МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний економіко-технологічний університет транспорту

Кафедра вищої математики

М. М. Крюков

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №4

Для студентів денної форми навчання за напрямами підготовки:
6.070105 Залізничні споруди та колійне господарство;
6.070105 Рухомий склад та спеціальна техніка вагонів;
6.050702 Електромеханіка

Київ 2014

УДК 51:517

Крюков М. М.

Вища математика: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №4 для студентів денної форми навчання за напрямами підготовки: 6.070105 Залізничні споруди та колійне господарство; 6.070105 Рухомий склад та спеціальна техніка вагонів; 6.050702 Електромеханіка. – К.: ДЕТУТ, 2014. – 68 с.

У методичних вказівках розроблено варіанти розрахункових робіт з вищої математики і методичні рекомендації щодо їх виконання. Робота призначена для самостійного опрацювання студентами програмного матеріалу за тематикою четвертого семестру: чисельні методи, теорія ймовірності, математична статистика.

Самостійна робота з варіантами потрібна для засвоєння всіх зазначених тем на належному рівні. Передбачено використання системи комп’ютерної математики MATHEMATICA 6.0.

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики (протокол №8 від 22 березня 2013 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки і менеджменту (протокол № 5 від18 квітня 2013 р.).

Призначені для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.070105 Залізничні споруди та колійне господарство; 6.070105 Рухомий склад та спеціальна техніка вагонів; 6.050702 Електромеханіка.

Укладач: **Крюков М. М.,** професор, доктор технічних наук

Рецензенти: **Чепілко М. М.,** професор, д. ф.-м. н.,
Михайленко В. М., професор, д. т. н.

ЗМІСТ

	Передмова та загальні методичні поради………………… …	4
1.	Питання з дисципліни «Вища математика» (2 курс, IV семестр)…	5
2.	Типові задачі та приклади їх розв’язування……………………………	6
	Задача 1…………………………………………………… …	6
	Задача 2…………………………………………………… ……	16
	Задача 3……………………………………………………… …	18
	Задача 4………………………………………………………… …	21
	Задача 5……………………………………………………… …	26
	Задача 6……………………………………………………… …	30
3.	Варіанти розрахункових робіт №№1 – 30………………… …	40
4.	*Список літератури*………………………………………………....	67

Передмова та загальні методичні поради

Методичні вказівки складено для поглиблення засвоєння, розвинення навичок самостійної роботи та контролю знань студентів по розділах вищої математики, що вивчаються у 4 семестрі II курсу за напрямом підготовки 6.070105 Залізничні споруди та колійне господарство; 6.070105 Рухомий склад та спеціальна техніка вагонів; 6.050702 Електромеханіка. З цією метою розроблено тематику і викладено відповідну методику розв'язування типових задач по всіх варіантах розрахункової роботи. Послідовність розв'язування типових задач співпадає з послідовністю вивчення тем у навчальному курсі і послідовністю задач у варіантах розрахункової роботи.

При виконанні розрахункової роботи студент повинен дотримуватись таких вимог:

1) Номер варіанта індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
2) Розрахункова робота виконується на аркушах паперу у форматі А4;
3) Перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписується її умова і всі конкретні дані до відповідного варіанта;
4) Розв'язування кожної задачі повинно супроводжуватись необхідними поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

1) Ознайомитись з наведеним переліком питань з дисципліни «Вища математика» і опанувати відповідний теоретичний матеріал з допомогою конспекту лекцій та рекомендованої літератури;
2) Ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до індивідуальних завдань;
3) Роботу над варіантами виконувати поетапно протягом всього семестру (у міру проходження відповідних тем лекційних та практичних занять);
4) Із завершенням кожного з етапів відповідна частина роботи (що оформлена належним чином) подається на перевірку викладачу;
5) Повністю завершену роботу треба здати на перевірку викладачеві не пізніше, ніж за два тижні до кінця семестру;
6) Студенти, які не виконали індивідуальних завдань і не здали роботу вчасно, не допускаються до іспиту з дисципліни як такі, що не виконали навчальний план.

1. ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА» (2 курс, IV семестр)

Чисельні методи

Похибки, їх класифікація. Похибки функції. Відокремлення коренів алгебраїчних рівнянь. Метод хорд. Метод дотичних. Метод послідовних наближень. Метод Гаусса розв'язування СЛАР. Метод простої ітерації розв'язування СЛАР. Метод Гаусса-Зейделя розв'язування СЛАР. Задача інтерполяції функції. Інтерполяційна формула Лагранжа. Інтерполяційна формула Ньютона. Задача наближення функцій. Метод найменших квадратів. Постановка задачі чисельного диференціювання. Постановка задачі чисельного інтегрування. Формула прямокутників. Формула трапецій. Формула Сімпсона. Метод послідовних наближень розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння. Метод степеневих рядів розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння. Звичайний Метод Ейлера розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння. Метод Рунге-Кутта розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння. Принцип Рунге. Різницевий метод Адамса розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння. Метод зведення крайової задачі до задачі Коші.

Звичайний різницевий метод розв'язування крайової задачі для звичайних диференціальних рівняннь. Метод малого параметра розв'язування крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Простір елементарних подій. Аксіоми теорії ймовірностей. Теореми теорії ймовірностей. Статистична ймовірність події. Умовна ймовірність. Незалежні події. Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Формула Бернуллі. Локальна теорема Лапласа. Інтегральна теорема Лапласа. Дискретна випадкова величина. Закон розподілу. Інтегральна функція ДВВ.

Ймовірність попадання ДВВ в заданий інтервал. Неперервна випадкова величина. Інтегральна функція НВВ. Диференціальна функція НВВ. Ймовірність попадання НВВ в заданий інтервал. Математичне сподівання ВВ.

Дисперсія ВВ. Мода, медіана ВВ. Деякі стандартні розподіли ДВВ і їх числові характеристики. Нормальний розподіл НВВ і його параметри. Показниковий розподіл НВВ і його параметри. Рівномірний розподіл НВВ і його параметри.

Закон великих чисел. Генеральна сукупність. Вибірка. Статистичний ряд. Групування даних. Точкові оцінки параметрів ознаки ξ генеральної сукупності. Інтервальне оцінювання: довірча ймовірність, довірчий інтервал.

Статистичні гіпотези. Перевірка статистичних гіпотез. Критерії згоди Пірсона. Елементи однофакторного дисперсійного аналізу. Елементи теорії кореляції. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії.

2. ТИПОВІ ЗАДАЧІ ТА ПРИКЛАДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь.

Крок 1. Знаходження верхньої і нижньої меж дійсних коренів

Нехай маємо рівняння

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (a_0 > 0). \tag{1.1}$$

Неважко впевнитись, що при $|x| > K = 1 + \dfrac{A}{a_0}$, де A – найбільше з чисел $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$, старший член рівняння (1.1) по абсолютній величині перевищує суму решти членів. Отже, всі дійсні корені, якщо вони існують, знаходяться в інтервалі $(-K, K)$. Тому формула

$$K = 1 + \frac{A}{a_0} \tag{1.2}$$

дає грубі значення меж дійсних коренів.

Для додатних коренів можна одержати більш точну верхню межу за формулою Маклорена:

$$K_1 = 1 + \sqrt[m]{\frac{M}{a_0}}, \tag{1.3}$$

де M – найбільший з модулів від'ємних коефіцієнтів рівняння, m – номер індексу першого від'ємного коефіцієнта.

Формула (1.3) дає тільки верхню межу додатних коренів. Але за допомогою цієї формули можемо одержати і нижню межу від'ємних коренів. Для цього достатньо в рівнянні (1.1) зробити заміну $x = -z$ і визначити верхню межу $K_1^{'}$ додатних коренів перетвореного рівняння. Очевидно, що $-\ K_1^{'}$ і буде нижньою межею від'ємних коренів вихідного рівняння (1.1).

Крок 2. Відокремлення коренів

Після визначення меж коренів виникає задача відокремлення коренів. Для цього корисна перша теорема Больцано – Коші:

Якщо неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, тобто $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, то цей відрізок містить принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Розглянемо один з досконалих, але громіздких способів відокремлення коренів – спосіб Штурма. За допомогою цього способу можна визначити кількість дійсних коренів рівняння в будь-якому інтервалі (a, b). Шляхом дроблення інтервалу (a, b) можна, в решті-решт, прийти до таких інтервалів, в межах кожного з яких знаходиться лише один корінь. Цим самим задача відокремлення коренів буде розв'язана. Оскільки кратні корені рівняння завжди можуть бути виділені як спільні корені рівнянь $f(x)=0$ і $f'(x)=0$, будемо вважати, що дане нам рівняння (1.1) має тільки прості корені.

Метод Штурма полягає в такому:

Складаємо допоміжну систему функцій:

$$f(x),\quad f'(x),\quad R_1(x),\quad R_2(x),\ ...,\ R_{m-1}(x),\ R_m(x), \tag{1.4}$$

де $R_1(x)$ – залишок від ділення $f(x)$ на $f'(x)$, взятий з протилежним знаком; $R_2(x)$ – залишок від ділення $f'(x)$ на $R_1(x)$, взятий з протилежним знаком і т.д. доти, доки не дійдемо до $R_m(x)=const$. Ця система, а також будь-яка інша, одержана з даної шляхом множення функцій, що в неї входять, на сталі додатні числа є однією з так званих систем Штурма.

Обчислимо значення функції (1.4) для двох чисел a і b:

$$f(a),\quad f'(a),\quad R_1(a),\quad R_2(a),\ ...,\ R_{m-1}(a),\ R_m \tag{1.4'}$$

$$f(b),\quad f'(b),\quad R_1(b),\quad R_2(b),\ ...,\ R_{m-1}(b),\ R_m. \tag{1.4''}$$

і позначимо число змін знаку в рядку чисел (1.4') через $W(a)$, а в рядку (1.4'') через $W(b)$.

Теорема Штурма. Якщо дійсні числа a і b, $a<b$, не є коренями многочлена $f(x)$, то $W(a)\geq W(b)$ і різниця $W(a)-W(b)$ дорівнює числу дійсних коренів многочлена $f(x)$, що містяться між a і b.

Ця теорема дає можливість повністю розв’язати питання про відокремлення коренів рівняння.

Крок 3. Знаходження наближеного значення кореня

3.1. Метод хорд. Цей метод корисний для наближеного обчислення коренів не тільки алгебраїчних, але й трансцедентних рівнянь:

$$f(x)=0. \tag{1.5}$$

Нехай корінь рівняння X знаходиться між близькими числами $\underline{x_0}$ і $\overline{x_0}$ (рис. 1.1)

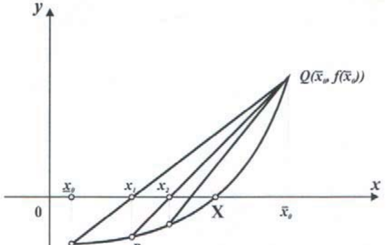


Рис. 1.1

Замінимо відрізок кривої $y=f(x)$ з початком в точці P і кінцем в точці Q хордою PQ. Визначивши точку перетину цієї хорди з віссю Ox, одержимо перше наближення x_1 кореня X. Встановимо який знак має функція $y=f(x)$ в

точці x_1 і визначимо де знаходиться корінь. Введемо нове позначення ($\underline{x}_1$, $\overline{x}_1$) для одержаного інтервалу і аналогічно побудуємо в ньому хорду дуги кривої $y = f(x)$. Абсциса x_2 точки перетину цієї хорди із віссю Ox дасть друге наближення x_2 кореня X. Знаходимо новий інтервал ($\underline{x}_2$, $\overline{x}_2$), що містить корінь, аналогічно одержуємо третє наближення і т.д.
Послідовність наближень знаходимо за формулами:

$$x_{k+1} = \underline{x}_k + \left[-\frac{(\overline{x}_k - \underline{x}_k) f(\underline{x}_k)}{f(\overline{x}_k) - f(\underline{x}_k)} \right], \qquad (1.6)$$

або

$$x_{k+1} = \overline{x}_k + \left[-\frac{(\underline{x}_k - \overline{x}_k) f(\overline{x}_k)}{f(\underline{x}_k) - f(\overline{x}_k)} \right]. \qquad (1.6')$$

3.2. Метод дотичних

У своїй основі метод дотичних був запроваджений Ньютоном і тому його часто називають *методом Ньютона.* Використовується також назва *метод Ньютона-Рафсона.*

Нехай при відокремленні кореня рівняння $f(x) = 0$ ми прийшли до інтервалу ($\underline{x}_0$, $\overline{x}_0$) (рис. 1.2).

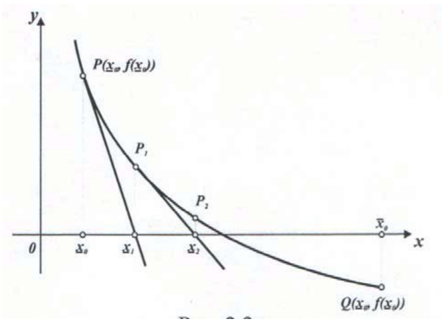


Рис. 1.2

Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $P(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ до перетину з віссю Ox. Абсцису x_1 точки перетину можна взяти як перше наближення кореня X. Потім проведемо дотичну через нову точку $P_1(\underline{x}_1, f(\underline{x}_1))$, знайдемо точку перетину з віссю Ox і приймемо це значення за друге наближення x_2 кореня X і т. д. Послідовність наближення знаходимо за формулою:

$$\underline{x}_k = \underline{x}_{k-1} + \left[-\frac{f(\underline{x}_{k-1})}{f'(\underline{x}_{k-1})} \right] \quad (k = 2,3,...). \qquad (1.7')$$

Аналогічні формули можна одержати, відштовхуючись від правої межі інтервалу $\overline{x}_0$, а саме:

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} + \left[-\frac{f(\bar{x}_{k-1})}{f'(\bar{x}_{k-1})} \right] \quad (k = 1, 2, ...). \qquad (1.7'')$$

Отже, k-те наближення по методу Ньютона можна одержати за формулою:

$$x_k = x_{k-1} + \left[-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \right] \quad (k = 1, 2, 3, ...). \qquad (1.8)$$

При використанні методу Ньютона слід керуватися таким *правилом*: за початкову точку x_0 вибирається той кінець інтервалу $(\underline{x}_0, \bar{x}_0)$, якому відповідає ордината $f(x)$ того ж знака, що й знак $f''(x)$, тобто:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \qquad (1.9)$$

3.3. Метод послідовних наближень

Нехай якимось способом отримано наближене значення x_0 кореня X рівняння $f(x) = 0$. Це наближене значення можна уточнити за так званим *методом послідовних наближень* або *методом простої ітерації.*

Представимо рівняння $f(x) = 0$ в формі:

$$x = \varphi(x), \qquad (1.10)$$

що завжди можна зробити і, притому, багатьма способами, наприклад,

$$x = x + cf(x), \qquad (1.11)$$

де c – деяка стала. Нехай число x_1 являє собою результат підстановки x_0 в праву частину рівності (1.11)

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Далі $x_2 = \varphi(x_1)$ і, взагалі, нехай x_n одержується з x_{n-1} за формулою:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \qquad (1.12)$$

Цей процес послідовного обчислення чисел x_n $(n = 1, 2, ...)$ за формулою (1.12) називається методом послідовних наближень або методом простої ітерації.

Теорема. Якщо в інтервалі, що містить корінь X рівняння (1.10), а також його послідовні наближення $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, що обчислюються за допомогою методу ітерацій, виконується умова:

$$|\varphi'(x)| \le m < 1,$$

то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = X$, тобто ітераційний процес збігається.

Приклад 1. *Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння*

$$0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27 = 0$$

і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь.

Розв'язання

Крок 1. Знаходимо верхню та нижню межі дійсних коренів.

В нашому рівнянні $a_0 = 0{,}9$; $a_1 = -6$; $a_2 = 10$; $a_3 = 2$; $a_4 = -27$. Тоді $A = 27$ і $K = 1 + \dfrac{27}{0{,}9} \approx 31$. Отже, всі корені лежать в проміжку $(-27;\ 27)$.

Уточнимо верхню межу за допомогою формули Маклорена $K_1 = 1 + \sqrt[m]{\dfrac{M}{a_0}}$.
Маємо $a_0 = 0{,}9$; $M = 27$; $m = 1$ (номер індексу першого від'ємного коефіцієнта). Тоді $K_1 = 1 + \sqrt[1]{\dfrac{27}{0{,}9}} \approx 31$.

Для знаходження нижньої межі коренів зробимо заміну змінної: $x = -z$. Отримаємо $f(-z) = 0{,}9z^4 + 6z^3 + 10z^2 - 2z - 27 = 0$.

Тут $a_0 = 0{,}9$; $a_1 = 6$; $a_2 = 10$; $a_3 = -2$; $a_4 = -27$. Тоді $M = 27$; $m = 3$ (номер індексу першого від'ємного коефіцієнта). Маємо $K_1^{'} = 1 + \sqrt[3]{\dfrac{27}{0{,}9}} \approx 3{,}1$. Отже, уточнені межі області, де лежать корені такі $(-3{,}1;\ 31)$.

Оскільки область велика, спробуємо її зменшити.

Перепишемо вихідне рівняння у вигляді:

$$\left(0{,}9x^4 - 6x^3\right) + \left[\left(10x^2 + 2x\right) - 27\right] = 0.$$

Видно, що при $x > 7$ $\left(0{,}9x^4 - 6x^3\right) > 0$ і $\left(10x^2 + 2x\right) > 27$. Тобто при $x > 7$ ліва частина рівняння завжди додатна, а отже, правіше $x = 7$ немає дійсних коренів. Тоді за верхню межу можна взяти 7.

Перепишемо рівняння $f(-z) = 0$ у вигляді:

$$\left(0{,}9z^4 + 6z^3 + 10z^2\right) - (27 + 2z) = 0.$$

Видно, що при $z > 2$ перша дужка більше другої дужки. Отже, за нижню межу можна взяти -2.

Тоді інтервал, де лежать дійсні корені, має вигляд: $(-2;\ 7)$.

Крок 2. Відокремлюємо корені.

Будуємо допоміжну систему функцій (систему Штурма):

$$f(x) = 0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27$$

$$f'(x) = 3{,}6x^3 - 18x^2 + 20x + 2$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27}{3{,}6x^3 - 18x^2 + 20x + 2} = 0{,}25x - 0{,}4167 + \frac{-0{,}6944x^2 + 2{,}7315x - 7{,}2686}{(x - 3{,}2225)(x - 1{,}8697)(x + 0{,}0922)}$$

Отже, $R_1(x) = 0{,}6944x^2 - 2{,}7315 + 7{,}2686$

$$\frac{f'(x)}{R_1(x)} = \frac{3{,}6x^3 - 18x^2 + 20x + 2}{0{,}6944x^2 - 2{,}7315x + 7{,}2686} = 5{,}184x - 5{,}5296 + \frac{-47{,}209x + 60{,}7565}{x^2 - 3{,}9333x + 10{,}4667}$$

Отже, $R_2(x)=47{,}209x-60{,}7565$;

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)}=\frac{0{,}6944x^2-2{,}7315x+7{,}2686}{-47{,}209x+60{,}7565}=0{,}01471x-0{,}03893+\frac{0{,}1039}{x-1{,}2870}.$$

Отже, $R_3(x)=-0{,}1039$.

Таким чином, система Штурма має вигляд:

$f(x)=0{,}9x^4-6x^3+10x^2+2x-27$; $f'(x)=3{,}6x^3-18x^2+20x+2$;

$R_1(x)=0{,}6944x^2-2{,}7315+7{,}2686$; $R_2(x)=47{,}209x-60{,}7565$; $R_3(x)=-0{,}1039$.

Для перевірки отриманої системи використаємо систему комп'ютерної математики MATHEMATICA 6.0 (у подальшому СКМ MATHEMATICA). Застосуємо функції **Apart[P]** (розкласти P на суму простих дробів з виділення цілої частини) та **Together[P]** (привести до спільного знаменника і скоротити спільні множники в чисельнику і знаменнику) для знаходження залишків від ділення полінома на поліном.

Apart[(.9 x^4-6 x^3+10 x^2+2 x-27)/(3.6 x^3-18 x^2+20 x+2)]

-0.416667-1.26615/(-3.22253+x)+1.72904/(-1.86968+x)+0.25 x-1.15733/(0.092207 +x)

Together[-(1.266147/(-3.222528+x))+1.729035/(-1.869678+x)-1.157332/(0.092206 +x)]
(-7.26852+2.73148 x-0.694444 x^2)/((-3.22253+x) (-1.86968+x) (0.092207 +x))

Apart[(3.6 x^3-18 x^2+20 x+2)/(7.268518-2.731481x+0.694444 x^2)]
-5.5296+5.184 x+(60.7565 -47.209 x)/(10.4667 -3.93333 x+1. x^2)

Apart[(7.268518-2.731481 x+0.694444 x^2)/(-60.756480+47.208959 x)]
-0.0389281+0.01471 x+0.103866/(-1.28697+1. x)

Застосуємо функцію **PolynomialRemainder[P, Q, x]** (залишок від ділення полінома **P** на поліном **Q)** для знаходження залишків від ділення полінома на поліном.

PolynomialRemainder[(.9 x^4-6 x^3+10 x^2+2 x-27),(3.6 x^3-18 x^2+20 x+2),x]
-26.1667+9.83333 x-2.5 x^2

PolynomialRemainder[(3.6 x^3-18 x^2+20 x+2),26.16666-9.83333 x+2.5 x^2,x]
42.192 -32.784 x

PolynomialRemainder[26.16666-9.83333 x+2.5 x^2,-42.19199 +32.784 x,x]
17.6522

Складаємо табл. 1.1 (таблицю знаків значень функцій системи Штурма при $x=-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\;7$).

Використаємо функцію **Table** для перевірки результатів обчислення значень функцій Штурма у вибраних точках.

Table[.9 x^4-6 x^3+10 x^2+2 x-27,{x,-2,7,1}]

Table[3.6 x^3-18 x^2+20 x+2 ,{x,-2,7,1}]

Table[7.26852-2.73148 x+0.69444 x^2 ,{x,-2,7,1}]

Table[-60.756480 +47.208960 x   ,{x,-2,7,1}]
{71.4,-12.1,-27,-20.1,-16.6,-20.1,-12.6,45.5,215.4,579.9}
{-138.8,-39.6,2,7.6,-1.2,-2.8,24.4,102.,251.6,494.8}
{15.5093,10.6944,7.26852,5.23148,4.58333,5.32407,7.4537,10.9722,15.8796,22.1759}
{-155.174,-107.965,-60.7565,-13.5475,33.6614,80.8704,128.079,175.288,222.497,269.706}

Table[.9 x^4-6 x^3+10 x^2+2 x-27,{x,-2,7,1}]
{71.4,-12.1,-27,-20.1,-16.6,-20.1,-12.6,45.5,215.4,579.9}

Table[3.6 x^3-18 x^2+20 x+2 ,{x,-2,7,1}]

Table[26.166666-9.833333 x+2.5 x^2 ,{x,-2,7,1}]

Table[-42.191999 +32.784 x ,{x,-2,7,1}]
{-138.8,-39.6,2,7.6,-1.2,-2.8,24.4,102.,251.6,494.8}
{55.8333,38.5,26.1667,18.8333,16.5,19.1667,26.8333,39.5,57.1667,79.8333}
{-107.76,-74.976,-42.192,-9.408,23.376,56.16,88.944,121.728,154.512,187.296}

Таблиця 1.1

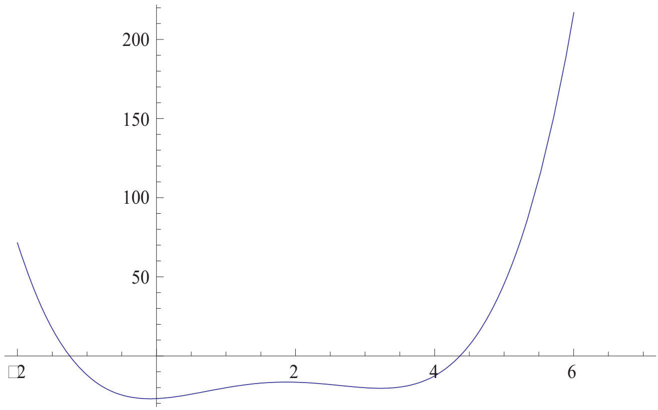
x	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	$R_3(x)$	$W(x)$
–2	+	–	+	–	–	3
–1	–	–	+	–	–	2
0	–	+	+	–	–	2
1	–	+	+	–	–	2
2	–	–	+	+	–	2
3	–	–	+	+	–	2
4	–	+	+	+	–	2
5	+	+	+	+	–	1
6	+	+	+	+	–	1
7	+	+	+	+	–	1

З неї видно, що на проміжку $[-2;7]$ знаходиться два дійсних кореня $((W(-2)-W(7))=3-1=2)$.

Зокрема, на відрізку $[-2;\ -1]$ = один корінь $((W(-2)-W(-1))=3-2=1)$ і на відрізку $[4;\ 5]$ – один корінь $(W4-W(5))=2-1=1$. Два інші корені комплексні.

Таким чином, найменший корінь лежить на відрізку $[-2;\ -1]$.
Використаємо функцію **Plot** для побудови графіка функції

Plot[0.9 x^4-6 x^3+10 x^2+2 x-27==0,{x,-2,7}]



Знайдемо корені нашого рівняння за допомогою функції **Plot.**

NSolve[.9 x^4-6 x^3+10 x^2+2 x-27==0,x]
{{x→-1.24929},{x→1.77527 -1.53273 i},{x→1.77527 +1.53273 i},{x→4.36541}}

Крок 3. Знаходження наближеного значення кореня.

3.1. Метод хорд
Використовуємо обчислювальну схему (1.6):

$$x_{k+1} = \underline{x}_k + \left[-\frac{(\overline{x}_k - \underline{x}_k) f(\underline{x}_k)}{f(\overline{x}_k) - f(\underline{x}_k)} \right], \text{ де } f(x) = 0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27 .$$

Покладаємо $k=0$ і приймаємо $\underline{x}_0 = -2;\ \overline{x}_0 = -1$.
Тоді $f(-2) = 71{,}4 > 0$; $f(-1) = -12{,}1 < 0$ і маємо:

$$x_1 = -2 + \left[-\frac{(-1+2) f(-2)}{f(-1) - f(-2)} \right] = -2 - \frac{61{,}047}{-77{,}026} = -1{,}207 .$$

Обчислюємо $f(-1{,}207) = -2{,}385 < 0$.
Покладаємо $k=1$ і приймаємо $\underline{x}_1 = -2;\ \overline{x}_1 = -1{,}207$.

$$x_2 = -2 + \left[\frac{-(-1{,}207+2) f(-2)}{f(-1{,}207) - f(-2)} \right] = -2 - \frac{56{,}62}{-73{,}785} = -1{,}233 .$$

Обчислюємо $f(-1{,}207) = -2{,}385$.

Покладаємо $k = 2$ і приймаємо $\underline{x}_2 = -2;\ \overline{x}_2 = -1{,}233$.

$$x_3 = -2 + \left[\frac{-(-1{,}233+2)f(-2)}{f(-1{,}233) - f(-2)}\right] = -2 - \frac{54{,}764}{-72{,}336} = -1{,}243.$$

Обчислюємо $f(-1{,}243) = -0{,}364$.

Покладаємо $k = 3$ і приймаємо $\underline{x}_3 = -2;\ \overline{x}_3 = -1{,}243$.

$$x_4 = -2 + \left[-\frac{(-1{,}243+2)f(-2)}{f(-1{,}243) - f(-2)}\right] = -2 - \frac{54{,}05}{-71{,}764} = -1{,}247; \quad .$$

При $k = 4$ маємо ;

$$x_5 = -2 + \left[-\frac{(-1{,}247+2)f(-2)}{f(-1{,}247) - f(-2)}\right] = -2 - \frac{53{,}764}{-71{,}533} = -1{,}248.$$

3.2. Метод дотичних

Визначимо, який кінець візьмемо за початкову точку x_0 (умова (1.9)).

Для перевірки цієї умови знаходимо другу похідну і обчислюємо значення функції і другої похідної на кінцях відрізка $[-2;\ -1]$.

Знаходимо $f'(x) = 3{,}6x^3 - 18x^2 + 20x + 2$, $f''(x) = 10{,}8x^2 - 36x + 20$,
і обчислимо $f(-2) = 71{,}4;\ f(-1) = -12{,}1;\ f''(-2) = 99{,}2;\ f''(-1) = 66{,}8$.

Тоді
$$\begin{gathered} f(-2)f''(-2) = 71{,}4 \cdot 99{,}2 > 0 \\ f(-1)f''(-1) = -12{,}1 \cdot 66{,}8 < 0 \end{gathered}.$$

Отже за початкову координату приймаємо $\underline{x}_0 = -2$.

Використовуємо обчислювальну схему (1.7') :

$$x_{k+1} = \underline{x}_k + \left[-\frac{f(\underline{x}_k)}{f'(\underline{x}_k)}\right] \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Маємо:

$$x_1 = -2 + \left[-\frac{f(-2)}{f'(-2)}\right] = -2 + 0{,}514 = -1{,}486;$$

$$x_2 = -1{,}486 + \left[-\frac{f(-1{,}486)}{f'(-1{,}486)}\right] = -1{,}486 + 0{,}204 = -1{,}282;$$

$$x_3 = -1{,}282 + \left[-\frac{f(-1{,}282)}{f'(-1{,}282)}\right] = -1{,}282 + 0{,}0032 = -1{,}278;$$

$$x_4 = -1{,}278 + \left[-\frac{f(-1{,}278)}{f'(-1{,}278)}\right] = -1{,}278 + 0{,}0028 = -1{,}275;$$

$$x_5 = -1{,}275 + \left[-\frac{f(-1{,}275)}{f'(-1{,}275)}\right] = -1{,}275 + 0{,}026 = -1{,}249;$$

$$x_6 = -1{,}249 + \left[-\frac{f(-1{,}249)}{f'(-1{,}249)}\right] = -1{,}249 + 0{,}000029 = -1{,}249.$$ Отже, $\underline{x} = -1{,}249$.

3.3. Метод послідовних наближень

Запишемо рівняння $f(x)=0$ у вигляді $x = x + cf(x)$:

$$x = x + c(\,0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27)\,.$$

Позначимо $\varphi(x) = x + cf(x) \; = x + c(0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27)$. За умови теореми коефіцієнт c треба вибрати так, щоб

$$\left|\varphi'(x)\right| = \left|1 + c\left(3{,}6x^3 - 18x^2 + 20x + 2\right)\right| < 1 \text{ на відрізку } [-2;\,-1].$$

Розглянемо функцію $\phi(x) = c\left(3{,}6x^3 - 18x^2 + 20x + 2\right)$ і знайдемо найбільше найменше її значення на відрізку $[-2;\,-1]$. Знайдемо $\phi'(x) = c\left(10{,}8x^2 - 36x + 20\right)$, прирівнюємо до нуля $c\left(10{,}8x^2 - 36x + 20\right) = 0$ і отримуємо $2{,}7x^2 - 9x + 5 = 0$. Знаходимо корені $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-54}}{5{,}4} = \dfrac{9 \pm \sqrt{27}}{5{,}4} \approx \dfrac{9 \pm 5{,}2}{5{,}4}$. Отже, $x_1 = \dfrac{14{,}2}{5{,}4} \approx 2{,}6$ $x_2 = \dfrac{3{,}8}{5{,}4} \approx 0{,}7$. Корені не належать інтервалу $[-2;\,-1]$, а отже, функція $\phi(x)$ монотонна. Обчислимо: $\Psi(-2) = -138{,}8c$; $\Psi(-1) = -39{,}6c$.

Отже, на функцію $\phi(x)$ треба накласти умову $-1 < \phi(x) < 0$. Наприклад, при $c = \dfrac{1}{200}$ умова (1.9) виконується.

Покладемо $c = \dfrac{1}{200}$. Тоді запишемо рівняння $f(x)$=0 у вигляді $x = x + \dfrac{1}{200} f(x)$, або $x = x + \dfrac{1}{200}(\,0{,}9x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 2x - 27)$

Використаємо обчислювальну схему :

$$x_{k+1} = \underline{x}_k + \frac{1}{200}\left(0{,}9x_k^4 - 6x_k^3 + 10x_k^2 + 2x_k - 27\right) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

За нульове наближення виберемо правий кінець відрізку $[-2;\,-1]$, тобто $x_0 = -1$.

Результати обчислень подамо у вигляді таблиці.

k	x_k	k	x_k	k	x_k
0	–1				
1	–1,0605	7	–1,2207	13	–1,2460
2	–1,1084	8	–1,2288	14	–1,2470
3	–1,145	9	–1,2347	15	–1,2477
4	–1,1731	10	–1,2400	16	–1,2485
5	–1,1941	11	–1,2427	17	–1,2487
6	–1,2095	12	–1,2446	18	–1,2490

Задача 2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,\,n+1}\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,\,n+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,\,n+1},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Припускаючи, що діагональні коефіцієнти $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, розв'яжемо перше рівняння відносно x_1, друге – відносно x_2 і т. д. Тоді одержимо еквівалентну систему

$$\begin{aligned}
&x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n\\
&x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,\,n-1}x_{n-1},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

де $\beta_i = \dfrac{a_{i,\,n+1}}{a_{ii}}$, $a_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ $(i \neq j)$ і $a_{ij} = 0$ при $i = j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Введемо матриці

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Систему (2.2) можна записати у матричній формі:

$$x = \beta + \alpha\, x. \tag{2.3}$$

Систему (2.3) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. За нульове наближення приймаємо, наприклад, стовпчик вільних членів $x^{(0)} = \beta$.

Далі послідовно будуємо наближені розв'язки:

$x^{(1)} = \beta + \alpha\, x^{(0)}$ – перше наближення,

$x^{(2)} = \beta + \alpha\, x^{(1)}$ – друге наближення і т. д.

Будь-яке $(k+1)$ - наближення обчислюється за формулою:

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha\, x^{(k)}. \tag{2.4}$$

Для того, щоб ітераційних процес по формулі (2.4) збігався, потрібно, щоб в матриці A системи (2.1) діагональні елементи мали достатню перевагу над іншими елементами.

Для прискорення обчислювального процесу застосуємо метод Гаусса-Зейделя. Він являє собою модифікацію методу простої ітерації. Основна його ідея полягає в тому, що при підрахунку i-ї компоненти $(k+1)$-го наближення враховуються вже раніше обчислені компоненти $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ..., $x_{i-1}^{(k+1)}$. Звичайно цей метод збігається швидше, ніж метод простої ітерації. Припускаючи, що k-е наближення $x^{(k)}$ відоме, $(k+1)$-е наближення будується за формулами

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^{(k)}, \\
x_2^{(k+1)} &= \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} a_{2j} x_j^{(k)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_i^{(k+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}, \qquad (2.5) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n^{(k+1)} &= \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}.
\end{aligned}$$

Приклад 2. *Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь.*

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

при $\alpha = -3 \quad \beta = -0{,}2 \quad \gamma = 4$.

Розв'язання

Підставимо α, β, γ в систему і отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = -3 \\ -0{,}2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 4x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

Обчислювальну схему методу запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -3 + 0{,}2x_2^{(k-1)} - 0{,}1x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0{,}8 + 0{,}2x_1^{(k)} + 0{,}1x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = -0{,}05 - 0{,}075x_1^{(k)} + 0{,}05x_2^{(k)} \end{cases}$$

За нульове наближення візьмемо: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Результати обчислень подамо в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	–3	0,2	0,185
2	–2,9785	0,2228	0,1845
3	–2,9739	0,2237	0,1842
4	–2,9737	0,2237	0,1842

Бачимо, що при $k = 3$ і $k = 4$ компоненти розв'язку співпадають до чотирьох розрядів після коми.

Отже розв'язок має вигляд:

$$x_1 = -2{,}9737 \quad x_2 = 0{,}2237 \quad x_3 = 0{,}1842.$$

Для перевірки використаємо функцію **LinearSolve** універсальної СКМ Mathematica 6.0 для знаходження розв'язку заданої СЛАР.

LinearSolve[{{1,-0.2,0.1},{-0.2,1,-0.1},{-0.3,0.2,-4}},{-3,0.8,0.2}]
{-2.97368, 0.223684, 0.184211}

Видно, що результати співпадають до чотирьох знаків після коми для $k = 4$, тобто обчислювальний процес за схемою методу Гаусса-Зейделя дуже ефективний.

Задача 3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння.

Потрібно обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{3.1}$$

за умови, що a і b скінченні, а функція $f(x)$ є неперервною на інтервалі $[a,b]$. Загальна схема розв'язку поставленої задачі полягає в такому. Оскільки визначений інтеграл (3.1) з геометричної точки зору являє собою площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, розбиваємо інтервал від a до b на множину менших інтервалів (рис. 3.1).

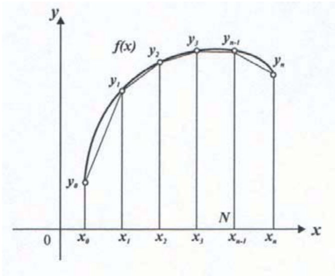


Рис. 3.1

Знаходимо наближене значення площі кожної смужки і сумуємо їх. Ця сума і є наближеним значенням інтеграла.

3.1. Формула трапецій

Замінимо на кожному інтервалі $[x_i,\, x_{i+1}]$ функцію $f(x)$ відрізком прямої, яка сполучає точки кривої функції $f(x)$ $M_i(x_i,\, f(x_i))$ і $M_{i+1}(x_{i+1},\, f(x_{i+1}))$ (рис. 3.2).

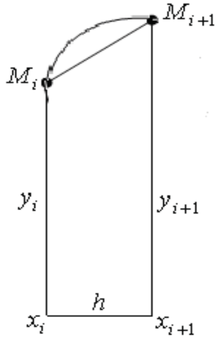


Рис. 3.2

Площу криволінійної трапеції замінюємо сумою площ трапецій, обмежених зверху хордами $M_0M_1,\ M_1M_2,\ldots,\ M_{n-1}M_n$ (рис. 3.2). Оскільки на відрізку $[x_i,\, x_{i+1}]$ площа трапецій дорівнює $I_i = \dfrac{y_i + y_{i+1}}{2}h$, то одержуємо

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right]. \tag{3.2}$$

Це і є *формула трапецій*.

3.2. Формула Сімпсона

Розділимо відрізок $[a,b]$ на парну кількість рівних частин $n = 2m$. Замінимо криву $y = f(x)$ на двох суміжних відрізках $[x_{2m-2},\, x_{2m-1}]$, $[x_{2m-1},\, x_{2m}]$ кривою другого порядку, яка сполучає точки M_{2m-2} M_{2m-1} M_{2m}. Отримаємо криволінійну трапецію, яку будемо називати *параболічною трапецією*.

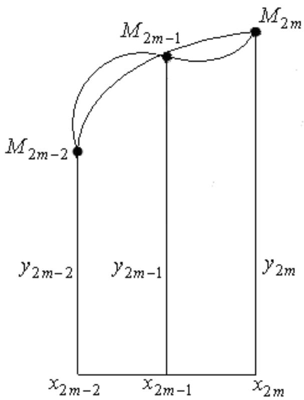


Рис. 3.3

Можна показати, що

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}),$$

де $h = \dfrac{b-a}{2m}$.

Тоді всю площу криволінійної трапеції замінюємо сумою m відповідних площ параболічних трапецій. Отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}]. \quad (3.3).$$

Це і є *формула парабол* або *формула Сімпсона*.

Приклад 3. *Наближено обчислити визначений інтеграл* $\int_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x} dx$ *за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння.*

Розв'язання

Підінтегральна функція має вигляд: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Оскільки крива підінтегральної функції плавна, покладемо $n = 4$. Тоді $h = \dfrac{0,2}{4} = 0,05$. Складемо табл. 3.1

Таблиця 3.1

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,4	3,72956	3	0,475	3,38529	6	0,55	3,15137
1	0,425	3,59904	4	0,5	3,29744	7	0,575	3,09066
2	0,45	3,48514	5	0,525	3,21992	8	0,6	3,03686

Використаємо функцію **Table** для перевірки результатів обчислення значень функції у вибраних точках.
Table[Exp[0.4+(i-1)*0.05]/(0.4+(i-1)*0.05),{i,5}]
{3.72956,3.48514,3.29744,3.15137,3.03686}
За формулою трапецій маємо
$$I_1 = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) = 0{,}66586\,.$$
За формулою Сімпсона маємо
$$I_2 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) = 0{,}66512\,.$$
Використаємо функцію **Table** для перевірки результатів обчислення значень функції у вибраних точках.
Table[Exp[0.4+(i-1)*0.025]/(0.4+(i-1)*0.025),{i,9}]
{3.72956, 3.59904, 3.48514, 3.38529, 3.29744, 3.21992, 3.15137, 3.09066, 3.03686}
За формулою трапецій маємо
$$I_1 = \frac{h}{2}\left(y_0 + \sum_{i=1}^{7} 2\cdot y_i + y_8 \right) = 0.665\,.$$
За формулою Сімпсона маємо
$$I_2 = \frac{h}{3}\left(y_0 + \sum_{i=1}^{4} 4\cdot y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{3} 2\cdot y_{2i} + y_8 \right) = 0.665.$$
Для перевірки використаємо функцію **NIntegrate** універсальної СКМ Mathematica 6.0 для знаходження значення визначеного інтеграла.

NIntegrate[Exp[x]/x,{x,0.4,0.6}]
0.665116
Видно, що формула Сімпсона вже при $n = 4$ дає майже точний результат.

Задача 4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично. За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = ax^2 + bx + c$. Побудувати графік.

Інтерполювання функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ полягає в наближеній заміні функції $f(x)$ на даному відрізку однією з функцій $P(x)$ вказаного класу, тобто
$$f(x) \cong P(x), \tag{4.1}$$
причому функція така, що $f(x_i) = P(x_i) \quad (i = 0,1,2,...,n)$.

Точки $x_0, x_1, ..., x_n$ називаються *вузлами інтерполяції*, а $P(x)$ – *інтерполюючою* функцією. В тому випадку, коли клас функцій $\{P(x)\}$ є класом степеневих многочленів, інтерполяція називається параболічною. У випадку $n+1$ вузлів інтерполяції як інтерполяційну функцію беремо многочлен $P_n(x)$ степеня n. Загальна задача полягає в побудові інтерполяційного полінома $P_n(x)$ і в оцінці похибки загальної інтерполяційної формули:

$$f(x) \cong P_n(x). \tag{4.2}$$

4.1. Інтерполяційна формула Лагранжа

Потрібно побудувати поліном $P_n(x)$ степеня n, який в $n+1$ заданих точках (*вузлах інтерполяції*) x_0, $x_1, x_2, ..., x_n$ приймає задані значення y_0, $y_1, ..., y_n$.

Введемо в розгляд фундаментальні поліноми $Q_n^k(x)$, тобто поліноми степеня n, що задовольняють такі умови:

$$Q_n^k(x_i) = \begin{cases} 0 & при \quad i \neq k \\ 1 & при \quad i = k \end{cases} \tag{4.3}$$

Тоді шуканий многочлен можна записати в вигляді

$$P_n(x) = y_0 Q_n^0(x) + y_1 Q_n^1(x) + y_2 Q_n^2(x) + ... + y_n Q_n^n(x). \tag{4.4}$$

Таким чином, розв’язання нашої задачі зводиться до побудови поліномів $Q_n^k(x)$. Так як x_0, $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ є коренями полінома $Q_n^k(x)$, то він повинен мати вигляд:

$$Q_n^k(x) = c(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n).$$

Підбираючи коефіцієнт c з умови $Q_n^k(x_k) = 1$, одержимо

$$Q_n^k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}. \tag{4.5}$$

Підставимо (4.5) в формулу (4.4) і одержимо шуканий інтерполяційний поліном у такому вигляді:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}. \tag{4.6}$$

Цей поліном називається *інтерполяційним поліномом Лагранжа*, а фундаментальні поліноми (4.5) – *коефіцієнтами Лагранжа*.

4.2. Наближення функцій

Інтерполювання функцій полягає в наближеній заміні даної функції $y = f(x)$ іншою функцією $P(x)$ за умови, що значення цих функцій співпадають на заданій послідовності точок. Вимога точного співпадання значень функцій $f(x)$ і $P(x)$ у вузлах інтерполяції не завжди є обґрунтованою, наприклад, у випадку, коли значення функцій визначаються експериментально і містять в собі похибки експерименту. При інтерполюванні за допомогою степеневих поліномів зі збільшенням числа вузлів інтерполяції виростає порядок інтерполяційних поліномів, що не завжди приводить до покращення наближеного представлення функції.

У зв’язку з цим виникає задача про таке наближення функції $f(x)$ за допомогою $P(x)$, яке б характеризувало функцію $f(x)$ на відрізку в цілому без копіювання її місцевих відхилень. В цьому сенсі доцільна постановка задачі про наближення функції в *середнє квадратичному.* Ця задача полягає в такому.

Для функції $f(x)$, заданої на відрізку $[a,b]$, потрібно підібрати *апроксимуючу* функцію $P(x)$ так, щоб інтеграл

$$\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx \tag{4.7}$$

був по можливості малим.

У разі, коли аналітичний вираз функції $f(x)$ невідомий, а функція задана лише своїми значеннями в $(n+1)$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$, то замість інтегралу (4.7) доцільно розглядати суму вигляду:

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - P(x_i)]^2 . \tag{4.8}$$

При розгляді конкретних задач в ролі апроксимуючих функцій $f(x)$ вибирають найчастіше степеневі або тригонометричні многочлени.

4.3. Метод найменших квадратів у випадку дискретного ряду точок

Нехай $y_0, y_1, ..., y_n$ – значення (точні або наближені) функції $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Поставимо собі задачу.

Серед многочленів m-го степеня $(m < n)$

$$P_m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m \tag{4.9}$$

знайти такий, який реалізує мінімум виразу

$$S = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2 . \tag{4.10}$$

Для визначення a_k, при яких S має мінімум, прирівняємо до нуля частинні похідні від S по всіх a_k. У результаті одержуємо систему $(m+1)$ лінійних рівнянь відносно $a_0, a_1, ..., a_m$:

$$\sum_{i=0}^{n} (y_1 - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - ... - a_m x_i^m)\, x_i^k = 0, \qquad (k = 0,1,2,...,m). \tag{4.11}$$

Цю систему можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} & c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_m a_m = d_0 \\ & c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + ... + c_{m+1} a_m = d_1 \\ & .... \\ & c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + ... + c_{2m} a_m = d_m , \end{aligned} \tag{4.12}$$

де $c_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$, $\quad d_k = \sum_{i=0}^{n} y_i\, x_i^k$, $\quad (k = 0,1,2,...,m)$.

Визначник матриці коефіцієнтів лівої частини цієї системи відмінний від нуля, тобто система (4.12) завжди має єдиний розв’язок.

Приклад 4. *Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, а за допомогою методу найменших квадратів знайти наближення функції у вигляді* $y = ax^2 + bx + c$*, якщо вона задана таблично:*

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	3,4	6	11,1	17

Побудувати графіки знайдених поліномів.

Розв'язання

4.1. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Відповідно до (4.6) будуємо інтерполяційний поліном Лагранжа. Маємо:

$$P_4(x) = 2\frac{(x-0{,}5)(x-1)(x-1{,}5)(x-2)}{(0-0{,}5)(0-1)(0-1{,}5)(0-2)} + 3{,}4\frac{(x-0)(x-1)(x-1{,}5)(x-2)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)(0{,}5-1{,}5)(0{,}5-2)} +$$
$$+6\frac{(x-0)(x-0{,}5)(x-1{,}5)(x-2)}{(1-0)(1-0{,}5)(1-1{,}5)(1-2)} + 11{,}1\frac{(x-0)(x-0{,}5)(x-1)(x-2)}{(1{,}5-0)(1{,}5-0{,}5)(1{,}5-1)(1{,}5-2)} +$$
$$+17\frac{(x-0)(x-0{,}5)(x-1)(x-1{,}5)}{(2-0)(2-0{,}5)(2-1)(2-1{,}5)} = 2\frac{(x^2-1{,}5x+0{,}5)(x^2-3{,}5x+3)}{1{,}5} +$$
$$+3{,}4\frac{(x^2-x)(x^2-3{,}5x+3)}{-0{,}375} + 6\frac{(x^2-0{,}5x)(x^2-3{,}5x+3)}{0{,}25} + 11{,}1\frac{(x^2-0{,}5x)(x^2-3x+2)}{-0{,}375} +$$
$$+17\frac{(x^2-0{,}5x)(x^2-2{,}5x+1{,}5)}{1{,}5} = \left(1{,}333x^4 - 6{,}665x^3 + 11{,}664x^2 - 8{,}331x + 2\right) +$$
$$+\left(-9{,}067x^4 + 40{,}8x^3 - 58{,}935x^2 + 27{,}201x\right) + \left(24x^4 - 96x^3 + 114x^2 - 36x\right) +$$
$$+\left(-29{,}6x^4 + 103{,}6x^4 + 103{,}6^3 - 103{,}6x^2 + 29{,}6x\right) + \left(11{,}333x^4 - 34x^3 + 31{,}166x^2 - 8{,}5x\right) =$$
$$= -2x^4 + 7{,}735x^3 - 5{,}705x + 4x + 2$$

Отже, $P_4(x) = -2x^4 + 7{,}735x^3 - 5{,}705x + 4x + 2$.

Для перевірки застосуємо функції **InterpolatingPolynomial** (Параболічна інтерполяція) та **Expand[p]** (Розкриття дужок у алгебраїчному виразі) для знаходження інтерполяційного полінома Лагранжа.

p=InterpolatingPolynomial[{{0,2},{0.5,3.4},{1,6},{1.5,11.1},{2,17}},x
17+(-2+x) (15/2+(7/2+(0.733333 -2. (-0.5+x)) (-1+x)) x)

Expand[p]
2+3.96667 x-5.7 x^2+7.73333 x^3-2. x^4

4.2. Метод найменших квадратів

Будемо шукати поліном у вигляді: $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
Знайдемо коефіцієнти системи (4.12). Для цього побудуємо табл. 4.1.

Таблиця 4.1

i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^0 y_i = y_i$	$x_i^1 y_i$	$x_i^2 y_i$
0	1	0	0	0	0	2	0	0
1	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	3,4	1,7	0,85
2	1	1	1	1	1	6	6	6
3	1	1,5	2,25	3,375	5,0625	11,1	16,65	24,975
4	1	2	4	8	16	17	34	68
$\sum$	5	5	7,5	12,5	22,125	39,5	58,35	99,825
	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.12) має вигляд:

$$\begin{cases} C_0 a_0 + C_1 a_1 + C_2 a_2 = d_1 \\ C_1 a_0 + C_2 a_1 + C_3 a_2 = d_2 \\ C_2 a_0 + C_3 a_1 + C_4 a_2 = d_3 \end{cases}, \text{ або } \quad \begin{cases} 5_0 a_0 + 5a_1 + 7{,}5a_2 = 39{,}5 \\ 5a_0 + 7{,}5a_1 + 12{,}5a_2 = 58{,}35 \\ 7{,}5a_0 + 12{,}5a_1 + 22{,}125a_2 = 99{,}825 \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7{,}5 & 39{,}5 \\ 5 & 7{,}5 & 12{,}5 & 58{,}35 \\ 7{,}5 & 12{,}5 & 22{,}125 & 99{,}825 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 & 7{,}9 \\ 0 & 2{,}5 & 5 & 18{,}85 \\ 7{,}5 & 12{,}5 & 22{,}125 & 99{,}825 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 & 7{,}9 \\ 0 & 2{,}5 & 5 & 18{,}85 \\ 0 & 5 & 10{,}875 & 40{,}575 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 & 7{,}9 \\ 0 & 1 & 2 & 7{,}54 \\ 0 & 5 & 10{,}875 & 40{,}575 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1{,}5 & 7{,}9 \\ 0 & 1 & 2 & 7{,}54 \\ 0 & 0 & 0{,}875 & 2{,}875 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + 1{,}5a_2 = 7{,}9 \\ a_1 + 2a_2 = 7{,}54 \\ 0{,}875a_2 = 2{,}875 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 0{,}968 \\ a_2 = 3{,}286 \end{cases}$$

Остаточно, маємо:

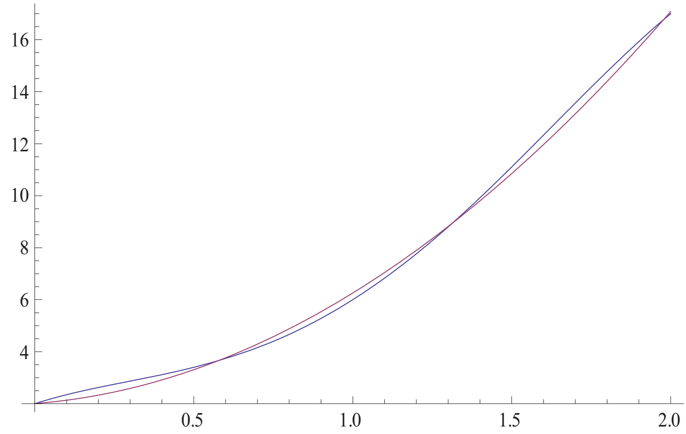
$P_2(x) = 3{,}286x^2 + 0{,}968x + 2$

Для перевірки застосуємо функцію **Fit (**Побудова наближення функції у вигляді полінома за допомогою методу найменших квадратів**)**

Fit[{{0,2},{0.5,3.4},{1,6},{1.5,11.1},{2,17}},{1,x,x^2},x]
2.00286 +0.968571 x+3.28571 x^2

Побудуємо графіки цих поліномів.

Plot[{2+3.96667 x-5.69999 x^2+7.73333 x^3-1.99999 x^4, 2.00285 +0.96857 x+3.28571 x^2},{x,0,2}]



Задача 5. Задано щільність розподілу $f(x, \alpha)$ неперервної випадкової величини ξ Визначити α, математичне сподівання a, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність попадання ξ в заданий інтервал. Побудувати графіки диференціальної $f(x)$ та інтегральної функції розподілу $F(x)$.

Означення 1. Будь-яка дійсна функція, визначена на просторі елементарних подій, називається випадковою величиною (ВВ).

Означення 2. Інтегральною функцією розподілу ВВ ξ називають функцію $F(x)$, що визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення, менше за x, тобто:

$$F(x) = p(\xi < x). \tag{5.1}$$

Геометрично це означає, що $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення, яке зображується на числовій осі точкою, що лежить лівіше точки x.

Властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$, тобто значення $F(x)$ належить відрізку $[0, 1]$.
2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$, якщо $x_1 \le x_2$.

Наслідок 1. $p(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a)$, тобто ймовірність попадання ВВ ξ в інтервал (a, b) дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі.

Означення 3. Диференціальною функцією розподілу $f(x)$ неперервної ВВ ξ називають першу похідну від інтегральної функції, тобто:

$$f(x) = F'(x). \tag{5.2}$$

Часто замість терміна «диференціальна функція розподілу» використовують термін «щільність ймовірності». Щільність ймовірності використовують для описання неперервних випадкових величин.

Властивості диференціальної функції розподілу $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$.
2. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.
4. $p(a < \xi < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, тобто ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал (a, b) дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і кривою $y = f(x)$.

Деякі числові характеристики випадкової величини

Математичним сподівання дискретної ВВ називають суму добутків її можливих значень на відповідні ймовірності, тобто

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (5.3)^{(1)}$$

Математичним сподіванням неперервної ВВ, називають невласний інтеграл

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx \,. \qquad (5.3)^{(2)}$$

У випадку, коли всі можливі значення ξ лежать на відрізку $[a, b]$, формула $(5.3)^{(2)}$ набуває вигляду

$$M\xi = \int\limits_{a}^{b} xf(x)\,dx \,. \qquad (5.3)^{(3)}$$

Математичне сподівання характеризує положення розподілу і тому його часто називають *центром розподілу*.

Математичне сподівання $M\xi$ пов'язане залежністю з середнім арифметичним спостереженням значень ξ: при великій кількості експериментів середнє арифметичне значень ξ, які спостерігалися, наближаються (збігаються по ймовірності) до її математичного сподівання.

Властивості $M\xi$:

1) $Mc = c,\ c = const$;
2) $M(c\xi) = cM\xi\ ,\ c = const$;
3) $M(\xi\eta) = M\xi\, M\eta$, де ξ, η – незалежні випадкові величини;
4) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Дисперсією випадкової величини ξ називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, тобто $M((\xi - M(\xi))^2)$.

Дисперсію випадкової величини ξ позначають $D\xi$ і обчислюють за формулами:

$$D\xi = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 p_i, & \textit{якщо } \xi - \textit{дискретна ВВ}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)\,dx, & \textit{якщо } \xi - \textit{неперервна ВВ}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно центру розподілу.

Властивості $D\xi$:

1) $Dc = 0$, якщо $c = const$;
2) $D(c\xi) = c^2 D\xi$, якщо $c = const$;
3) $D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm D\eta$, де ξ, η – незалежні випадкові величини.

Середнє квадратичне відхилення

Дисперсія $D\xi$ має розмірність квадрату випадкової величини ξ, тому для зручності введена величина σ_ξ, яка обчислюється за формулою:

$$\sigma_\xi = \sigma = \sqrt{D\xi} \tag{5.5}$$

і називається *середнім квадратичним відхиленням*.
Вона має розмірність випадкової величини ξ.

Приклад 5. *Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\alpha}(5 - 4x), & 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 0, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Визначити α. *Математичне сподівання* $M\xi$, *середнє квадратичне відхилення* σ *та ймовірність події* $\xi > 0{,}25$. *Побудувати графіки диференціальної* $f(x)$ *та інтегральної функції розподілу* $F(x)$.

Розв'язання

Оскільки всі можливі значення ξ знаходяться в інтервалі $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, то $p\left(0 < x \le \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

За властивістю. 3 диференціальної функція розподілу неперервної випадкової величини маємо:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = p\left(0 < \xi \le \frac{1}{2}\right) = 1 \qquad \to \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha}(5-4x)dx = 1 \qquad \to$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{2}}(5-4x)dx = \frac{1}{\alpha}\left(5x - 4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{4}\right) = \frac{2}{\alpha} = 1.$$ Звідси $\alpha = 2$.

Отже, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2{,}5 - 2x, & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

За формулою (5.3) маємо:

$$M\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} x(2{,}5 - 2x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2{,}5x - 2x^2\right)dx = \left(\frac{5x^2}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = 0{,}312 - 0{,}083 = 0{,}229.$$

За формулою (5.4) маємо:

$$D\xi = \int_0^{\frac{1}{2}}(x - M\xi)^2\ f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(x - 0{,}229)^2(2{,}5 - 2x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 0{,}458x + 0{,}0524\right)(2{,}5 - 2x)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(-2x^3 + 3{,}416x^2 - 1{,}249x + 0{,}131\right)dx = \left(-\frac{2x^4}{4} + \frac{3{,}416x^3}{3} - \frac{1{,}2498x^2}{2} + 0{,}131x\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = 0{,}02.$$

За формулою (5.5) маємо:

$\sigma = \sqrt{0{,}02} = 0{,}143$.

За властивістю 4 диференціальної функції розподілу $f(x)$ маємо:

$p(\xi > 0{,}25) = p(0{,}25 < \xi \le 0{,}5) + p(\xi > 0{,}5) = p(0{,}25 < \xi \le 0{,}5)$. Оскільки $p(x > 0{,}5) = 0$, маємо:

$$p(0{,}25 < \xi \le 0{,}5) = \int_{0{,}25}^{0{,}5}(2{,}5 - 2x)dx = \left(2{,}5x - x^2\right)\Big|_{0{,}25}^{0{,}5} = (2{,}5\cdot 0{,}5 - 0{,}25) - (2{,}5\cdot 0{,}25 - 0{,}0625) =$$

$$= 1 - 0{,}5625 = 0{,}4375.$$

Для перевірки застосуємо систему комп'ютерної математики MATHEMATICA 6.0. Використаємо панель **BasicMathInput**. Маємо:

$$\int_0^{0{,}5} \frac{5 - 4x}{\alpha}dx$$

$$\frac{2}{\alpha}$$

$$\mathbf{M}\,\xi = \int_{0}^{0,5} \mathbf{x}\frac{\mathbf{5-4x}}{\alpha}\mathbf{dx}$$

0,22916

$$\mathbf{D}\,\xi = \int_{0}^{0,5} \left(\mathbf{x - 0,22916}\right)^2 \frac{\mathbf{5-4x}}{\alpha}\mathbf{dx}$$

0,020399

$$\sqrt{\mathbf{0,020399}}$$

0,142825

$$\int_{0,25}^{0,5} \frac{\mathbf{5-4x}}{\alpha}\mathbf{dx}$$

Задача 6. За результатами n-вимірювань значень деякої неперервної кількісної ознаки (випадкової величини) ξ після групування отримано груповий статистичний ряд:

l_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	...	$x_{n-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Треба:

1) побудувати емпіричну функцію розподілу та гістограму частот;

2) знайти точкові оцінки деяких числових характеристик;

3) побудувати довірчі інтервали з заданою надійністю γ для генеральної середньої $\overline{x}_Г$ та генерального середнього квадратичного відхилення $\sigma_Г$;

4) за критерієм Пірсона при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про узгодження емпіричних даних з теоретичними.

Нехай необхідно провести дослідження певної ознаки (випадкової величини) ξ, що характерна для великої кількості N однотипних об’єктів. Множину цих об’єктів з досліджуваною ознакою ξ (сукупність значень цієї ознаки ξ всіх об’єктів) називають *генеральною сукупністю (ГС)*.

Множину $n\,(n << N)$ випадково відібраних об’єктів з ГС для дослідження ознаки ξ (сукупність значень $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки ξ) називають *вибірковою сукупністю*, або *вибіркою*. Об’ємом сукупності називають кількість об’єктів сукупності.

З генеральної сукупності взято вибірку, над об’єктами якої проведені експерименти , і значення деякої дискретної кількісної ознаки ξ мають вигляд: x_1 з’явилось n_1 разів, x_2 з’явилось n_2 разів, …, x_n - n_k разів. Спостережені значення подають у вигляді табл. 6.1.

Таблиця 6.1

x_i	x_1	x_2	...	n_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – об’єм вибірки.

Статистичним розподілом (статистичним рядом) вибірки називають відповідність між варіантами та їх частотами (табл. 6.1).

Статистичний розподіл можна задати також у вигляді послідовності інтервалів (для неперервної кількісної ознаки ξ) і відповідних їм частот (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

l_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_{k-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Будемо називати його груповим статистичним (інтервальним) рядом.

Нехай n_x – число спостережень значень ознаки ξ, які менше за x, а n – об'єм вибірки. Тоді відносна частота події $\xi < x$ дорівнює $\frac{n_x}{n}$.

Введемо функцію:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}. \qquad (6.1)$$

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $\xi < x$. Цю функцію можна використовувати для наближеного представлення теоретичної (інтегральної) функції розподілу генеральної сукупності.

Для дискретної ознаки ξ емпірична функція має вигляд (рис. 6.1):

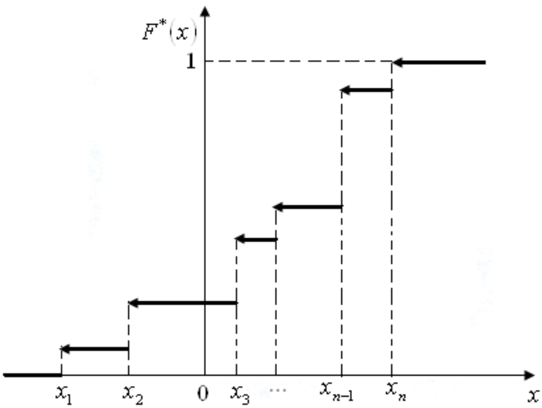


Рис.6.1

У випадку неперервної кількості ознаки ξ зручно побудувати гістограму частот (рис. 6.2).

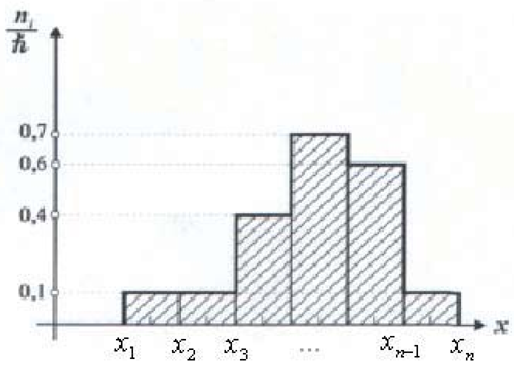


Рис. 6.2

Нехай вивчається генеральна сукупність об’єму N відносно дискретної кількісної ознаки ξ.

Генеральною середньою $\overline{x_Г}$ називається середнє арифметичне значення ознаки ξ генеральної сукупності

$$\overline{x_Г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i , \qquad \text{або} \qquad \overline{x_Г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K} x_i n_i . \qquad (6.2)$$

Звідси випливає, що якщо розглядають кількісну ознаку ξ як випадкову величину, то її математичне сподівання $M\xi$ дорівнює генеральній середній цієї ознаки.

Генеральною дисперсією $D_Г$ називається величина

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x_Г}\right)^2 , \qquad \text{або} \qquad D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\left(x_i - \overline{x_Г}\right)^2 N_i . \qquad (6.3)$$

Генеральна дисперсія характеризує степінь розсіювання значень ознаки ξ генеральної сукупності навколо свого середнього значення.

Генеральним середнім квадратичним відхиленням називається величина $\sigma_Г = \sqrt{D_Г}$

При дослідженні параметрів кількісної ознаки ξ генеральної сукупності виникає задача оцінювання її параметрів і, зокрема, генеральної середньої і генеральної дисперсії на основі деякої вибірки $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$.

Точкові оцінки

На основі цих вибіркових даних обчислюють деякі числа, які називаються *описувальними статистиками*, або просто *статистиками*. До них належать вибіркове середнє $\overline{x_B}$, вибіркова дисперсія D_B, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B .

Вибірковим середнім $\overline{x_B}$ називають середнє арифметичне значення вибіркової сукупності, тобто:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \quad \text{або} \quad \overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i . \tag{6.4}$$

Вибірковою дисперсією D_B називають середнє арифметичне квадратів відхилень спостережуваних значень ознаки ξ від її вибіркового середнього, тобто

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \quad \text{або} \quad D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 . \tag{6.5}$$

Легко показати, що:

$$D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x_B}\right)^2 . \tag{6.6}$$

Вибірковим середнє квадратичним відхиленням σ_B називається корінь квадратний з вибіркової дисперсії, тобто

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} . \tag{6.7}$$

Виправленою вибірковою дисперсією S^2 називається величина вигляду

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n-1}, \tag{6.8}$$

а *виправленим середнім квадратичним відхиленням* – $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}$.

Зауваження 1

Всі наведені величини є конкретними числами, що знайдені за даними однієї вибірки. Якщо брати інші вибірки того ж об’єму з тієї ж генеральної сукупності, то елементи вибірки можна вважати випадковими величинами $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, і їхні статистики будуть змінюватись від вибірки до вибірки. Тому статистики можна розглядати в свою чергу як випадкові величини і говорити про їх розподіл та їх числові характеристики.

Вибіркова середня $\overline{x_B}$ *є не зсуненою оцінкою генеральної середньої* $\overline{x_Г}$, тобто $M\overline{x_B} = \overline{x_Г}$.

Вибіркова дисперсія D_B *є зсуненою оцінкою генеральної дисперсії* $D_Г$, оскільки $MD_B = \frac{n-1}{n} D_Г$.

Звідси випливає, що *вибіркова виправлена дисперсія* S^2 *є не зсуненою оцінкою генеральної дисперсії* $MS^2 = D_Г$.

Порівнюючи D_B і S^2 бачимо, що вони відрізняються лише знаменниками. При достатньо великих значеннях об’єму вибірки n вони мало відрізняються. На практиці часто користуються виправленою дисперсією, якщо приблизно $n < 30$.

У випадку неперервної кількості ознаки ξ спочатку проводиться групування даних. Область спостережуваних значень розбивається на деяку кількість інтервалів рівної довжини і підраховується кількість спостережень, що потрапили в кожний інтервал. Будується груповий статистичний (інтервальний) ряд (табл. 6.3)

Таблиця 6.3

l_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_{k-1} - x_k$
x_i	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	...	$\overline{n}_k$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

де $\overline{x}_i = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$, $x_{i+1} - x_i = \overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i = h$ – довжина групи, а k – кількість групи (інтервалів).

У подальшому при дослідженні неперервної кількості ознаки ξ використовують вище наведені формули, тобто вважають , що розглядається дискретна кількісна ознака ξ.

Інтервальні оцінки

Якщо точкова оцінка є просто однією корисною статистикою, то інтервальна оцінка дещо більш інформативна. Інтервальна оцінка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Нехай θ^* є оцінкою числового параметру θ. Будемо вважати θ постійним числом і розглянемо ймовірність події $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$, тобто точність оцінки.

Довірчою ймовірністю оцінки θ^* параметра θ називають ймовірність γ, з якою здійснюється нерівність $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$, тобто:

$$p\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right) = \gamma . \tag{6.9}$$

Величину δ називають *точністю оцінки*.

Довірчим інтервалом називають інтервал:

$$\left(\theta^* - \delta,\ \theta^* + \delta\right),$$

який покриває невідомий параметр з заданою точністю δ.

Інтервальні оцінки дозволяють одержати точність і надійність оцінки. При використанні інтервальних оцінок правильно говорити не про ймовірність попадання θ в довірчий інтервал, а про ймовірність того, що довірчий інтервал накриє θ. З іншого боку довірчий інтервал можна розглядати як інтервал значень θ^* сумісних з результатами експерименту і таких, що не суперечать їм.

Оцінка математичного сподівання а нормального розподілу при відомому середнє квадратичному відхиленні σ.

Довірчий інтервал для математичного сподівання a має вигляд:

$$\left(\overline{x_B} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x_B} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{6.10}$$

а довірча ймовірність $\gamma = 2\Phi(t)$, де $\Phi(t)$ – функція Лапласа (табл. 2 [ ]).

Оцінка математичного сподівання a нормального розподілу при невідомому σ (при малому об'ємі вибірки)

Довірчий інтервал для математичного сподівання a має вигляд:

$$\left(\overline{x_B} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x_B} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \qquad (6.11)$$

З табл. 3 додатків [1] можна по величинах γ та n визначити величину t_γ.

Оцінка середнього квадратичного відхилення нормального розподілу

Довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ має вигляд:

$$\left(S\,(1-q),\ S\,(1+q)\right) \qquad (6.12)$$

З табл. 4 додатків [1] визначаємо значення q по величинам γ і n.

Перевірка статистичних гіпотез

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу, або про параметри відомого розподілу.

При перевірці гіпотез висувається для випробування як вихідна деяка гіпотеза H_0 (нульова, основна) у порівнянні з однією чи кількома альтернативними (протилежними) гіпотезами H_1, H_2, ..., які явно формулюються або маються на увазі.

Шляхом статистичної перевірки необхідно з'ясувати наскільки дані вибірки $(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)$ узгоджуються з висунутою гіпотезою H_0, тобто чи можна на їх основі прийняти або відкинути гіпотезу.

Абсолютно надійне рішення відносно гіпотези яку перевіряють, отримати неможливо. Тому необхідно заздалегідь припустити можливість помилкового рішення. Позначимо через α ймовірність того, що гіпотеза H_0 буде відкинута, хоч насправді вона вірна. Цю ймовірність називають також *рівнем значущості перевірки гіпотези*. При розв'язанні технічних проблем α часто приймає значення 0,01 або 0,05, що відповідає рівням значущості 1 і 5%.

Процедура перевірки гіпотези полягає в такому: вибирається деяка відповідна вибіркова функція (випадкова величина) $T(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n;\ H_0)$, яка визначається вибіркою $(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)$ і висунутою гіпотезою H_0. Ця випадкова величина називається *критерієм перевірки гіпотези*.

Далі встановлюється область K, в яку у разі справедливості гіпотези H_0 значення T попадає з ймовірністю, що дорівнює α. Область K називається *критичною областю*. Якщо обчислене значення $T(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n;\ H_0)$ попадає в критичну область K, гіпотеза H_0 відкидається; в противному випадку гіпотеза приймається. При цьому ймовірність того, що гіпотеза H_0 буде відкинута, хоч насправді вона справедлива, дорівнює заданій ймовірності α.

Критерій згоди Пірсона

Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави вважати, що він має певний вигляд $f(x)$, то перевіряють нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом $f(x)$. Критерії, що використовуються з цією метою називаються *критеріями згоди*.

Зокрема, *критерій згоди Пірсона* дозволяє перевірити, чи описуються експериментальні дані нормальним розподілом. Суть критерію полягає у порівнянні емпіричних (спостережений) і теоретичних (обчислений за умови нормального розподілу) частот.

Перед застосуванням цього критерію треба згрупувати емпіричні дані. Нехай за вибіркою об'єму n отримано груповий статистичний ряд (табл. 6.4)

Таблиця 6.4

$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	...	x_k
n_1	n_2	...	n_k

де k – кількість груп при групуванні даних, $\overline{x}_i$ – варіанти (середні групи), n_i – емпіричні частоти, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Висувається нульова гіпотеза H_0: генеральна сукупність розподілена нормально.

Як критерій перевірки гіпотези приймається випадкова величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^*)}{n_i^*}, \qquad (6.13)$$

де n_i – емпіричні частоти, а n_i^* – теоретичні частоти, які обчислюються за формулою:

$$n_i^* = \frac{nh}{S} \varphi\left(\frac{x_i - \overline{x}_B}{S}\right), \qquad (6.14)$$

де n – об'єм вибірки, h – довжина груп, S – виправлене середнє квадратичне відхилення, $\overline{x}_B$ – вибіркова середня.

Цей критерій є правосторонній і розподілений за χ^2– розподілом з $\upsilon = k - 3$ ступенями свободи для нормального розподілу. Критична область K має вигляд:

$$K: \quad \chi^2 > \chi_{кр}.$$

Таким чином, якщо $\chi^2_{спостер} < \chi^2_{кр}$, немає підстав відкинути нульову гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Якщо $\chi^2_{спостер} > \chi^2_{кр}$ – нульова гіпотеза відкидається.

Величина $\chi^2_{кр}$ визначається з табл. 8 [ ] за величинами рівня значущості α і числа ступенів свободи υ.

Приклад 6. *За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд*

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	5	6	10	14	9	4	2

Треба виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання

Перепишемо цю таблицю у вигляді (див. табл. 6.3)

$\bar{x}_i$	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
n_i	5	6	10	14	9	4	2

Пункт 1. Для виконання пунктів 1-3 задачі проведемо обчислення, які зведемо в табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Група	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
l_i	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	–
$\bar{x}_i$	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	–
n_i	5	6	10	14	9	4	2	50
$w_i = \frac{n_i}{n}$	0,1	0,12	0,2	0,28	0,18	0,08	0,04	1
F_i^*	0,1	0,2	0,42	0,70	0,88	0,96	1	–
$\frac{n_i}{h}$	1	1,2	2	2,8	1,8	0,8	0,4	–
$\bar{x}_i w_i$	0,75	1,5	3,5	6,3	4,95	2,6	1,5	21,1
$\bar{x}_i^2 w_i$	5,62	18,75	61,25	141,75	136,215	84,5	56,25	504,25

Використовуючи 5 і 6 рядки табл. 6.5 побудуємо емпіричну функцію розподілу та гістограму частот. Вони мають вигляд:

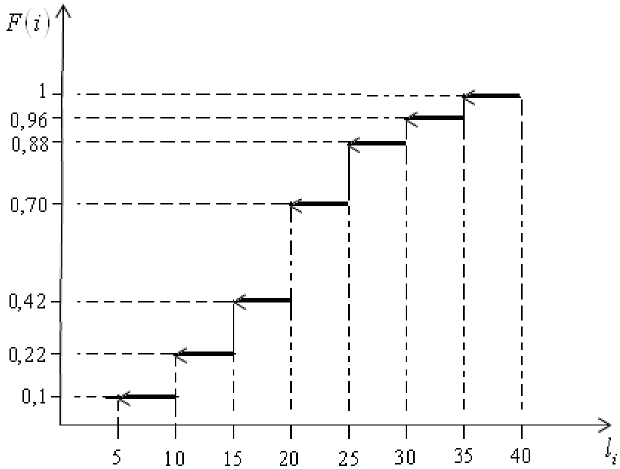


Рис. 6.3

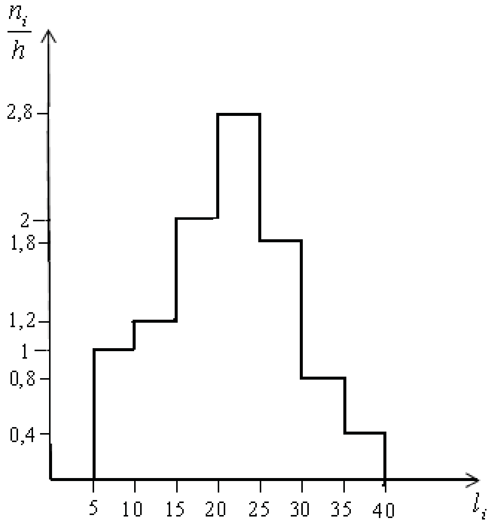


Рис. 6.4

Пункт 2. Для обчислення точкових оцінок використаємо рядки 7 і 8 табл. 6.5. Маємо

$\overline{x}_B = 21{,}1;$

$D_B = 504{,}25 - (21{,}1)^2 = 59{,}04;$

$\sigma_B = \sqrt{59{,}04} = 7{,}68.$

$S^2 = \dfrac{50}{49} \cdot 59{,}04 = 60{,}24;$

$S = \sqrt{60{,}25} = 7{,}76.$

Для перевірки застосуємо систему комп'ютерної математики MATHEMATICA 6.0. Маємо

data:={7.5,7.5,7.5,7.5,7.5,12.5,12.5,12.5,12.5,12.5,12.5,17.5,17.5,17.5,17.5,17.5,17.5,17.5,17.5,17.5,17.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,22.5,27.5,27.5,27.5,27.5,27.5,27.5,27.5,27.5,27.5,32.5,32.5,32.5,32.5,37.5,37.5}

Mean[data]

Variance[data]

StandardDeviation[data

21.1

60.2449

7.76176

Тут

Mean – вибіркова середня $\overline{x_B}$;

Variance – вибіркова виправлена дисперсія S^2;

StandardDeviation – вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B.

Пункт 3. Для побудови довірчих інтервалів для $\overline{x}_Г$ і $\sigma_Г$ використаємо формули (6.11), (6.12).

Маємо $\overline{x}_B = 21{,}1$; $S = 7{,}76$; $\sqrt{n} = \sqrt{50} = 7{,}07$. З табл. значень t_γ (за таблицею розподілу Ст'юдента) при $\gamma = 0{,}95$ і $n = 50$ знаходимо, що $t_\gamma = (0{,}95;\ 50) = 2{,}009$. Тоді

$$21{,}1 - 7{,}76\frac{2{,}009}{7{,}07} < \overline{x}_Г < 21{,}1 + 7{,}76\frac{2{,}009}{7{,}07},$$

або $\overline{x}_Г \in (18{,}89;\ 23{,}31)$.

Для побудови довірчого інтервалу для $\sigma_Г$ знайдемо q з таблиці значень $q = q(\gamma,\ n)$. Маємо $q = (0{,}95;\ 50) = 0{,}21$.

Тоді $$7{,}76 \cdot (1 - 0{,}21) < \sigma_Г < 7{,}76(1 + 0{,}21),$$

або $\sigma_Г \in (6{,}13;\ 9{,}39)$.

Пункт 4. Для виконання цього пункту задачі проведемо обчислення, які зведемо в табл. 6.6.

В нашій задачі $\overline{x}_B = 21{,}1$; $S = 7{,}76$; $h = 5$; $\dfrac{nh}{S} = \dfrac{50 \cdot 5}{7{,}76} = 32{,}22$. Значення функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ взято з табл. 1 [1]. Теоретичні частоти n_i^* обчислюється за формулою (6.14):

Таблиця 6.6

Група	1	2	3	4	5	6	7
l_i	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
$\overline{x}_i$	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
n_i	5	6	10	14	9	4	2
$\overline{x}_i - \overline{x}_B$	$-13,\ 6$	$-8,\ 6$	$-3,\ 6$	$1,\ 4$	$6,\ 4$	$11,\ 4$	$16,\ 4$
$\dfrac{\overline{x}_i - \overline{x}_B}{S}$	$-1{,}75$	$-1{,}11$	$-0{,}46$	0,18	0,82	1,47	2,11
$\varphi\left(\dfrac{x_i - \overline{x_B}}{S}\right)$	0,0863	0,2155	0,3589	0,3925	0,2850	0,1354	0,0431
n_i^*	2,78	6,94	11,56	12,66	9,18	4,36	1,39

Для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки ξ за критерієм згоди Пірсона, обчислимо емпіричне (спостережене) значення статистики Пірсона за (6.13).

$$\chi^2_{спостер} = \frac{(5-2,78\ )^2}{2,78} + \frac{(6-6,94)^2}{6,94} + \frac{(10-11,56)^2}{11,56} + \frac{(14-12,66)^2}{12,66} + \frac{(9-9,18)^2}{9,18} +$$

$$+ \frac{(4-4,36)^2}{4,36} + \frac{(2-1,39)^2}{1,39} \approx 2,58$$

У нашому прикладі кількість груп дорівнює $k = 7$, а отже, число ступенів свободи $\nu = 7-3 = 4$, рівень значущості $\alpha = 0,05$. За табл. [2] критичних точок розподілу χ^2 знаходимо $\chi^2_{кр}(0,05;\ 4) = 9,49$.

Отже, $\chi^2_{спостер} < \chi^2_{кр}$ $(2,58 < 9,49)$.

Тому гіпотеза про нормальний розподіл ознаки ξ генеральної сукупності не відкидається.

ВАРІАНТИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Варіант 1

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^2 + 3x^2 - 1 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0,1x_3 = 0,8 \\ -0,3x_1 + 0,2x_2 + \gamma x_3 = 0,2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0,4;\ \beta = -0,1;\ \gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)dx}\ .$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2,1;\quad \beta = 10,2$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2}(a-x), & 0<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>1)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд.

l_i	–10 - (–5)	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	3	8	12	12	8	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$.

Варіант 2

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^2+2x-11=0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha=0{,}3$; $\beta=0{,}1$; $\gamma=0{,}7$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y=\alpha x^2+bx+x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha=2{,}2$; $\beta=10{,}1$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ a(1+x), & -1<x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання a,середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>-0{,}5)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд.

l_i	–10 - (–5)	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	1	3	12	18	7	7	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$.

Варіант 3

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^5-x-1=0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha=0{,}8;\ \beta=0{,}2;\ \gamma=2{,}3$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_{0,1}^{0,5}\frac{\sin x}{x}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y=ax^2+bx+c$.

Порівняти результати, якщо $\alpha=2{,}3$; $\beta=10$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \frac{2}{3}\left(a+\frac{x}{3}\right), & -3<x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}.$$

Визначити α, математичне сподівання a,середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>-2)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–10 - (–5)	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	2	2	11	19	6	8	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 4

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -1{,}2$; $\beta = 0{,}3$; $\gamma = 3$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y = ax^2 + bx + c$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}4$; $\beta = 9{,}9$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4 \\ \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{4}\right), & -4 < x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*,середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > -3)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–10 - (–5)	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	2	3	15	17	8	4	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 5

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - 4x^2 + 2 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 2;\ \beta = 0{,}4;\ \gamma = 5$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_{0,1}^{0,5} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}5$; $\beta = 9{,}8$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5 \\ \frac{2}{5}\left(a + \frac{x}{5}\right), & -5 < x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*,середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > -3)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–10 - (–5)	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	4	5	10	18	7	5	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 6

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 2x - 28 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -3;\ \beta = -0{,}5;\ \gamma = 4$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}6$; $\beta = 9{,}7$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}(\alpha + 4x), & -\frac{1}{2} < x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*,середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > -0{,}25)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–10 - (–5)	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
n_i	3	6	12	16	6	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 7

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 + x^2 - 3 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -0{,}2;\ \beta = -0{,}6;\ \gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}7$; $\beta = 9{,}8$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{1}{2} \\ \alpha - 4x, & -\dfrac{1}{2} < x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > -0{,}25)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
n_i	3	8	12	12	8	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 8

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}8x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -0{,}1$; $\beta = 0{,}7$; $\gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 x \ln(1 + x) dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}8$; $\beta = 9{,}9$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{2}{3}(\alpha - x), & -1 < x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Визначити α ,математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > -0{,}5)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
n_i	1	3	12	18	7	7	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 9

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$1{,}2x^3 - 2{,}8x^2 - 0{,}8 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}8$; $\gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^2 \sqrt{1 + x^5}\, dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}9$; $\beta = 10$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{1}{6}(\alpha-2x), & -2<x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання a, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>-1)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
n_i	2	2	11	19	6	8	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$.

Варіант 10

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}9x^2+1{,}8x-11{,}5=0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha=0{,}6;\ \beta=-0{,}8;\ \gamma=1{,}2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 x(2-x)dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y=ax^2+bx+c$

Порівняти результати, якщо $\alpha=3{,}9$; $\beta=10{,}1$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ -\frac{x}{2}+a, & -1<x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > -1)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
n_i	2	3	15	17	8	4	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант11

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}9x^5 - x - 1 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}4;\ \beta = -0{,}7;\ \gamma = 1{,}2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2 + x^2}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}1;\quad \beta = 10{,}2$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \alpha - x^2, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}5)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
n_i	4	5	10	18	7	5	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант12

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^5 - 0{,}8x - 1 = 0\,.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}3;\ \beta = -0{,}6;\ \gamma = 1{,}2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^{0{,}5} \frac{\sin x}{x+1}\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}2$; $\beta = 10{,}3$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \alpha - \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 1)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	–5 - 0	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
n_i	3	6	12	16	6	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант13

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$1{,}5x^3 - 2x - 5{,}5 = 0\,.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}8;\ \beta = -0{,}5;\ \gamma = 0{,}9$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\sin x\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}3$; $\beta = 10{,}5$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{2}{3}x\right), & 0 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 2)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	3	8	12	12	8	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 14

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - 3{,}5x^2 + 1{,}5 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -1{,}2;\ \beta = -0{,}4;\ \gamma = 2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\cos x\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}4$; $\beta = 10{,}7$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - \dfrac{x}{4}\right), & 0 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання a,середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 3)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	1	3	12	18	7	7	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 15

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}8x^3 - 3{,}9x^2 + 1{,}9 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 2$; $\beta = -0{,}3$; $\gamma = 2{,}5$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}5$; $\beta = 10{,}9$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{2}{\alpha}\left(1 - \dfrac{x}{5}\right), & 0 < x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 3)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано наступний груповий статистичний ряд:

l_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	2	2	11	19	6	8	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 16

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд,методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^4 - 6x^2 + 10x^2 + 2x - 27 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 1$; $\beta = 0{,}5$; $\gamma = 2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_{0,1}^{0,5} xe^x dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді
$y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}6$; $\beta = 9{,}5$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\alpha}(5-4x), & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>0{,}25)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	2	3	15	17	8	4	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$.

Варіант 17

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3-2{,}9x^2-3{,}1=0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha=-0{,}2$; $\beta=-0{,}1$; $\gamma=-0{,}5$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_{0,2}^{0,5}\frac{e^x}{x+1}dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y=\alpha x^2+bx+x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha=3{,}3$; $\beta=11{,}3$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 4x+\alpha, & 0<x\le \dfrac{1}{2}\\ 0, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання a, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}25)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	4	5	10	18	7	5	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 18

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд,методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - 2{,}8x^2 - 1{,}5 = 0\,.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha\\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8\\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha = -0{,}1$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 x\ln(5+x)dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:

$y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}2$; $\beta = 11{,}5$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\alpha}\left(1-\dfrac{x}{6}\right), & 0<x\le 6\\ 0, & x>6\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 4)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	3	6	12	16	6	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 19

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо: $0{,}7x^3 - 4{,}3x^2 + 2{,}3 = 0$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}5$; $\beta = -0{,}1$; $\gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}1$; $\beta = 11{,}7$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{6}(\alpha x + 1), & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 1)$

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	3	8	12	12	8	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 20

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}8x^5 - 2{,}1x - 1 = 0\,.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}6;\ \beta = -0{,}2;\ \gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді: $y = ax^2 + bx + c$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}0;\ \beta = 11{,}9$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{3}(\alpha x + 2), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}5)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	1	3	12	18	7	7	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 21

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - x - 1 = 0\,.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}4;\ \beta = 0{,}7;\ \gamma = 2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 x \sin\sqrt{x}\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}9;\ \beta = 12{,}1$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x - \alpha, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}5)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	2	2	11	19	6	8	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 22

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - 1{,}473x^2 - 5{,}798x + 6{,}763 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}3;\ \beta = 0{,}3;\ \gamma = 3$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^2 \sqrt{3+x^5}\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:

$y=\alpha x^2+bx+x$

Порівняти результати, якщо $\alpha=2{,}8;\ \beta=12{,}3$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{\alpha}(2x+1), & 0<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Визначити α,математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>1)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	2	3	15	17	8	4	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$.

Варіант 23

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}4x^3-12{,}3x^2-x+16{,}2=0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha=0{,}8;\ \beta=-0{,}3;\ \gamma=1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_2^{10}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:

$y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}7;\ \beta = 12{,}5$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 3x^2 + \alpha, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}5)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	4	5	10	18	7	5	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 24

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - 0{,}39x^2 - 10{,}5x + 11 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -1{,}2;\ \beta = 0{,}7;\ \gamma = 2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 e^{x^3}\,dx.$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді

$y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}6;\ \beta = 12{,}7$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \alpha x+2, & 0<x\le \frac{1}{3}\\ 0, & x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}2)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	3	6	12	16	6	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 25

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^4-26x^3+121x^2-226x+120=0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha = 2$; $\beta = 0{,}2$; $\gamma = 3$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:
$y=\alpha x^2+bx+x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 2{,}6$; $\beta = 12{,}7$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{2}{\alpha\left(1-\dfrac{x}{7}\right)}, & 0<x\le 7\\ 0, & x>7\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi>4)$.

6. За результатами $n=50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
n_i	3	8	12	12	8	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma=0{,}95$; $\alpha=0{,}05$.

Варіант 26

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^4-7x^3+12x^2+4x-16=0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_3=\alpha\\ \beta x_1+x_2-0{,}1x_3=0{,}8\\ -0{,}3x_1+0{,}2x_2+\gamma x_3=0{,}2\end{cases}$$

якщо $\alpha=-3$; $\beta=-0{,}2$; $\gamma=4$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^{0{,}6}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді

$y=\alpha x^2+bx+x$

Порівняти результати, якщо $\alpha=2{,}4$; $\beta=13{,}1$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\alpha}{2}-x, & 0<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 1)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	1	3	12	18	7	7	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 27

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо: $x^3 - 0{,}9x - 1{,}1 = 0$.

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -0{,}2$; $\beta = 0{,}5$; $\gamma = 2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx.$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}2$; $\beta = 13{,}3$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{\alpha}, & 0 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 1)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	2	2	11	19	6	8	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 28

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд,методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$x^3 - x^2 - 6x + 7 = 0 .$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = -0{,}1;\ \beta = 0{,}5;\ \gamma = 3$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + 3x + 2}$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = \alpha x^2 + bx + x$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}6;\ \beta = 13{,}5$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{2}{\alpha}, & 0 < x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання *a*, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 1)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	2	3	15	17	8	4	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 29

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд, методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо

$$x^3 - 3{,}1x^2 - 2{,}8 = 0$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}5;\ \beta = -0{,}4;\ \gamma = 1$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді:

$y = \alpha x^2 + bx + x$

Порівняти результати, якщо $\alpha = 3{,}8;\ \beta = 13{,}7$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{x}{32}, & 0 < x \le 8 \\ 0, & x > 8 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання a, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 4)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано наступний груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	4	5	10	18	7	5	1

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

Варіант 30

1. Відокремити дійсні корені алгебраїчного рівняння і за допомогою методу хорд,методу дотичних та методу послідовних наближень обчислити найменший корінь. Зробити порівняння, якщо:

$$0{,}9x^5 - 1{,}1x - 1 = 0.$$

2. Методом Гаусса-Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = \alpha \\ \beta x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + \gamma x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

якщо $\alpha = 0{,}6;\ \beta = 0{,}4;\ \gamma = 2$.

3. Наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою методу трапецій та методу Сімпсона. Зробити порівняння:

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

4. Знайти інтерполяційний поліном Лагранжа, якщо функція задана таблично:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	2	α	6	β	17

За допомогою методу найменших квадратів знайти її наближення у вигляді $y = ax^2 + bx + c$.

Порівняти результати, якщо $\alpha = 4$; $\beta = 13{,}9$.

5. Щільність розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{\alpha}(2x+2), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Визначити α, математичне сподівання a, середнє квадратичне відхилення σ та ймовірність $p(\xi > 0{,}5)$.

6. За результатами $n = 50$ вимірювань значень деякої ознаки (випадкової величини) ξ отримано такий груповий статистичний ряд:

l_i	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n_i	3	6	12	16	6	5	2

Виконати пункти 1) – (4) задачі 6, якщо $\gamma = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – У 2-х т.; Т. 1.–К.: КУЕТТ, 2006. – 338 с..
2. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – У 2-х т. ; Т. 2.-К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
3. Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М. М. – У 2-х ч.; Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
4. Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М.М.: – У 2-х ч.; Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.

Додаткова література

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
2. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика.: Збірник задач. – К.: Вища школа, 2001. – 480 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика.– М.: Высшая школа, 1999. – 476 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1999. – 400 с.
5. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. –. У 2-х ч.; Ч. 1.– К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
6. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика. – У 2-х ч.; Ч. 2.– К.: КНЕУ, 2001. –336 с.

Навчально-методичне видання

Крюков Микола Миколайович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №4
Для студентів денної форми навчання за напрямами підготовки:
6.070105 Залізничні споруди та колійне господарство;
6.070105 Рухомий склад та спеціальна техніка вагонів;
6.050702 Електромеханіка

Редакція авторська

Підписано до друку 27.06.13. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Спосіб друку – ризографія. Зам. № 127/13. Тираж 25 прим.

Державний економіко-технологічний університет транспорту
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.07. Серія ДК № 3079.
03049, м. Київ – 049, вул. Миколи Лукашевича, 19