$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 3}{n^2 + 2n - 4}$;
 - 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 2}{n - 3} \right)^{n-4}$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8}$;
 - 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + x^2} - x)$;
 - 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \operatorname{tg} 2x)}{\cos 6x - \cos 2x}$.
2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 2x + 1, & x > \pi/4 \end{cases}$$
3. Для функції $y = x^3 - 3x^2 + 8x + 2 + 2^x$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (x^3 - 2)\operatorname{tg} x$;

3) $y = \arccos^5 x$;

5) $y = 2^x \ln \sqrt{x}$;

7) $e^{-x} \sin y - e^y \cos x = 0$;

2) $y = \frac{6^x - 12}{3 \arcsin x - x}$;

4) $y = 3^{\operatorname{arccotg}(\ln x)}$;

6) $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t \\ y = 7 \sin^3 t \end{cases}$

8) $y = (\ln x)^x$.

5. Обчислити наближено $\sqrt[4]{16,04}$.

6. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $B^2 - 3A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: $\begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x + y - 5z = 2 \\ 5x - y - 3z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$.

11. Задано точки $A(4; 3; 10)$, $B(5; 1; 1)$, $C(2; 2; 5)$, $D(4; 1; 5)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;

- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 14

1. Знайти границі:
- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+2}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5n+n^2-n^3}{n-n^2-2n^3}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-4}\right)^{n+1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2-1}\right)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ -x^2/2, & 0 < x \leq 2. \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 + 6x^2 - 2x + \cos x - 4$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--|--|
| 1) $y = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \operatorname{ctg} x$; | 2) $y = \frac{5x + 3 \cos x}{3^x - 7}$; |
| 3) $y = \operatorname{ctg} x^2$; | 4) $y = \cos^9(4x + 1)$; |
| 5) $y = \sqrt{\ln x + 1} \arccos x$; | 6) $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1-t^2}{t} \end{cases}$ |
| 7) $\sin xy = e^{xy}$; | 8) $y = x^{\cos x}$. |

5. Обчислити наближено $\operatorname{tg} 46^\circ$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $BA - 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x + y - 5z = 2 \\ 5x - y - 3z = 8 \\ 2x + 3y - 9z = 9 \end{cases}$$
.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 8 \\ 3x - y + z = 2 \\ 4x + 2y + 4z = 10 \end{cases}$$
.

11. Задано точки $A(1;1;1)$, $B(3;1;7)$, $C(0;2;4)$, $D(2;7;1)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 15

1. Знайти границі: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n + 7}{n - 1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 10n^2}{2n^2 + 3n + 9}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n - 3} \right)^{n-1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9}$;

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3} - 5x);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{9x} - 1}{x \arcsin 3x}.$$

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & 1 < x \leq 2. \\ 4/x, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 2x^3 - 5x^2 + 2x + \ln x - 1$ знайти:

1) похідну $y'(x)$;

2) диференціал dy ;

3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (8x^6 - 3x^5) \cdot \log_6 x$;

2) $y = \frac{\arccos x - 7x}{2x + 3}$;

3) $y = e^{x - \cos x}$;

4) $y = \arctg \sqrt{\sin x}$;

5) $y = x^3 \cos^2 3x$;

6) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$

7) $xe^y + y = 3x + 5$;

8) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

5. Обчислити наближено $\ln 1,04$.

6. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $A^2 + 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + 4y - 2z = 7 \\ 2x - 5y - 2z = 1 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 5x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(0; 2; 4)$, $B(1; 2; 3)$, $C(3; 0; 1)$, $D(2; 7; 1)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 16

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n+1}{5n-9}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 3n}{1 + n^2 - 2n^3}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-4} \right)^{n+1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{\sqrt{1-x}}{x} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\ln(1+x^2)}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} \cos 2x, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 2 \\ (x-2)^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 + 7x^2 - 2x + 3^x - 1$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- 1) $y = (3x^2 + 2x)\sqrt{x}$;
- 2) $y = \frac{1 - 4 \sin x}{\operatorname{arctg} x}$;
- 3) $y = (x^3 - 4x)^{10}$;
- 4) $y = \sqrt{\cos(5x + 7)}$;

5) $y = e^{3x^2} \cos 2x;$

6)
$$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

7) $x^3 + y^2 - 4xy = 2x + 1;$

8) $y = x^{e^x}.$

5. Обчислити наближено $\sin 91^\circ$.

6. Обчислити визначник:

1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

2)
$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити $AB + 3A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 5y - 2z = -3 \\ x - y + z = 1 \\ 4x - 12y - 2z = -4 \end{cases}.$$

11. Задано точки $A(4;2;1), B(2;1;2), C(3;0;1), D(5;1;3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів $\overline{AB}, \overline{AC}$ і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 17

1. Знайти границі:
- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11-n}{n+2}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 5}{6n - n^2}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{n+4} \right)^{n+3}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x})$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + \operatorname{tg} 8x)}{\sin 3x - \sin x}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ (x+2)^2, & -1 < x \leq 2. \\ x+5, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 2x^3 - 7x^2 + x + \cos x - 1$ знайти:
- 1) похідну $y'(x)$;
 - 2) диференціал dy ;
 - 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $y = (7x^5 + 2x^9) \sin x$; | 2) $y = \frac{\sqrt{x} - 4 \sin x}{e^x}$; |
| 3) $y = \frac{3}{\sqrt[4]{1-x^2}}$; | 4) $y = \sqrt{\ln(3x+8)}$; |
| 5) $y = e^{3x^2} \log_4 x$; | 6) $\begin{cases} x = 2 \arcsin t \\ y = t \arccos t \end{cases}$ |
| 7) $y^2 + y = 2x \cos y$; | 8) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. |

5. Обчислити наближено $\sqrt{25,06}$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & -1 & 5 \\ 10 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. |
|---|---|

7. Обчислити $B^2 + 5A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + y - 5z = 6 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y + 6z = 6 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(0; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C(7; 1; 1)$, $D(6; 2; 3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 18

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+3}{2-n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n^2+5n^3}{n^3-9n}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n+1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-9x+20}{x^2-16}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3x^2-x+1}}{x} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}{e^{3x}-e^x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 3 \\ 1+x, & x > 3 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + e^x + 2$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (7x^5 - 12x) \log_5 x$;

2) $y = \frac{4 - 3 \sin x}{\arcsin x}$;

3) $y = \sqrt{1 + \ln x}$;

4) $y = \operatorname{arcctg}^2 \frac{2}{x}$;

5) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{ctg} 2x}$;

6) $\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = \operatorname{arctg}^2 t \end{cases}$

7) $y \ln x - x \ln y = x + y$;

8) $y = (\cos x)^{e^x}$.

5. Обчислити наближено $\cos 122^\circ$.

6. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $BA + 5A$, якщо:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 2x + 3y + 6z = 6 \end{cases}$.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$\begin{cases} x - y - 6z = 2 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$.

11. Задано точки $A(5; 5; 3)$, $B(1; 3; 4)$, $C(7; 1; 1)$, $D(2; 3; 5)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;

8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 19

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n}{3n+7}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n + 5}{18 - n^2}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n-7} \right)^{n+1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 6x)}{e^{3x} - 1}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} x + 2, & x < 1 \\ 4 - x^2, & 1 \leq x \leq 4. \\ \log_4 x, & x > 4 \end{cases}$.

3. Для функції $y = 3x^3 - 4x^2 + 4x + \ln x - 2$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--|--|
| 1) $y = \left(3x^7 - \frac{1}{x} \right) \ln x$; | 2) $y = \frac{\arccos x + 4}{x^3}$; |
| 3) $y = \operatorname{tg}(2x^3 - 4x^2 + 2)$; | 4) $y = \arcsin \lg x^2$; |
| 5) $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \sin x$; | 6) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} x \\ y = \frac{\sqrt{2t-1}}{3} \end{cases}$; |
| 7) $2x - 3 = y + \operatorname{arcctg} y$; | 8) $y = x^{\arccos x}$. |

5. Обчислити наближено $\sqrt{4,06}$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|---|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 7 & -2 \\ 3 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$. |
|---|--|

7. Обчислити $A^2 - 5B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}.$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + y - 5z = 2 \\ 2x + y + 3z = -8 \\ 3x + 2y - 2z = -6 \end{cases}.$$

11. Задано точки $A(0; 1; 2)$, $B(2; 1; 2)$, $C(5; 5; 3)$, $D(2; 7; 1)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 20

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{4-n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9+7n+8n^3}{2n^3-n^2-1}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+3} \right)^{n+2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2-1}{x^3+1} - \frac{1}{x^2-x+1} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x}-3}{x \sin 3x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ x - \pi/4, & x > \pi/4 \end{cases}.$$

3. Для функції $y = x^3 - x^2 + 12x + \cos x + 9$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;

3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (5x^6 + 2x^4) \operatorname{ctg} x$;

2) $y = \frac{7 \log_5 x - 12}{6x}$;

3) $y = \ln \sqrt[3]{x^5}$;

4) $y = \sin(4^{5x})$;

5) $y = (3x^2 - 5) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$;

6)
$$\begin{cases} x = 3^{4t+9} \\ y = \frac{e^t}{t^2} \end{cases}$$

7) $x^6 + y^5 + 3xy = \sin x + 2$;

8) $y = (\arcsin x)^{2x}$.

5. Обчислити наближено $\cos 88^\circ$.

6. Обчислити визначник:

1)
$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити $AB - 4A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + y - 5z = 2 \\ x - 5y + 3z = -8 \\ 3x + 2y - 9z = 9 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 4x + 2y + 4z = 10 \\ 5x + y + 7z = 12 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(0;1;2)$, $B(2;2;2)$, $C(1;0;2)$, $D(2;7;1)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;

7) рівняння площини ABC ;

8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 21

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - 12n}{1 - 4n}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n + 2}{3 - 2n^2}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-3} \right)^{n-4}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 14x + 49}{x^2 + 9x + 14}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{(e^{\operatorname{arctg} 2x} - 1)^2}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 3. \\ 2-x, & x > 3 \end{cases}$

3. Для функції $y = 6x^3 - 6x^2 + x + \ln x + 10$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|--|--|
| 1) $y = (4x^9 + 21x^2)9^x$; | 2) $y = \frac{3 \operatorname{arctg} x - 15}{\ln x}$; |
| 3) $y = \log_5 \sqrt{x}$; | 4) $y = \operatorname{tg}^3 \frac{1}{x}$; |
| 5) $y = \frac{\operatorname{arcsin} x^3}{e^x}$; | 6) $\begin{cases} x = \frac{\sin t}{2} \\ y = 4 \operatorname{tg} t \end{cases}$ |
| 7) $x + y - 5 = e^{x+y}$; | 8) $y = (\operatorname{ctg} x)^{e^x}$. |

5. Обчислити наближено $\sqrt[4]{81,02}$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|---|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. |
|---|--|

7. Обчислити $B^2 - 3A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - y - 4z = 3 \\ 2x + 2y + 5z = 9 \end{cases}$$
.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$$
.

11. Задано точки $A(4; 6; 5)$, $B(6; 4; 9)$, $C(2; 10; 10)$, $D(7; 5; 9)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 22

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{n - 8}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 9n - 18n^3}{2n^3 + 4n^2 + 3}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-5} \right)^{n+4}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 8} - \frac{1}{x^2 - 2x + 4} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 6x)}{x \sin 3x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} |x|, & x \leq 0 \\ (x+2)^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x+3, & x > 1 \end{cases}$$
.

3. Для функції $y = x^3 + 2x^2 + 4x + e^x + 1$ знайти:

1) похідну $y'(x)$;

2) диференціал dy ;

3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (15x^6 - 6x^3) \ln x$;

2) $y = \frac{8x - \operatorname{ctg} x}{4^x}$;

3) $y = \sin(x^2 + 2x - 9)$;

4) $y = 5^{\sqrt{\log_3 x}}$;

5) $y = e^{4x^2} \sin 2x$;

6) $\begin{cases} x = t^3 + 2t - 8 \\ y = \frac{\sin t}{2} \end{cases}$

7) $x^5 + y^3 + 3xy = \sin x + 6$;

8) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

5. Обчислити наближено $\operatorname{tg} 42^\circ$.

6. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 8 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $BA - 3B$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = 4 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 4y + 4z = -15 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(3; 5; 4)$, $B(8; 7; 4)$, $C(5; 10; 4)$, $D(4; 7; 8)$. Знайти:

1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;

2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;

3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;

- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 23

1. Знайти границі:
- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n}{1-3n}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + n - 4}{2n^2 + 5}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3} \right)^{n-1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 25})$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^3 x} - 1}{\ln^3(1 + 2x)}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & 1 < x \leq 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 2x^3 - x^2 + 10x + 4^x + 7$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $y = (12x^4 + 3x) \cdot 5^x$; | 2) $y = \frac{\operatorname{arctg} x - 12x}{e^x}$; |
| 3) $y = \arcsin x^3$; | 4) $y = \sqrt{\cos(2x^2 - 4x)}$; |
| 5) $y = \ln(x^4 \cos 2x)$; | 6) $\begin{cases} x = t^2 + 9t - 2 \\ y = \frac{e^t + \sin t}{2} \end{cases}$ |
| 7) $xy = 2x + 5y + \ln x$; | 8) $y = \sqrt{x}^{\lg x}$. |

5. Обчислити наближено $\sqrt[4]{16,06}$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 10 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $A^2 + 4B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x + 5y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 8 \\ 5x + 3y - z = 1 \end{cases}$$
.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 5y - 4z = 2 \end{cases}$$
.

11. Задано точки $A(7;1;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-2;1;4)$, $D(5;0;6)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 24

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+5}{4n-1}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 4n - 6}{16 - n^2 - n^3}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n-6} \right)^{n+6}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin 6x)}{x \operatorname{tg} 3x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ (x - 1)^2, & 0 < x \leq 2. \\ 5, & x > 2 \end{cases}$

3. Для функції $y = 3x^3 - 4x^2 + 4x + \sin x + 9$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (11x^2 + 8x)\arccos x$;

2) $y = \frac{\ln x + 5x^4}{\sin x}$;

3) $y = \cos^{12} x$;

4) $y = \sqrt{\arccos x^3}$;

5) $y = 2 \frac{\arcsin x}{x}$;

6) $\begin{cases} x = t^2 + 3t + 4 \\ y = \frac{5t - 1}{e^t} \end{cases}$

7) $\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{y^2} - 4 = y$;

8) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

5. Обчислити наближено $\operatorname{ctg} 43^\circ$.

6. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $AB + 4B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: $\begin{cases} x + 3y - 5z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 4x - y + 2z = -4 \end{cases}$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + y - 5z = 6 \\ 3x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$.

11. Задано точки $A(2; 1; 3)$, $B(1; 2; 5)$, $C(3; 1; 4)$, $D(2; 0; 1)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 25

1. Знайти границі:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3n}{2-3n}$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 7n - 2}{n^2 - 2n + 3}$;
 - 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-2} \right)^{n+1}$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$;
 - 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3x + 1})$;
 - 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
- $$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ (2x-1)^2, & 0 < x \leq 2. \\ 3x, & x > 2 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 6x^3 - x^2 + 12x + \sin x + 1$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- 1) $y = (3x^5 + 2)\cos x$;
- 2) $y = \frac{3 - \log_2 x}{\sin x}$;
- 3) $y = \arccos \sqrt{x}$;
- 4) $y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$;
- 5) $y = e^{3x} \cdot \ln \operatorname{tg} x$;
- 6) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1-2t} \\ y = \sqrt[3]{1+5t} \end{cases}$
- 7) $\sin(xy) = 2x + 3y$;
- 8) $y = (\ln x)^{\cos x}$.

5. Обчислити наближено $\sqrt[4]{80,96}$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $B^2 + 3A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x - 5y - 2z = -3 \\ x - y + z = 1 \\ 4x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$$
.

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x - 6y + z = 3 \\ 6x + 5y - 4z = -3 \\ 8x - y - 3z = 0 \end{cases}$$
.

11. Задано точки $A(2; 0; 2)$, $B(1; 3; 4)$, $C(2; 7; 5)$, $D(5; 5; 3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 26

1. Знайти границі:
- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{n+5}$;
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-9-n^3}{1+5n^2-n^3}$;
 - 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n-3} \right)^{n+2}$;
 - 4) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-36}{x^2-10x+24}$;
 - 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{1}{x} \right)$;
 - 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x + \sin 5x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:
$$y = \begin{cases} 2x + 5, & x \leq -2 \\ -\frac{1}{x}, & -2 < x \leq -\frac{1}{2} \\ 2, & x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 - 8x^2 + 9x + \cos x - 4$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = (3x^{12} + 4x^5) \arcsin x$; 2) $y = \frac{8 \operatorname{ctg} x - x^3}{3x + 1}$;

3) $y = \frac{1}{(2 - 9x)^4}$; 4) $y = \ln^3(3x - 4)$;

5) $y = \sqrt{x} \arccos x^2$; 6) $\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = t \operatorname{arctg} t \end{cases}$

7) $\ln x + e^y - 2xy = 2$; 8) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$.

5. Обчислити наближено $\operatorname{tg} 44^\circ$.

6. Обчислити визначник: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Обчислити $BA + 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 6x + 5y - 4z = -3 \\ 8x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + z = 4 \\ 2x + 4y + 4z = 6 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(1;0;2)$, $B(3;1;7)$, $C(0;2;1)$, $D(2;2;2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 27

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 5}{n - 2}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3 - 5n^2}{1 - 3n - n^2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 4}{n + 1} \right)^{n-1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 4x - 5}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x \arcsin 3x}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq 2 \\ (x - 1)^2, & 2 < x \leq 3. \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$$

3. Для функції $y = 5x^3 - 6x^2 + 7x + 2^x + 3$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- 1) $y = (11x^5 - 15x^3)\sqrt[3]{x}$;
- 2) $y = \frac{12^x + 6x^2}{2\operatorname{tg} x}$;
- 3) $y = 10^{\sin x}$;
- 4) $y = \cos(1 + e^{-2x})$;

$$5) \quad y = \arcsin \frac{3x}{x+1};$$

$$6) \quad \begin{cases} x = \cos 4t \\ y = \frac{6 \ln t - 2}{7} \end{cases}$$

$$7) \quad \ln x + 2y = 2xy + 8;$$

$$8) \quad y = \sqrt{x}^{\sin x}.$$

5. Обчислити наближено $\ln 1,06$.

6. Обчислити визначник:

$$1) \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$7. \text{ Обчислити } A^2 - 3B, \text{ якщо: } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$8. \text{ Розв'язати матричне рівняння } A \cdot X = B, \text{ якщо: } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$9. \text{ Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера: } \begin{cases} x - y - 6z = 2 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + 5y + 4z = 4 \end{cases}.$$

$$10. \text{ Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: } \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 2x - 3y - z = -5 \\ 7x - 2y + 6z = 11 \end{cases}.$$

11. Задано точки $A(4; 2; 5)$, $B(0; 7; 2)$, $C(0; 2; 7)$, $D(1; 5; 0)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добутки векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 28

1. Знайти границі:
- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-7n}{n+12}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n^3 + 4n^2 - n - 7}{n^3 - 8}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+9}{n+6} \right)^{n+5}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 49}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{10}{25-x^2} + \frac{1}{x-5} \right)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 6x)}{e^{4x} - e^{2x}}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію:
- $$y = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 1. \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 + 6x^2 - 2x + \ln x + 4$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = 6e^x(8x^7 - 9x^6)$; | 2) $y = \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sqrt{x}}$; |
| 3) $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$; | 4) $y = \arcsin^4(6x + 5)$; |
| 5) $y = 4^{\operatorname{ctg} x} \ln x$; | 6) $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = t \sin t \end{cases}$ |
| 7) $x^2 - y^4 - 2xy = 2y + 7$; | 8) $y = (2x + 1)^{x^2}$. |

5. Обчислити наближено $\sin 92^\circ$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|--|--|
| 1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & 6 \\ -4 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. |
|--|--|

7. Обчислити $AB - 2B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y - z = -5 \\ 7x - 2y + 6z = 11 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - y - 4z = 3 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(4; 4; 10)$, $B(4; 10; 2)$, $C(2; 8; 4)$, $D(9; 6; 4)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 29

1. Знайти границі:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-6n}{2n+6}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 8n + 2}{4 - n^2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{n+2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 5}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}$.

2. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ 4-x, & x > 3 \end{cases}$$

3. Для функції $y = x^3 + 9x^2 + 2x + \ln x - 7$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

$$1) \quad y = (4x^2 - x)\sqrt{x};$$

$$2) \quad y = \frac{2 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$3) \quad y = (x^3 - 3x)^4;$$

$$4) \quad y = e^{\sqrt{\cos x}};$$

$$5) \quad y = e^x \sin x^2;$$

$$6) \quad \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

$$7) \quad x^2 + y^4 - 5xy = 2x + y;$$

$$8) \quad y = x^{\log_2 x}.$$

5. Обчислити наближено $\ln 0,96$.

6. Обчислити визначник:

$$1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити $B^2 - 6A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 4x + 2y + 4z = 10 \\ 5x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 4y + 3z = 9 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(5; 1; 0)$, $B(1; 2; 3)$, $C(3; 0; 1)$, $D(2; 2; 2)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

ВАРІАНТ № 30

1. Знайти границі:
- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-8}{2-3n}$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^3 - 9}{2n^3 + 3n^2 + 4n}$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-3} \right)^{n-1}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{x+4} + \frac{8}{x^2 - 16} \right)$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + \sin x)}{1 - \cos 2x}$. |

2. Дослідити на неперервність функцію: $y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 9. \\ x-7, & x > 9 \end{cases}$.

3. Для функції $y = x^3 - 6x^2 - x + e^x - 1$ знайти:

- 1) похідну $y'(x)$;
- 2) диференціал dy ;
- 3) похідну другого порядку $y''(x)$.

4. Знайти похідні заданих функцій:

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $y = (5x^2 - 11x) \ln x$; | 2) $y = \frac{\cos x - 4 \sin x}{2^x}$; |
| 3) $y = \sqrt[5]{2x+8}$; | 4) $y = \ln \ln(3 - 2x^3)$; |
| 5) $y = e^{5x^2} \sin x$; | 6) $\begin{cases} x = \sin 5t \\ y = t \cos t \end{cases}$ |
| 7) $3 \cos(x+y) = 8$; | 8) $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2}$. |

5. Обчислити наближено $\sin 89^\circ$.

6. Обчислити визначник:
- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; | 2) $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. |
|---|---|

7. Обчислити $BA - 2A$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $X \cdot A = B$, якщо: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 9 \\ 5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

11. Задано точки $A(2; 7; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 1)$, $D(4; 2; 3)$. Знайти:

- 1) координати і довжини векторів \overline{AB} , \overline{AC} і \overline{AD} ;
- 2) скалярний і векторний добуток векторів \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 3) кут, утворений векторами \overline{AB} і \overline{AC} ;
- 4) площу трикутника ABC ;
- 5) об'єм піраміди $ABCD$;
- 6) рівняння прямої AB ;
- 7) рівняння площини ABC ;
- 8) рівняння висоти DH , опущеної з точки D на площину ABC .

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКИ»

1. Комплексні числа. Модуль та аргумент. Алгебраїчна та тригонометрична форми комплексного числа.
2. Числова послідовність. Границя послідовності. Означення та властивості.
3. Границя функції. Означення границі функції. Односторонні границі.
4. Поняття невизначеності. Розкриття невизначеностей.
5. Використання еквівалентних нескінченно малих для обчислення границь. Визначні границі.
6. Неперервність функції. Точки розриву функції та їх класифікація.
7. Похідна функції. Правила диференціювання. Таблиця похідних.
8. Диференціювання складених, обернених та заданих неявно і параметрично функцій. Логарифмічна похідна.
9. Похідні вищих порядків.
10. Диференціал функції та його застосування.
11. Поняття матриці. Види матриць. Дії з матрицями.
12. Визначники II і III порядків та їх властивості. Методи обчислення.
13. Мінори. Алгебраїчні доповнення. Розклад визначників за елементами рядків або стовпців.
14. Визначники n -го порядку. Методи обчислення визначників n -го порядку.
15. Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
16. Поняття оберненої матриці та її знаходження.
17. Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
18. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
19. Поняття вектора. Модуль вектора. Координати вектора. Проекція вектора на вісь.
20. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базис. Розклад вектора за базисом.
21. Власні числа та власні вектори матриці.
22. Лінійні дії з векторами: сума, різниця, добуток вектора на число.
23. Скалярний, векторний, мішаний добуток векторів та їх застосування.
24. Пряма лінія на площині. Різні види рівняння прямої.
25. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
26. Лінії другого порядку. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.
27. Площина у просторі. Різні види рівняння площини у просторі.
28. Пряма у просторі. Різні види рівняння прямої у просторі.

ДОДАТОК

Список еквівалентних нескінченно малих функцій

Часто для спрощення знаходження границі функції використовують заміну деяких нескінченно малих функцій на еквівалентні:

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \rightarrow 0,$$

$$\arcsin x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$\log_a(1+x) \sim x/\ln a, \quad x \rightarrow 0,$$

$$1 - \cos x \sim x^2/2, \quad x \rightarrow 0,$$

$$(1+x)^k - 1 \sim kx, \quad x \rightarrow 0.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	a^x	$a^x \ln a$
6	e^x	e^x
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
9	$\sin x$	$\cos x$
10	$\cos x$	$-\sin x$
11	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.
2. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 334 с.
3. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 335 с.
4. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав та ін. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / За ред. В.П.Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – с.480.
6. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 623 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1975.– с. 416.
8. Данко П.Е, Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах ч.1, ч.2. – Москва: Высшая школа, 1986.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972. – с.256.

Навчально-методичне видання

**КРИЖАНОВСЬКА ТЕТЯНА ВАСИЛІВНА
КІЛЬЧИНСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСАНДРОВИЧ**

ВИЩА МАТЕМАТИКА.

**Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 1
для студентів денної прискореної форми навчання
за напрямками підготовки
6.070105 «Рухомий склад залізниць»,
6.050701 «Залізничні споруди і колійне господарство»,
6.050702 «Електромеханіка»**

Відповідальна за випуск – Крижановська Т.В.
Редакція авторська

Підписано до друку 14.11.15. Формат 60×84/16. Папір – офсетний. Спосіб друку
– ризографія. Замовлення № 119/15. Наклад 40 примірників.

Надруковано в Редакційно-видавничому центрі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію: Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р.
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19