МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

Т.В. Крижановська, О.О. Кільчинський,

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки щодо виконання розрахункової роботи №4
Для студентів денної форми навчання
за напрямом 6.050202
«Автоматика і автоматизація на транспорті»

Київ 2015

УДК 51:517

Крижановська Т.В., Кільчинський О.О.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ: Методичні вказівки щодо виконання розрахункової роботи. Для студентів денної форми навчання за напрямом 6.050202 «Автоматика і автоматизація на транспорті»/ Крижановська Т.В., Кільчинський О.О. – К.: ДЕТУТ, 2015. – 109 с.

Методичні вказівки складені відповідно до навчальної програми дисципліни «Теорія ймовірностей і випадкових процесів». В них окреслено коло питань для підготовки по основних темах курсу, наведено необхідні теоретичні відомості та приклади їх застосування при розв'язанні типових задач. Розроблено 30 варіантів індивідуальних завдань для самостійного опрацювання студентами.

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 2 від 29.10.2014 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки і менеджменту (протокол № 3 від 25.11.2014р.).

Призначені для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно - інтегровані технології».

Укладачі: *Крижановська Т.В.*, к.ф.-м.н., професор,
Кільчинський О.О., к.ф.-м.н., доцент

Рецензенти: *Козлов В.І.* д.ф.-м.н.,
Андрейцев А.В., к.ф.-м.н., доцент

ЗМІСТ

Передмова та загальні методичні поради

Методичні вказівки складені для поглиблення, засвоєння, набуття навичок самостійної роботи та контролю знань студентів по розділах вищої математики, що вивчаються у 2 семестрі І курсу за спеціальностями АСТЗ та КІКС (напрям підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології»). З цією метою розроблено тематику і викладено відповідну методику розв'язування типових задач по всіх варіантах розрахункової роботи. Послідовність розв'зування типових задач співпадає з послідовністю вивчення тем у навчальному курсі і послідовністю задач у варіантах розрахункової роботи.

При виконанні розрахункової роботи студент повинен дотримуватись таких вимог:

1) номер варіанта індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
2) розрахункова робота виконується на аркушах паперу у форматі А4;
3) перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписується її умова і всі конкретні дані до відповідного варіанта;
4) розв'язування кожної задачі повинно супроводжуватись необхідними поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

1) ознайомитись з наведеним переліком питань з дисципліни «Вища математика» і опанувати відповідний теоретичний матеріал з допомогою конспекта лекцій та рекомендованої літератури;
2) ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до індивідуальних завдань;
3) роботу над варіантами виконувати поетапно протягом всього семестру (в міру проходження відповідних тем лекційних та практичних занять);
4) по завершенні кожного з етапів відповідна частина роботи (що оформлена належним чином) подається на перевірку викладачу;
5) повністю завершену роботу треба здати на перевірку викладачу не пізніше ніж за два тижні до кінця семестру;
6) студенти, які не виконали індивідуальних завдань і не здали роботу вчасно, не допускаються до іспиту з дисципліни як такі, що не виконали навчальний план.

I. Питання з дисципліни

«Теорія ймовірностей та випадкових процесів»

1. Поняття випадкового (стохастичного) експерименту, випадкової події та простору елементарних подій.
2. Сума та добуток подій. Події несумісні та сумісні.
3. Повна група подій, протилежні події.
4. Комбінаторні правила суми та добутку.
5. Перестановки, розміщення та комбінації.
6. Статистичне та класичне означення ймовірності події.
7. Аксіоми теорії ймовірностей.
8. Теорема про ймовірність суми сумісних подій.
9. Теорема про ймовірність протилежної події.
10. Умовна ймовірність. Незалежні та залежні події.
11. Теорема про ймовірність добутку залежних подій.
12. Формула повної ймовірності та формула Байєса.
13. Повторення випробувань (схема Бернуллі). Формула Бернуллі.
14. Найімовірніша кількість успіхів у схемі Бернуллі.
15. Асимптотичні формули Пуассона та Муавра-Лапласа (локальна теорема Лапласа) для наближених обчислень за схемою випробувань Бернуллі.
16. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.
17. Випадкова величина (ВВ). Дискретна та неперервна ВВ.
18. Інтегральна функція розподілу та її властивості.
19. ДискретнаВВ: способи задання, знаходження інтегральної функції розподілу.
20. Неперервна ВВ: диференціальна функція розподілу (щільність розподілу ймовірностей) та її властивості.
21. Числові характеристики дискретної та неперервної ВВ, їх властивості.
22. Біноміальний та пуассонівський розподіли дискретної ВВ.
23. Нормальний розподіл неперервної ВВ, функція Лапласа та її властивості.
24. Рівномірний та показниковий озподіли неперервної ВВ.
25. Двовимірні дискретні та неперервні ВВ. Функція розподілу двовимірної ВВ та її властивості.
26. Закон розподілу двовимірної дискретної ВВ. Знаходження одновимірних законів розподілу.
27. Закон розподілу двовимірної неперервної ВВ. Двовимірна щільність розподілу та її властивості.
28. Залежні та незалежні ВВ. Умовні закони розподілу, умовні функції та щільності розподілу.
29. Числові характеристики двовимірних дискретних і неперервних ВВ, їх властивості.
30. Поняття випадкового процесу (ВП), його фазового простору, перерізу та реалізації.

31. Характеристики ВП: математичне сподівання, кореляційна функція та дисперсія.
32. Властивості математичного сподівання та кореляційної функції ВП.
33. Взаємна кореляційна функція та її властивості.
34. Вихідні характеристики ДС (динамічної системи) при лінійному перетворенні ВП $\xi(t)$ за формулою $\eta(t) = \varphi(t)\xi(t) + \psi(t)$.
35. Границя, неперервність та диференціювання ВП. Знаходження характеристик ВП $\eta(t) = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$.
36. Інтегрування ВП.
37. Стаціонарні ВП у вузькому та широкому розумінні.
38. Лінійні перетворення стаціонарного ВП.
39. Стаціонарні ВП з дискретним та неперервним спектрами.
40. Марковські ВП та їхні властивості.
41. Однорідні ланцюги Маркова: означення, фізична інтерпретація, способи імовірнісного описування.
42. Однорідні ланцюги Маркова: перехідні ймовірності за n кроків, абсолютні та фінальні ймовірності.
43. Однорідні марковські процеси з неперервним часом. Матриця інтенсивностей та її властивості.
44. Однорідні марковські процеси з неперервним часом. Розмічений граф станів, рівняння Колмогорова, фінальні ймовірності.
45. Ергодичні випадкові процеси.

II. Теоретичні відомості та методика розв'язування типових задач

1. Задачі на формулу класичної ймовірності.

А. Теоретичні відомості

Основні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – це розділ математики, який вивчає закономірності у випадкових явищах.

Означення 1. **Елементарною подією** називається кожен з можливих результатів даного випробування.

Означення 2. **Простором елементарних подій** Ω називається множина всіх елементарних подій даного випробування.

Означення 3. **Подією** називається будь-яка підмножина простору елементарних подій.

Означення 4. **Випадковою подією** A називається подія, яка в результаті даного випробування може відбутися, а може не відбутися.

Означення 5. **Достовірною подією** Ω називається подія, яка обов'язково відбудеться в умовах даного випробування.

Означення 6. **Неможливою подією** $\varnothing$ називається подія, яка не може відбутися в умовах даного випробування.

Означення 7. Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої події у тому ж самому випробуванні.

Означення 8. Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої події у тому ж самому випробуванні.

Означення 9. Дві події A і $\overline{A}$ називають **протилежними**, якщо вони несумісні і хоча б одна з них неодмінно настає в умовах даного випробування (подія A настає тоді, коли не настає $\overline{A}$, і навпаки).

Означення 10. **Ймовірністю події** A називається числова характеристика $P(A)$ степеня можливості цієї події в даному випробуванні.

Класичне означення ймовірності

Означення 11. **Ймовірністю випадкової події** A називається відношення

кількості m рівноможливих елементарних подій, що сприяють появі події A до кількості n всіх можливих елементарних подій даного випробування:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Зауваження 1. Щоб обчислити ймовірність події A за класичним означенням, потрібно вміти знаходити кількість сприятливих елементарних подій та кількість всіх елементарних подій даного випробування. Для цього застосовують правила та формули комбінаторики.

Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B – n способами, то один з об'єктів A або B можна вибрати $m+n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами а об'єкт B – n способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати mn способами.

Основні формули комбінаторики

Перестановками з *n* елементів називаються всі множини, що складаються із заданих n елементів і відрізняються лише їх порядком. Кількість таких перестановок знаходиться за формулою:

$$P_n = n! \qquad (2)$$

Розміщеннями з *n* елементів по *k* елементів називаються всі множини, що складаються з k різних елементів, вибраних серед n існуючих, і відрізняються або складом, або порядком. Кількість таких розміщень знаходиться за формулою:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (3)$$

Комбінаціями з *n* елементів по *k* елементів називаються всі множини, що складаються з k різних елементів, вибраних серед n існуючих, і відрізняються хоча б одним елементом. Кількість таких комбінацій знаходиться за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Б. Методика розв'язування задач

*Приклад 1***.** Знайти ймовірність того, що карта, витягнута навмання з колоди у 36 карт, буде тузом.

Розв'язання: Розглянемо подію A – з колоди витягли туза. Сприятливих для даної події результатів буде чотири (в колоді чотири тузи), отже $m=4$. Всіх рівноможливих результатів буде 36, тому $n=36$. За класичним означенням ймовірності (1) знаходимо: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Відповідь: $\frac{1}{9}$.

Приклад 2. Кинуто два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що у сумі на них випала парна кількість очок, якщо хоча б на одному випала цифра 3.

Розв'язання: Простір елементарних подій цього експерименту складається з $n = 36$ впорядкованих пар чисел (очок на першій і другій гранях). Появі парної кількості очок сприяють п'ять елементарних подій, які складають множину $\{(3;1),(3;3),(3;5),(1;3),(1;5)\}$. Отже, $m = 5$. За класичним означенням ймовірності (1) маємо: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

Відповідь: $\frac{5}{36}$.

Приклад 3. За підсумками року акції 4 фірм з 10 конкуруючих в даній галузі мали прибуток, а акції решти – знецінились. Визначити ймовірність того, що серед випадково куплених 7 акцій різних фірм 3 акції дадуть прибуток.

Розв'язання: Спочатку розглянемо сприятливі для нас результати випробування. Тобто з 7 придбаних акцій різних фірм 3 виявилися прибутковими, а решта $7 - 3 = 4$ – збиткові. За формулою (4) три акції від чотирьох фірм, які мали прибуток, можна вибрати m_1 способами:

$$m_1 = C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Збиткових 4 акції від 6 фірм (акції яких знецінились) можна отримати m_2 способами:

$$m_2 = C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

Кількість сприятливих результатів випробування знайдемо за правилом добутку:

$$m_1 \cdot m_2 = C_4^3 \cdot C_6^4 = 60.$$

Кількість n усіх можливих результати випробування, тобто усіх можливих варіантів купівлі 7 акцій від 10 різних фірм, знайдемо за тією ж формулою (4):

$$n = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120.$$

За формулою класичної ймовірності (1) шукана ймовірність дорівнює відношенню числа результатів випробувань, сприятливих для розглядуваної події, до числа всіх рівноможливих результатів випробувань:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{60}{120} = 0{,}5$$

Відповідь: $0{,}5$.

2. Задачі на основні теореми теорії ймовірностей, застосування умовної ймовірності та залежності, незалежності подій.

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Умовною ймовірністю** $P(A/B)$ називаються величина, яка визначається за формулою

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B)\neq 0)$$

і має зміст ймовірність події *A*, знайденої у припущенні, що подія *B* вже сталася.

Означення 2. Події *A* і *B* називають **незалежними**, якщо

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B), \tag{5}$$

тобто поява події *A* не змінює ймовірність появи події *B*. У протилежному випадку події *A* і *B* називають **залежними**. Тоді

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A). \tag{6}$$

Наслідок. Ймовірність добутку подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ знаходиться за формулою:

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2A_3\cdots A_{n-1})). \tag{7}$$

Означення 3. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо

кожна з них незалежна із добутком довільної кількості інших. Для незалежних у сукупності подій маємо:

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdots P(A_n). \tag{8}$$

Означення 4. **Сумою** $A+B$ (або об'єднанням $A\bigcup B$) подій *A* і *B* називається подія, яка полягає в тому, що настає принаймні одна з подій A, B.

Означення 5. **Добутком** AB (або перетином $A\bigcap B$) подій *A* і *B* називається подія, яка настає тоді і тільки тоді, коли одночасно настають обидві події A, B.

Аксіоми теорії ймовірностей

Аксіома 1. $P(A)\geq 0$ для будь-якої події A.

Аксіома 2. $P(\Omega)=1$ для достовірної події Ω.

Аксіома 3. Якщо $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n, ...$ довільна послідовність попарно несумісних подій, то $P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$

Основні теореми теорії ймовірностей:

Теорема 1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\varnothing)=0.$$

Теорема 2. $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$.

Теорема 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1. \tag{9}$$

Теорема 4. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій *А* або *В* дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right). \tag{10}$$

Наслідок. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... , $\overline{A_n}$:

$$P\left(A\right)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n})=1-q_1q_2\ldots q_n. \tag{11}$$

Б. Методика розв’язування задач

Приклад 1. Протягом поточного місяця банк може видати 20 позик: 8 довгострокових і 12 короткострокових. Знайти ймовірність того, що дві перших виданих позики будуть довгостроковими.

Роз’язання: Нехай подія A полягає в тому, що перша позика довгострокова, подія B – друга позика довгострокова. Оскільки події A і B є залежними (кількість позик обмежена), то за означенням класичної ймовірності матимемо:

$$P\left(A\right)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}; \quad P\left(B/A\right)=\frac{7}{19}.$$

Ймовірність події AB – перші дві позики довгострокові − знайдемо за формулою (6) ймовірності добутку залежних подій:

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{19}=\frac{14}{95}.$$

Відповідь: $\frac{14}{95}$.

Приклад 2. Два менеджери по роботі з клієнтами можуть отримати підвищення з ймовірностями 0,6 і 0,3 незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що підвищення отримає тільки один з них.

Розв'язання: Позначимо через A і B випадкові події, які полягають у тому, що перший і другий менеджери отримали підвищення. Ймовірності цих подій дано в умовах задачі:

$$P(A) = 0{,}6; \quad P(B) = 0{,}3.$$

Ймовірності протилежних подій $\overline{A}, \overline{B}$ – підвищення не отримали – знайдемо зі співвідношення (9):

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Ймовірності подій $A\overline{B}$ та $\overline{A}B$ (перший менеджер отримав підвищення, а другий – ні та другий отримав підвищення, другий − ні) знайдемо за означенням незалежності подій:

$$P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42, \ P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12.$$

Ймовірність того, що підвищення отримав тільки один з менеджерів визначимо за аксіомою 3:

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54.$$

Відповідь: 0,54.

Приклад 3. Перевірка деякого підприємства пожежною, санітарною та податковою інспекцією може виявити порушення з ймовірностями відповідно $0{,}11$; $0{,}24$; $0{,}35$ незалежно одна від іншої. Знайти ймовірність того, що в результаті інспекції буде виявлено хоча б одне порушення.

Роз'язання: Позначимо через A, B і C події, які полягають в тому, що в результаті пожежної, санітарної та податкової інспекції буде виявлено порушення. За умовою задачі маємо:

$$P(A) = 0{,}11; \quad P(B) = 0{,}24; \quad P(C) = 0{,}35.$$

Ймовірності протилежних подій (порушень не виявлено) оотримаємо зі співвідношення (9):

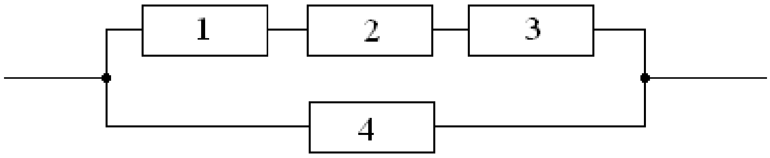
$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89; \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}24 = 0{,}76; \quad P(\overline{C}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65.$$

Ймовірність виявлення порушень знайдемо за формулою (11) (про ймовірність появи хоча б однієї з подій):

$$P = 1 - P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) \cdot P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}89 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}35 = 0{,}76326.$$

Відповідь: 0,76326.

Приклад 4. Знайти ймовірність безвідмовної роботи електричного ланцюга, який подано на рис., якщо ймовірності роботи елементів 1-4 задано: $p(A_1) = 0{,}6; \quad p(A_2) = 0{,}7; \quad p(A_3) = 0{,}8; \quad p(A_4) = 0{,}9$.



Розв'язання: Ймовірність безвідмовної роботи ланцюга дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи кожного з елементів у разі їхнього послідовного з'єднання або ймовірності роботи хоча б одного елемента у разі паралельного з'єднання елементів.

Елементи 1, 2 і 3 з'єднані послідовно, отже вони мають працювати всі і ймовірність їх безвідмовної роботи буде:

$$p_{123} = p_1 p_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336;$$

Елемент 1 і блок 2,3,4 з'єднані паралельно, отже має працювати хоча б один з них і ймовірність роботи всього ланцюга буде:

$$P(A) = 1 - q_4 q_{123} = 1 - (1 - p_4)(1 - p_{123}) =$$
$$= 1 - (1 - 0{,}336) \cdot (1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}0664 = 0{,}9336.$$

Відповідь: $0{,}9336$.

3. Задачі на формулу повної ймовірності та формулу Байєса

А. Теоретичні відомості

Теорема 1. Ймовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A, тобто

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i). \qquad (12)$$

Рівність (12) називають «*формулою повної ймовірності*».

Формула Байєса

Нехай подія A може настати за умови появи однієї з подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, які утворюють повну групу. Такі події називають *гіпотезами*, оскільки невідомо, яка саме з цих подій відбувається. Імовірність $P(A)$ визначається за формулою

(3.1). Припустимо, що проведено випробування, в якому подія A настала. Як при цьому зміняться ймовірності гіпотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$?

Якщо до випробування ймовірності гіпотез були $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$, а внаслідок випробування з'явилася подія A, тоді з урахуванням цієї події, умовні ймовірності гіпотез обчислюють за формулою Байєса:

$$P(B_k / A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A / B_k)}{P(A)}, \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i) \ \left(k = \overline{1; n}\right), \tag{13}$$

Ця формула дозволяє переоцінити ймовірності подій B_1, B_2, ..., B_n після того, як в результаті випробування подія A настала.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує 40 підприємств, серед яких 25% не мають заборгованостей, другий – 60 підприємств, із них 40% – без заборгованостей. Яка ймовірність того, що навмання обране підприємство не має заборгованості?

Розв'язання: Розглянемо події: B_1 – під перевірку потрапило підприємство, що обслуговуються першим інспектором; B_2 – потрапило підприємство, що обслуговуються другим інспектором; A – навмання обране підприємство не має заборгованості. Події B_1 і B_2 несумісні і утворюють повну групу (одна з них обов'язково відбудеться і настання однієї події виключає настання іншої). З умови задачі відомі ймовірності :

$P(B_1) = 0{,}4$, $P(B_2) = 0{,}6$.

Умовні ймовірності події A: $P(A / B_1) = 0{,}25$ – ймовірність того, що навмання обране підприємство не має заборгованості, при умові що воно обслуговувалось першим інспектором, $P(A / B_2) = 0{,}4$ – ймовірність, що навмання обране підприємство не має заборгованості, при умові його обслуговування другим інспектором.

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = P(B_1)P(A / B_1) + P(B_2)P(A / B_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}34.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}34$.

Приклад 2. Фінансовий аналітик оцінив шанси як $2:3$, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця (зростання ціни не передбачається). Імовірність продажу облігацій у разі падіння ціни оцінюється у 0,75. Якщо падіння ціни не відбудеться, то ймовірність продажів оцінюється у 0,55. Яка ймовірність того, що облігації буде продано у наступному місяці?

Розв'язання: Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що облігації буде продано у наступному місяці. Ця подія може настати лише з гіпотезами B_1, B_2: B_1 – ціна облігації упаде протягом наступного місяця; B_2 – ціна облігації не упаде протягом наступного місяця. Ймовірності гіпотез визначимо за оцінками аналітика:

$$P(B_1) = \frac{2}{5} = 0{,}4, \qquad P(B_2) = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Умовна ймовірність того, що облігації буде продано у разі падіння ціни, дорівнює $P(A/B_1) = 0{,}75$.

Умовна ймовірність того, що облігації буде продано, якщо падіння ціни не відбудеться дорівнює $P(A/B_2) = 0{,}55.$.

Ймовірність події A − того, що облігації буде продано у наступному місяці − знайдемо за формулою повної ймовірності (12):

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) = 0{,}4\cdot 0{,}75 + 0{,}6\cdot 0{,}55 = 0{,}3 + 0{,}33 = 0{,}63.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}63$.

Приклад 3. Три оператори виконують комп'ютерний набір пакета документів. При цьому продуктивності їх праці співвідносяться, як $10:8:12$. Імовірність помилок при наборі для кожного з операторів відповідно дорівнюють $0{,}02$; $0{,}07$ і $0{,}01$. Наприкінці робочого дня документи, набрані операторами, підшивають в одну папку. Яка ймовірність того, що навмання вибраний з папки пакет документів не матиме помилок?

Розв'язання: Позначимо через A подію: навмання вираний з папки пакет документів не матиме помилок. Через B_1, B_2, B_3 позначимо події, які полягають у тому, що документи набрано відповідно першим, другим, третім операторами. За співвідношеннями продуктивності праці операторів обчислимо ймовірності:

$$P(B_1) = \frac{10}{10+8+12} = \frac{1}{3}, \quad P(B_2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}, \quad P(B_3) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

Умовні ймовірності того, що вибраний пакет документів без помилок набрано відповідно першим, другим, третім операторами знайдемо у вигляді:

$$P(A/B_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98,\ P(A/B_2) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93,\ P(A/B_3) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

За формулою повної ймовірності матимемо:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}98 + \frac{4}{15}\cdot 0{,}93 + \frac{2}{5}\cdot 0{,}99 = \frac{14{,}56}{15} = 0{,}97.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}97$.

Приклад 4. Маємо два набора інструментів. Ймовірність того, що інструмент з першого набора стандартний дорівнює 0,8, а з другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що випадково вибраний інструмент є стандартним.

Розв'язання: Позначимо через A – подію, яка складається з того, що випадково вибраний інструмент стандартний; подія B_1, – інструмент взято з першого набору, B_2 – інструмент взято з другого набору. Оскільки інструмент вибирається випадково, то можемо припустити, що $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$. З умови задачі випливає, що $P(A/B_1) = 0{,}8$, $P(A/B_2) = 0{,}9$. Підставляємо всі знайдені величини в формулу (12):

$$P(A) = 1/2 \cdot 0{,}8 + 1/2 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}85.$

Приклад 5. Банківський службовець збереже своє місце роботи з ймовірністю 0,8, якщо голова правління банку буде переобраний на новий термін та з ймовірністю 0,65, якщо буде обраний новий голова. Імовірність переобрання голови становить 0,5. Відомо, що службовець зберіг своє місце роботи після виборів. Яка ймовірність того, що голова правління банку буде переобраний на новий термін?

Розв'язання: Позначимо через A подію – службовець зберіг своє місце роботи після виборів, через B_1 – голова правління буде переобраний; через B_2 – буде обраний новий голова правління. Необхідно визначити $P(B_1 / A)$. За умовою ймовірності гіпотез дорівнюють $P(B_1) = 0{,}5$, $P(B_2) = 0{,}5$. Умовна ймовірність того, що службовець збереже місце роботи, коли голова правління буде переобраний, дорівнює $P(A/B_1) = 0{,}8$. Умовна ймовірність того, що службовець збереже місце роботи, коли буде обраний новий голова, дорівнює $P(A/B_2) = 0{,}65$. За формулою Байєса (13) матимемо:

$$P(B_1 / A) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}65} = \frac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}325} \approx 0{,}55.$$

Відповідь: $P(B_1 / A) = 0{,}55.$

Приклад 6. Деталі потрапляють на перевірку двом контролерам. Імовірність потрапляння деталі першому контролеру дорівнює 0,6, а другому – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь при перевірці була визнана придатною першим контролером дорівнює 0,94, другим – 0,98. Яка ймовірність того, що цю деталь перевіряв перший контролер?

Розв'язання: Розглянемо подію A – придатна деталь визнана придатною − та гіпотези, з якими вона може статися: подію B_1 (деталь перевірив перший контролер) та подію B_2 (перевірив другий). Тоді з умови задачі маємо:

$$P(B_1)=0{,}6; \quad P(B_2)=0{,}4; \quad P(A/B_1)=0{,}94; \quad P(A/B_2)=0{,}98.$$

За формулою (13) обчислимо ймовірність того, що перевірку робив перший контролер:

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}=0{,}59.$$

Видно, що ймовірність гіпотези B_1 за умови, що сталася подія A, змінилася (зменшилася).

Відповідь: $P(B_1/A)=0{,}59$.

4. Задачі на формулу Бернуллі

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Послідовністю незалежних випробувань** відносно події A називається така послідовність випробувань, в яких ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результату інших випробувань.

Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитися зі сталою ймовірністю p. Потрібно обчислити ймовірність $P_n(m)$ того, що при n незалежних випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів. Імовірність такої події обчислюється за формулою

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{14}$$

де $C_n^m=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, ($q=1-p$, $m=1,2,3,\ldots,n$).

Формула (14) називається *формулою Бернуллі.* Позначимо через $P_n(m_1\le m\le m_2)$ ймовірність того, що в n випробуваннях подія A настає не менше ніж m_1 і не більше ніж m_2 разів $(0\le m_1\le m_2\le n)$. Тоді ймовірність появи події за n випробувань від m_1 до m_2 разів обчислюється за формулою:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$$

Найімовірніше число успіхів

Те значення m, якому відповідає найбільше значення $P_n(m)$, називається **найімовірнішим числом успіхів** і позначається m_0.

У загальному випадку найімовірніше число успіхів m_0 визначається з такої системи нерівностей:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \tag{15}$$

Якщо $(np - q)$ неціле, то $m_0 = [np + p]$, де $[np + p]$ – ціла частина числа, якщо $(np - q)$ – ціле, то в цьому випадку буде два найімовірніших числа:

$m'_0 = np - q, \quad m''_0 = np + p$.

Приклад 1. Серед 10 транспортних засобів, що пропонуються до продажу приватною фірмою, 2 вимагають капітального ремонту. На місці визначити, який з транспортних засобів потребує ремонту, неможливо. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання вибраних автомобілів: 1) 2 потребують ремонту; 2) не більше 2-х потребують ремонту.

Розв'язання: Перевірка технічного стану кожного автомобіля – випробування. Кількість потрібних випробувань $n = 5$. Імовірність p того, що вибраний навмання автомобіль потребує ремонту знайдемо за класичним означенням ймовірності: $p = \frac{2}{10} = 0{,}2$. Ймовірність протилежної події – того, що автомобіль не потребує ремонту – визначимо як $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Далі скористаємось формулою Бернуллі (14) при знайдених n, p, q різних та різних значеннях m .

1) Ймовірність того, що 2 автомобілі потребують ремонту знайдемо як величину $P_5(2)$:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^3 = \frac{5!}{2!3!} 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048 \approx 0{,}205.$$

2) Позначимо через A подію – не більше 2-х автомобілів потребують ремонту. Ця подія є сумою таких несумісних подій: жоден з автомобілів не вимагає ремонту (подія B_0), один автомобіль потребує ремонту (подія B_1)та два автомобілі вимагають ремонту (подія B_2):

$$A = B_0 + B_1 + B_2$$

Ймовірність кожної з подій B_0, B_1, B_2 знайдемо за формулою Бернуллі.

$$P(B_0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}2)^0 \cdot (0{,}8)^5 = (0{,}8)^5 = 0{,}3277,$$

$$P(B_1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}2)^1 \cdot (0{,}8)^4 = 5 \cdot (0{,}2) \cdot (0{,}8)^4 = 0{,}4096,$$

$$P(B_2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^3 = 0{,}205.$$

Тоді за теоремою про суму несумісних подій маємо

$$P(A) = P(0 \leq m \leq 2) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = 0{,}3277 + 0{,}4096 + 0{,}205 = 0{,}9423 \approx 0{,}94.$$

Відповідь: 1) $P_5(2) = 0{,}205$; 2) $P(0 \leq m \leq 2) = 0{,}94$.

Приклад 2. Ймовірність виграти по одному білету лотереї $p=\frac{1}{3}.$ Знайти ймовірність того, що з п'яти куплених білетів виграшних буде: а) два; б) всі; в) жодного; г) не менше двох; д) більше двох; е) не більше двох; є) менше двох; ж) від 2 до 4; з) принаймні один.

Розв'язання. Якщо А – подія, що полягає у купівлі виграшного білета, то її ймовірність $p=\frac{1}{3}$, а ймовірність купівлі невиграшного білета $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. За формулою Бернуллі маємо:

а) $P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{5\cdot 4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{27}=\frac{80}{243}\approx 0{,}3292$;

б) $P_5(5)=C_5^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5\cdot}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}\approx 0{,}004$;

в) $P_5(0)=C_5^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\approx 0{,}1317$;

г) $P_5(m\geq 2)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$;

$$P_5(3)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{4}{9}=10\cdot\frac{4}{243}=\frac{40}{243}\approx 0{,}1646;$$

$$P_5(4)=C_5^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{243}\approx 0{,}0412;$$

$$P_5(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}\approx 0{,}0041;$$

$$P_5(m\geq 2)=0{,}3292+0{,}1646+0{,}0412+0{,}0041=0{,}5291;$$

д) $P_5(m>2)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=0{,}1646+0{,}0412+0{,}0041=0{,}2099$;

е) $P_5(m\leq 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=0{,}1317+0{,}3292+0{,}3292=0{,}7901$;

$$P_5(1)=C_5^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{81}=\frac{80}{243}\approx 0{,}3292;$$

є) $P_5(m<2)=P_5(0)+P_5(1)=0{,}1317+0{,}3292=0{,}4609$;

ж) $P_5(2\leq m\leq 4)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)\approx 0{,}3292+0{,}1646+0{,}0412=0{,}535$;

з) $P_5(1 \le m \le 5) = 1 - P_5(0) \approx 1 - 0{,}1317 = 0{,}8683.$

Відповідь: а) 0,3292; б) 0,004; в) 0,1317; г) 0,5291; д) 0,2099; е) 0,7901; є) 0,4609; ж) 0,5354; з) 0,8683.

Приклад 3. За статистичними даними фірми, яка займається навчанням молодшого персоналу банківських установ, 70% слухачів успішно завершають навчання. Припустимо, що випадковим чином відібрані 10 слухачів. Знайти найімовірнішу кількість слухачів, що успішно завершать навчання та оцінити відповідну ймовірність.

Розв'язання: За умовою задачі $p = 0{,}7$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Найімовірніше число знаходимо з нерівностей $np - q \le m_0 \le np + p$:

$$10 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le m_0 \le 10 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \Leftrightarrow 6{,}7 \le m_0 \le 7{,}7 .$$

Отже, найімовірніше число $m_0 = [7{,}7] = 7$. Поклавши $m = m_0$, за формулою Бернуллі знайдемо:

$$P_{10}(7) = C_{10}{}^{7} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} 0{,}0823 \cdot 0{,}027 \approx 0{,}27.$$

Відповідь: $m_0 = 7, P_{10}(7) \approx 0{,}27.$

Приклад 4. Товарознавець оглядає 24 зразки товарів. Імовірність того, що зразок буде визнано придатним до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визнає придатними до продажу.

Розв'язання: За умовою задачі: $n = 24$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - p = 0{,}4$. Найімовірніше число m_0 знайдемо з подвійної нерівності (15): $np - q \le m_0 \le np + p$.

Підставивши дані з умови задачі, матимемо: $24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6$, або $14 \le m_0 \le 15$. Найімовірніше число зразків $m'_0 = 14$, $m''_0 = 15$.

Відповідь: $m_0 = 14$ або $m_0 = 15$ – найімовірніші числа зразків.

5. Асимптотичні наближення в задачах на схему Бернуллі
А. Теоретичні відомості

Локальна теорема Муавра-Лапласа.

Якщо число випробувань n в схемі Бернуллі досить велике, то обчислення за формулою Бернуллі (14) стають досить громіздкими. Так, наприклад при $n = 50, m = 30, p = 0{,}1$ виникають труднощі обчислювального характеру, оскільки $P_{50}(30) = \frac{50!}{30! \cdot 20!} \cdot (0{,}1)^{30} \cdot (0{,}9)^{20}$, при цьому $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$; $30! = 25{,}5286 \cdot 10^{25}$; $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$ – дуже великі числа. Тому на практиці використовують наближені асимптотичні формули, які для достатньо великих n дають нескінченно малу відносну похибку обчислювання.

Теорема 1. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні є сталою і відмінною від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно m разів, обчислюється (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (16)$$

Функція $\varphi(x)$ парна $(\varphi(-x) = \varphi(x))$ і протабульована. В зв'язку з тим, що при $x \geq 4$ $\varphi(x) = 0{,}0001$, її значення наведені в таблиці на проміжку $[0,4]$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Іноді потрібно визначити ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів. В цьому випадку використовуємо інтегральну теорему Лапласа.

Теорема 2. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що подія з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів, визначається за формулою:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (17)$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{\frac{t^2}{2}} dt$ називається функцією Лапласа.

Функція $\Phi(x)$ є монотонно зростаючою та непарною $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$, її значення наведені в таблицях. Оскільки $\Phi(4) = 04999...$, таблицю її значень досить мати на проміжку $[0, 4]$, а при $x \geq 4$ покладати $\Phi(x) = 0{,}5$.

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність наближених формул (16),(17) зі зменшенням величини p до нуля знижується. Тому у разі великих значень n і достатньо малих, близьких до нуля, значень p при підрахунку ймовірностей $P_n(m)$ застосовують асимптотичну формулу Пуассона.

Теорема 3. Якщо ймовірність p появи події A у кожному з випробувань мала ($p \to 0$), а кількість випробувань n велика ($n \to \infty$), то ймовірність $P_n(m)$ появи події A рівно m разів в n випробуваннях обчислюється за формулою Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \;, \tag{18}$$

де $\lambda = np \;\; (\lambda = const)$.

Зауваження 1. Вибираючи формулу розрахунків для схеми Бернуллі бажано керуватись такими міркуваннями:

а) якщо n – велике, а p – таке, що має місце нерівність $npq \geq 10$, то для знаходження ймовірностей $P_n(m)$ і $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ використовують формули (16) і (17) відповідно;

б) якщо n – велике, а p – мале настільки, що $npq \leq 9$, то для знаходження $P_n(m)$ застосовують формулу (18);

в) за цих самих умов (коли n – велике, а p – мале) при невеликій кількості доданків у сумі $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ можна застосовувати формулу:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Відхилення відносної частоти від ймовірності

Теорема 4. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ події A від її ймовірності p не перевищує за модулем величини ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}}\right), \tag{19}$$

де $m-$ кількість експериментів, в яких сталася подія A.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 5. Фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20% замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 850 клієнтів 150 замовлять візитні картки.

Розв'язання: За умовою $p = 0{,}2, \quad n = 850, \quad m = 150, \quad q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$

Ймовірність того, що 150 клієнтів замовлять візитні картки знайдемо за формулою (16):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \; x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Виходячи з умов задачі, знадемо:

$$x = \frac{150 - 850 \cdot 0{,}2}{\sqrt{850 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx -\frac{20}{11{,}7} = -1{,}71.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ дістанемо: $\varphi(-1{,}71) = \varphi(1{,}71) = 0{,}0925.$

Отже, $P_{850}(150) \approx \dfrac{0{,}0925}{11{,}7} \approx 0{,}008.$

Відповідь: $P_{850}(150) \approx 0{,}008.$

Приклад 6. За прогнозами фахівців 12% всіх акцій, що викидаються на фондовий ринок деякою фірмою, тимчасово впадуть у ціні на деяке число пунктів. Навмання вибирають 100 акцій. Оцінити ймовірність того, що не більше чотирьох акцій з відібраних упадуть у своїй ціні.

Розв'язання: За умовою задачі $p = 0{,}12$, $q = 1 - p = 0{,}88$, $n = 100$, $m_1 = 0$, $m_2 = 4$. Ймовірність події ($0 \le m \le 4$) обчислимо за формулою (17):

$$P_{100}(0 \le m \le 4) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 100 \cdot 0{,}12}{\sqrt{100 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88}} \approx -3{,}7, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4 - 100 \cdot 0{,}12}{\sqrt{100 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88}} = -2{,}46.$$

Отже, $P_{100}(0 \le m \le 4) = \Phi(-2{,}46) - \Phi(-3{,}7) = -\Phi(2{,}46) + \Phi(3{,}7) = 0{,}0067 \approx 0{,}007.$

Відповідь: $P_{100}(0 \le m \le 4) = 0{,}007.$

Приклад 7. Радіоапаратура містить 10000 незалежно працюючих мікроелементів. Імовірність того, що мікроелемент відмовить у роботі за добу, стала для кожного елемента і дорівнює 0,0002. Обчислити ймовірність таких подій: за добу відмовили у роботі: а) три мікроелементи; б) не більше ніж три; в) не менше ніж три.

Розв'язання: З умови задачі відомо, що $p = 0{,}0002$, $n = 10000$. Обчислимо значення $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$. Імовірності подій, заданих в умові задачі, обчислимо за формулою (18);

а) імовірність відмови в роботі трьох елементів:

$$P_{10000}(3) \approx \frac{\lambda^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6} e^{-2} = \frac{4}{3e^2} \approx 0{,}18$$

б) не більше ніж три (подія A):

У цьому випадку подія А є сумою чотирьох несумісних подій:

$A_0 = \{$відмовить 0 елементів$\}$,

$A_1 = \{$відмовить один елемент$\}$,

$A_2 = \{$відмовлять два елементи$\}$,

$A_3 = \{$відмовлять три елементи$\}$.

Для обчислення ймовірностей усіх складових використовуємо формулу Пуассона:

$$P(A_0) = P_{10000}(0) \approx \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2} = 0{,}1353;$$

$$P(A_1) = P_{10000}(1) \approx \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2} = 0{,}2707;$$

$$P(A_2) = P_{10000}(2) \approx \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = \frac{4}{2e^2} = \frac{2}{e^2} = 0{,}2707;$$

$$P(A_3) = P_{10000}(3) \approx \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6e^2} = \frac{4}{3e^2} = 0{,}1804;$$

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804 = 0{,}857 \approx 0{,}86.$$

в) не менше ніж три:

Подія «не менше ніж три» є протилежною до події «не менше ніж два». В цьому випадку за формулою (9) знайдемо:

$$P_{10000}(3 \le m \le 10000) = 1 - (P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2)) = 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) = 1 - \frac{5}{e^2} = 0{,}323$$

Відповідь: а) $P_{10000}(3) \approx 0{,}18$; б) $P_{10000}(0 \le m \le 3) \approx 0{,}86$; в) $P_{10000}(m \ge 3) \approx 0{,}323$.

Приклад 8. При штампуванні виробляється тільки 70% виробів першого сорту. Скільки треба взяти виробів, щоб з ймовірністю більшою ніж $0{,}9973$ можна було стверджувати, що частка першосортних серед них буде відрізнятися за абсолютною величиною від ймовірності $0{,}7$ не більше ніж на $0{,}057$?

Розв'язання: Згідно з умовою $p = 0{,}7, q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3, \varepsilon = 0{,}057$. Потрібно

знайти *n*. За формулою (19) матимемо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}7\right| \le 0{,}057\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(0{,}057 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}7 \cdot 0{,}3}}\right) \ge 0{,}9973.$$

Зі співвідношення $2\Phi(x) = 0{,}9973$ або, що те саме, $\Phi(x) = 0{,}4986$ за таблицею значень функції $\Phi(x)$ знайдемо: $x \geq 2{,}98 \Rightarrow 0{,}057 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{0{,}21}} = 2{,}98 \Rightarrow n \geq 574.$

Отже, $n \geq 574$.

Відповідь: $n \geq 574$.

6. Задачі на дискретні випадкові величини

А. Теоретичні відомості

Означення 1. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P)$. Будь-яка дійсна функція $\xi = \xi(\omega)$, визначена на просторі елементарних подій, називається **випадковою величиною (ВВ)**, якщо для всіх $x \in R$ існує ймовірність $p(\xi < x)$ події $\{\xi < x\}$.

Означення 2. Якщо множина всіх можливих значень ВВ є зліченною (зокрема, скінченною), то **ВВ називається дискретною (ДВВ).**

Розглянемо дискретну випадкову величину ξ з множиною можливих значень $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Означення 3. **Законом розподілу** дискретної випадкової величини називається будь-яка відповідність між можливими значеннями випадкової величини x_i та їх ймовірностями p_i.

Існує три способи задання закону розподілу ДВВ: табличний, аналітичний, графічний.

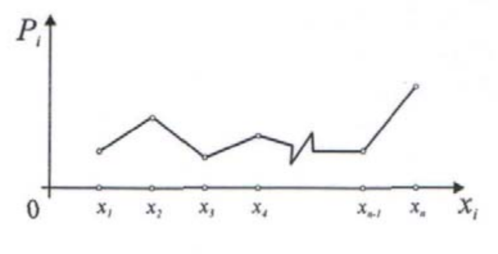
Табличний спосіб полягає в складанні таблиці відповідності x_i і p_i у вигляді:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Зауважимо, що x_i – довільні дійсні числа, $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Аналітичний спосіб полягає в заданні функціональної залежності між x_i і p_i в аналітичному вигляді $p_i = f(x_i)$. Прикладом такого способу задання є формула Бернуллі $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В цьому випадку ВВ приймає значення з множини $X = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Графічний спосіб полягає в побудові **багатокутника розподілу**. Цей багатокутник будується таким чином. На осі Ox декартової системи координат відкладають можливі значення x_i випадкової величини, а на осі ординат Oy ймовірності p_i цих можливих значень x_i. Суміжні точки (x_i, p_i) $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ з'єднуються відрізками.



Означення 4. **Функцією розподілу ВВ** ξ називається функція $F(x)$, яка для всіх $x \in R$ чисельно дорівнює ймовірності події $\{\xi < x\}$:

$$F(x) = P\{\xi < x\} \qquad (20)$$

Властивості функції розподілу $F(x)$

1) $F(x)$ – неспадна, неперервна зліва функція;

2) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;$ $\qquad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$

3) $F(x+0) = P\{\xi \le x\};$ $\qquad P\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x);$

4) $P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$ (21)

Функція розподілу ДВВ ξ знаходиться за формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i\ , \qquad (22)$$

де знак суми поширюється на ті індекси i, для яких $x_i < x$.

Графік функції $F(x)$ являє собою східчасту лінію з інтервалами сталості між сусідніми значеннями ξ.

Означення 5 . **Математичним сподіванням ДВВ** ξ називається число, яке знаходиться за формулою:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad \text{(ряд збігається абсолютно).} \qquad (23)$$

Означення 6 . **Дисперсією ДВВ** ξ, називається число:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Для обчислення дисперсії зручно користуватися формулою:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M\xi)^2 \qquad (24)$$

Зауважимо, що у формулах (23), (24) суми скінченні, якщо множина можливих значень ВВ ξ є скінченною.

Означення 7. **Середнім квадратичним відхиленням ДВВ** ξ, називається число:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}\,. \qquad (25)$$

Величини $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$ називаються **числовими характеристиками ДВВ** ξ.

Математичне сподівання Мξ характеризує центр розсіювання ВВξ, а дисперсія і середнє квадратичне відхилення є мірою розсіювання значень ВВ ξ навколо її математичного сподівання.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Ймовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – кількості заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$, а також ймовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв'язання: Подамо закон розподілу випадкової величини ξ у табличній формі. Випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення $\xi = 1$ буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь (ймовірність цього дорівнює 0,75), а з другої – придатну. За теоремою множення ймовірностей імовірність цієї події $P(\xi = 2) = 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}1875$. Аналогічно, $\xi = 3$, якщо деталі виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки – придатна. $P(\xi = 2) = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 =$ $0{,}046875$. Нарешті, $\xi = 4,$якщо деталі виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P(\xi = 4) = 0{,}25^3 = 0{,}015625$. Запишемо закон розподілу:

ξ	1	2	3	4
P	0,75	0,1875	0,046875	0,015625

Можна перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює одиниці. За формулами (23)-(25) обчислимо математичне сподівання та дисперсію ВВ ξ:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}1875 + 3\cdot 0.046875 + 4\cdot 0{,}015625 = 1{,}3281;$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M\xi)^2 = 1\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}1875 + 9\cdot 0.046875 + 16\cdot 0{,}015625 - 1{,}3281^2 =$$

$$= 2{,}1719 - 1{,}7639 = 0{,}4080 \Rightarrow \sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} \approx 0{,}6387.$$

Ймовірність події А – виготовлено одну придатної деталі з чотирьох можливих – знайдемо за формулою (11): $P(A) = 1 - 0{,}25^4 = 0{,}9960$.

Відповідь: $M\xi = 1{,}3281$; $D\xi = 0{,}4080$; $\sigma_\xi \approx 0{,}6387$.

Приклад 2. Знайти числові характеристики, побудувати функцію розподілу та многокутник розподілу, якщо ДВВ ξ задана законом:

ξ	– 3,7	– 1,4	1,3	3,5	5,8
P	0,17	0,22	0,27	0,23	0,11

Необхідно знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, побудувати графік функції розподілу $F(x)$ та многокутник розподілу.

Розв'язання: Числові характеристики ДВВ ξ знайдемо за формулами (23) – (25):

$$M\xi = (-3{,}7)\cdot 0{,}17 + (-1{,}4)\cdot 0{,}22 + 1{,}3\cdot 0{,}27 + 3{,}5\cdot 0{,}23 + 5{,}8\cdot 0{,}11 = 0{,}857;$$

$$D\xi = (-3{,}7)^2\cdot 0{,}17 + (-1{,}4)^2\cdot 0{,}22 + 1{,}3^2\cdot 0{,}27 + 3{,}5^2\cdot 0{,}23 + 5{,}8^2\cdot 0{,}11 - (0{,}857)^2 = 8{,}997;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{8{,}997} \approx 3{,}0.$$

Побудуємо графік функції розподілу (рис.1) та багатокутник розподілу (рис. 2):

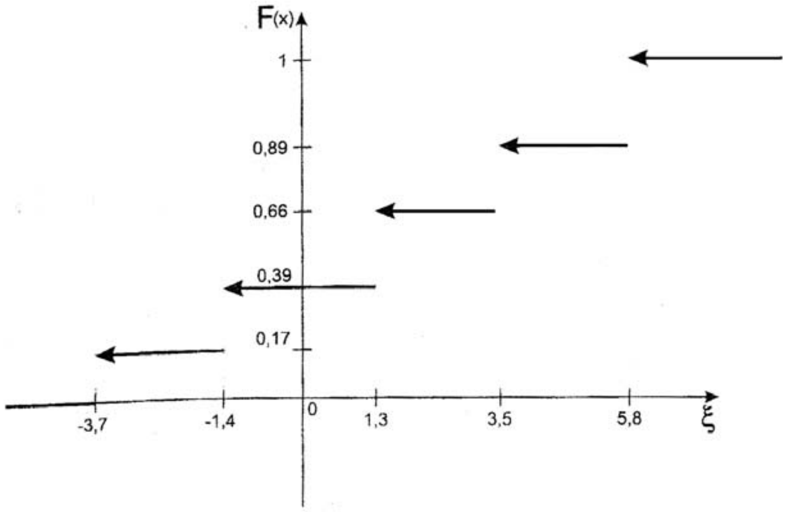


Рис.1

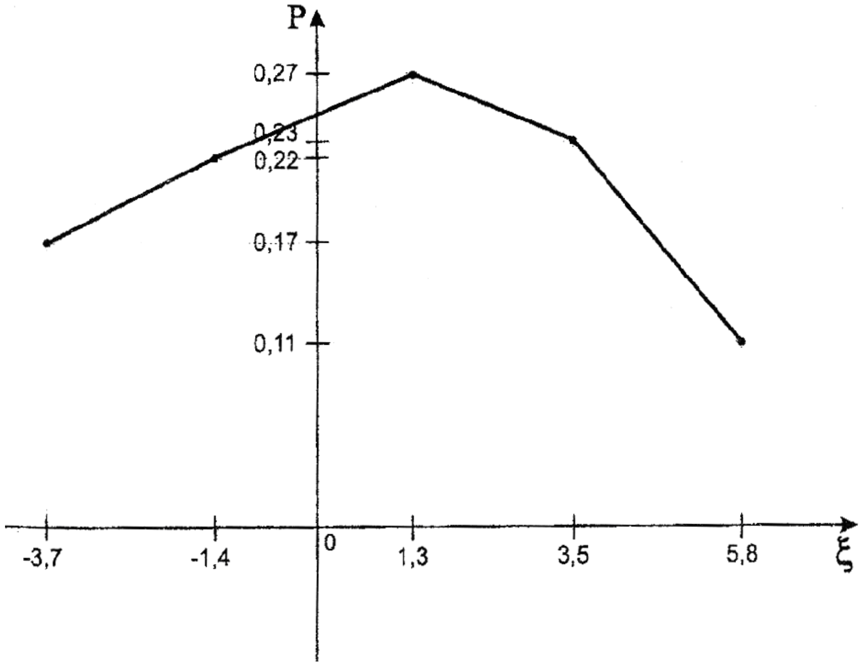


Рис. 2

Відповідь: $M\xi = 0{,}857$; $D\xi = 8{,}997$; $\sigma_{\xi} \approx 3{,}0$.

7. Задачі на неперервні випадкові величини

А. Теоретичні відомості

Означення 1. Випадкова величина ξ називається **неперервною (НВВ)**, якщо множина всіх її можливих значень є скінченним або нескінченним проміжком і кожне окреме значення з цього проміжку приймається з ймовірністю, рівною нулю.

За властивостями (21) з цього означення випливає, що для кожної НВВ її інтегральна функція $F(x)$ є неперервною.

Означення 2. **Диференціальною функцією розподілу $f(x)$** (**щільністю розподілу ймовірностей**) НВВ ξ називається перша похідна від її інтегральної функції:

$$f(x) = F(x)' . \tag{26}$$

Властивості диференціальної функції розподілу:

1) $f(x) \geq 0$; 2) $P(a \leq \xi \leq b) = \int\limits_a^b f(x)dx$; 3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Числові характеристики НВВ ξ - математичне сподівання $M\xi$, дисперсія $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ - визначаються по її щільності розподілу $f(x)$ за формулами:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M\xi)^2, \quad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} .$$

Приклад 1. Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leq 0; \\ a\cos x, & \text{якщо} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{якщо} \quad x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Визначити: 1) значення параметра a; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) математичне сподівання $M\xi$; 4) дисперсію $D\xi$; 5) середнє квадратичне відхилення σ_ξ; 6) ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $\left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right)$; 7) побудувати графіки функцій $F(x), f(x)$.

Розв'язання: Спочатку знайдемо параметр a, використовуючи властивість 3) щільності розподілу. Оскільки $f(x) = 0$, коли $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{\pi}{6}; +\infty\right)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = a \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} = 1, \text{ звідки } a = 2 .$$

Визначимо функцію розподілу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Маємо такі випадки:

якщо $x \in (-\infty;0]$, то $F(x)=0$, бо $f(x)=0$;

якщо $0 < x \le \frac{\pi}{6}$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int\limits_{0}^{x} \cos t dt = 2\sin t \Big|_{0}^{x} = 2\sin x$;

якщо $\left(\frac{\pi}{6};+\infty\right)$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{0}}^{x} 0dx = 2\sin t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$,

тобто

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ 2\sin x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Визначимо числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ. Матимемо:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\cos x dx = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2;$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - (M\xi)^2 = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} x^2 \cos x dx - \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\right)^2 = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 9 \approx 0{,}02;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} \approx \sqrt{0{,}02} \approx 0{,}15.$$

Імовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $\left(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right)$, враховуючи властивість 4), обчислюємо так:

$$P\left(\frac{\pi}{8}<\xi<\frac{\pi}{4}\right)=P\left(\frac{\pi}{8}\le\xi\le\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}0dx=2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}=1-2\sin\frac{\pi}{8}\approx 0{,}235$$

.

Графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$ зображено на рис. 3 та рис. 4.

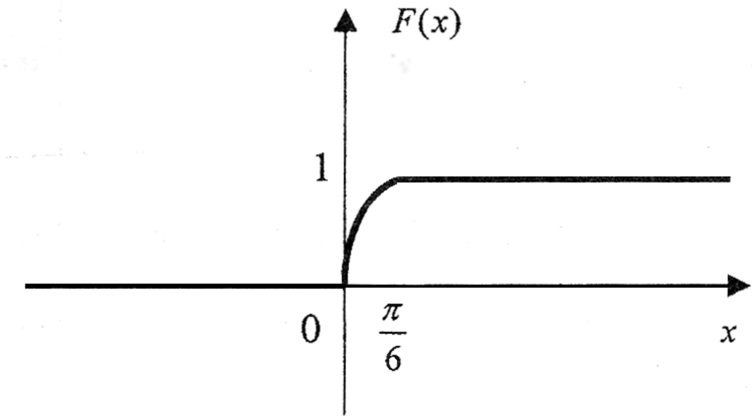


Рис. 3

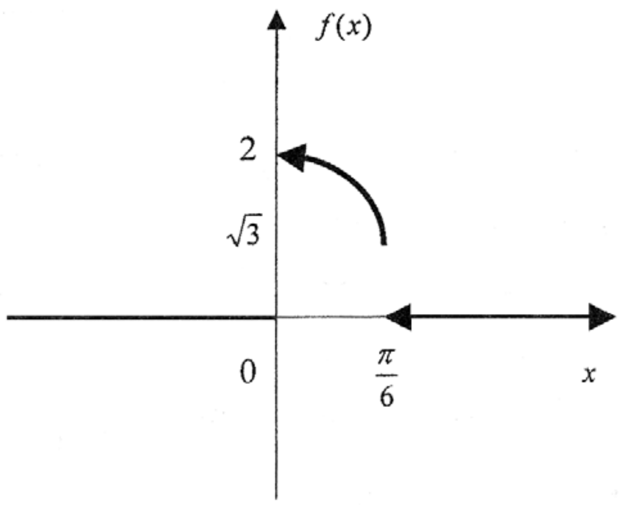


Рис. 4

Відповідь: 1) $a=2$;

2) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ 2\sin x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$ 3) $M\xi = \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 \approx 0{,}25$;

4) $D\xi = 4\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3} - 9 \approx 0{,}02$; 5) $\sigma_\xi \approx 0{,}15$; 6) $P\left(\dfrac{\pi}{8} < \xi < \dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}235.$

8. Задачі на дискретні та неперервні двовимірні випадкові величини

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Двовимірною ВВ** (ξ, η) називається система двох випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$ і $\eta = \eta(\omega)$, що задані на спільному просторі $\Omega\{\omega\}$. Величини ξ і η називатимемо **компонентами** двовимірної ВВ.

Означення 2. Функцією розподілу ВВ (ξ, η) (двовимірною функцією розподілу) називається функція $F(x, y)$, яка для кожної пари $(x, y) \in R^2$ дорівнює ймовірності перетину подій $\xi < x$ та $\eta < y$:

$$F(x, y) = p(\xi < x,\ \eta < y).$$

Властивості двовимірної функції розподілу $F(x, y)$:

1) функція розподілу є неспадною по кожному аргументу;

2) функція розподілу неперервна зліва по кожному аргументу;

3) $F(+\infty, +\infty) = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = F_\eta(y)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = F_\xi(x)$.

Ймовірність попадання випадкової точки (ξ, η) у прямокутник $[a,b;c,d]$ зі сторонами, паралельними до координатних осей *Ox* і *Oy*, обчислюється за формулою:

$$p\{a \le \xi < b,\ \ c \le \eta < d\} = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \qquad (27)$$

Означення 2. **Компоненти ВВ** ξ і η називаються **незалежними**, якщо виконується рівність:

$$F(x, y) = F_\xi(x)\ F_\eta(y).$$

Дискретні двовимірні ВВ

Означення 3. **Двовимірну ВВ** (ξ, η) називають **дискретною двовимірною ВВ**, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Компоненти ξ та η дискретної двовимірної ВВ є ДВВ. Для задання (ξ, η) досить задати її можливі значення (x_i, y_j) і ймовірності кожного з них: $p_{ij} = p\{\xi = x_i, \quad \eta = y_j\}$. Закон розподілу ДВВ (ξ, η) можна подати у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

ξ / η	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	p_{y_1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	p_{y_2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{y_j}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	p_{x_1}	p_{x_2}	$\cdots$	p_{x_i}	$\cdots$	1

У цій таблиці позначено:

$$p_{x_i} = p\{\xi = x_i\} = \sum_j p\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\} = \sum_j p_{ij},$$

$$p_{y_j} = p\{\eta = y_j\} = \sum_i p\{\xi = x_i,\ \eta = y_j\} = \sum_i p_{ij}. \tag{28}$$

Таким чином, пари $\{x_i, p_{x_i}\}$, задають розподіл ДВВ ξ, а $\{y_j, p_{y_j}\}$ – ДВВ η. Мають місце рівності:

$$\sum_{i,\,j} p_{ij} = \sum_i p_{x_i} = \sum_j p_{y_j} = 1, \text{ (умова нормування).} \tag{29}$$

Функція розподілу ДВВ $(\xi\ ,\eta\ )$ знаходиться за формулою:

$$F(x,\,y) = \sum_{x_i < x}\ \sum_{y_j < y} p_{i\,j}\ .$$

Означення 4. **Умовним законом розподілу ДВВ** η за умови $\xi = x_i = const$ та **умовним законом розподілу ДВВ** ξ за умови $\eta = y_j = const$ називаються сукупності $\{y_j,\ \ p(y_j|x_i)\}$ та $\{x_i,\ \ p(x_i|y_j)\}$, де через $p(y_j|x_i), p(x_i|y_j)$ позначено умовні ймовірністі:

$$\begin{aligned} p(y_j|x_i) &= p\{\eta = y_j|\xi = x_i\} = \frac{p\ \{\xi = x_i,\ \eta = y_j\}}{P\{\xi = x_i\}} = \frac{p_{i\,j}}{p_{x_i}}, \\ p(x_i|y_j) &= p\{\xi = x_i|\eta = y_j\} = \frac{p\ \{\xi = x_i,\ \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{p_{i\,j}}{p_{y_j}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Для незалежних ξ і η виконується:

$$p_{i\,j} = p\{\xi = x_i\}\cdot p\{\eta = y_j\},\ \ p(y_j|x_i) = p\{\eta = y_j\},\ \ \ p(x_i|y_j) = p\{\xi = x_i\}. \tag{31}$$

Числові характеристики двовимірної ДВВ $(\xi\ ,\ \eta\ )$ знаходяться за формулами:

$$\begin{gathered} M\xi = \sum_{i,j} x_i p_{i\,j} = \sum_i x_i p_{x_i},\ M\xi^2 = \sum_{i,j} x_i^2 p_{i\,j} = \sum_i x_i^2 p_{x_i},\ D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2, \\ M\xi = \sum_{i,j} x_i p_{i\,j} = \sum_i x_i p_{x_i},\ D\xi = \sum_{i,j} x_i^2 p_{i\,j} - (M\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_{x_i} - (M\xi)^2, \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}, \\ M(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{i\,j},\ K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta, \\ \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}, \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}, r = r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}. \end{gathered} \tag{32}$$

Неперервні двовимірні ВВ

Означення 5. **Двовимірну ВВ** $(\xi\ ,\eta\ )$ називають **неперервною**, якщо існує така функція $f(x,\,y)$, що функція розподілу $F(x,\,y)$ даної ВВ можна подати у вигляді:

$$F(x,\ y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,\ y)\,dxdy\,. \qquad (33)$$

Функція $f(x,\ y)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей** (двовимірною щільністю розподілу) НВВ $(\xi\ ,\eta\ )$.

В точках неперервності функції $f(x,\ y)$ виконується рівність:

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\partial y}\,.$$

Властивості двовимірної щільності розподілу ймовірностей $f(x,\ y)$:

1) $f(x,\ y)\geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\,dxdy=1$ (умова нормування); (34)

3) Ймовірність попадання випадкової точки $(\xi\ ,\ \eta\ )$ в область G знаходиться за формулою: $P\{(\xi\ ,\ \eta\ )\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,\ y)dxdy$.

4) Компоненти НВВ $(\xi\ ,\eta\ )$ є також НВВ, їх щільності розподілу знаходяться за формулами:

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\,dy\,;\qquad f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\,dx\,. \qquad (35)$$

Означення 6. Умовним законом розподілу однієї з компонент двовимірної ВВ $(\xi\ ,\ \eta\ )$, називають закон розподілу цієї компоненти, знайдений при умові, що інша компонента набула певного сталого значення (або потрапила до певного інтервалу).

Умовні щільності розподілу компонент ξ , η вводяться за рівностями:

$$f_\xi(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_\eta(y)}\,;\qquad\qquad f_\eta(y|x)=\frac{f(x,\ y)}{f_\xi(x)}\,. \qquad (36)$$

Для незалежних ξ і η виконується:

$$f(x,\ y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y);\quad f_\xi(x|y)=f_\xi(x);\quad f_\eta(y|x)=f_\eta(y). \qquad (37)$$

Числові характеристики двовимірної НВВ $(\xi\ ,\ \eta\ )$ знаходяться за формулами:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,\ M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy,\ D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy,\ M\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy,\ D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2, \tag{38}$$

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy,\ K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta,$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}, \sigma_\eta = \sqrt{D\eta},\ r = r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}.$$

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. За заданим законом розподілу (табл. 2) двовимірної ДВВ (ξ, η) знайти: 1) невідомий параметр *a*, закони розподілу компонент ξ та η, умовні закони розподілу ВВ $\eta / \xi = 15{,}2$ та ВВ $\xi / \eta = 4{,}4$; 2) числові характеристики $M\xi, D\xi, M\eta, D\eta$, $K_{\xi\eta}, \sigma_\xi, \sigma_\eta$, $r_{\xi\eta}$, $M(\eta / \xi = 15{,}2)$, $M(\xi / \eta = 4{,}4)$.

Таблиця 2

$\eta \setminus \xi$	5,2	10,2	15,2
2,4	0,1*a*	2 *a*	0,9 *a*
4,4	2 *a*	0,2 *a*	1,8 *a*
6,4	1,9*a*	0,8 *a*	0,3 *a*

Розв'язання: 1) Значення параметра *a* визначимо з умови нормування (29):

$$\sum_{i,\ j} p_{ij} = 1, \Rightarrow \quad (0{,}1 + 2 + 0{,}9 + 2 + 0{,}2 + 1{,}8 + 1{,}9 + 0{,}8 + 1{,}3)a = 1 \Rightarrow \quad a = 0{,}1.$$

При знайденому значенні параметра *a* по даних таблиці 2 складемо таблицю 3:

Таблиця 3

$\eta \setminus \xi$	5,2	10,2	15,2	$p\{\eta = y_j\}$
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
$p\{\xi = x_i\}$	0,4	0,3	0,3	1

Закон розподілу ВВ ξ складемо за даними першого та останнього рядків таблиці 3 у вигляді:

ξ	5,2	10,2	15,2
$p\{\xi = x_i\}$	0,4	0,3	0,3

Закон розподілу ВВ η складемо за даними першого та останнього стовпців таблиці 3:

η	2,4	4,4	6,4
$p\{\eta = y_j\}$	0,3	0,4	0,3

По даних першого та четвертого стовпців і даних першого та третього рядків таблиці 3 за формулами (30) обчислимо відповідні умовні ймовірності:

$$p\{\eta = y_j | \xi = 15,2\} = \frac{p\{\xi = 15,2;\ \eta = y_j\}}{P\{\xi = 15,2\}} = \frac{p_{ij}}{0,3} \quad (i = 3;\ \ j = 1,2,3),$$

$$p\{\xi = x_i | \eta = 4,4\} = \frac{p\{\xi = 15,2;\ \eta = y_j\}}{P\{\eta = 4,4\}} = \frac{p_{ij}}{0,4} \quad (i = 1,2,3;\ \ j = 2)$$

Результати обчислень зведемо у таблиці умовних законів розподілу:

Таблиця 4

η	2,4	4,4	6,4
$p\{\eta = y_j \vert \xi = 15,2\}$	$\frac{0,09}{0,3} = 0,3$	$\frac{0,18}{0,3} = 0,6$	$\frac{0,03}{0,3} = 0,1$

Таблиця 5

ξ	5,2	10,2	15,2
$p\{\xi = x_i \vert \eta = 4,4\}$	$\frac{0,2}{0,4} = 0,5$	$\frac{0,02}{0,4} = 0,05$	$\frac{0,18}{0,4} = 0,45$

2) За формулами (32) знайдемо числові характеристики двовимірної ДВВ:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{3}x_i p_{x_i}=5{,}2\cdot 0{,}4+10{,}2\cdot 0{,}3+15{,}2\cdot 0{,}3=9{,}7;$$

$$D\xi=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 p_{x_i}-(M\xi)^2=5{,}2^2\cdot 0{,}4+10{,}2^2\cdot 0{,}3+15{,}2^2\cdot 0{,}3-9{,}70^2=17{,}25;$$

$$M\eta=\sum_{j=1}^{3}y_j p_{y_j}=2{,}4\cdot 0{,}3+4{,}4\cdot 0{,}4+6{,}4\cdot 0{,}3=4{,}4;$$

$$D\eta=\sum_{j=1}^{3}y_j^2 p_{y_j}-(M\eta)^2=2{,}4^2\cdot 0{,}3+4{,}4^2\cdot 0{,}4+6{,}4^2\cdot 0{,}3-4{,}40^2=2{,}4;$$

$$K_{\xi\eta}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}-M\xi\cdot M\eta=2{,}4(5{,}2\cdot 0{,}01+10{,}2\cdot 0{,}2+15{,}2\cdot 0{,}09)+$$

$$+4{,}4(5{,}2\cdot 0{,}2+10{,}2\cdot 0{,}02+15{,}2\cdot 0{,}18)+6{,}4(5{,}2\cdot 0{,}19+10{,}2\cdot 0{,}08+15{,}2\cdot 0{,}03)-$$

$$-M\xi\cdot M\eta=40{,}28-9{,}7\cdot 4{,}4=-2{,}4;$$

$$\sigma_\xi=\sqrt{D_\xi}=\sqrt{17{,}25}\approx 4{,}15;\ \sigma_\eta=\sqrt{D_\eta}=\sqrt{2{,}4}\approx 1{,}55;\ r_{\xi\eta}=\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=\frac{-2{,}4}{4{,}15\cdot 1{,}55}\approx -0{,}37.$$

Для знаходження умовних математичних сподівань $M(\eta/\xi=15{,}2)$ та $M(\xi/\eta=4{,}4)$ скористаємось вже знайденими таблицями умовних законів розподілу. За табл. 4 знайдемо:

$$M(\eta/\xi=15{,}2)=2{,}4\cdot 0{,}3+4{,}4\cdot 0{,}6+6{,}4\cdot 0{,}1=4\,.$$

Виходячи з даних табл. 5, отримаємо:

$$M(\xi/\eta=4{,}4)=5{,}2\cdot 0{,}5+10{,}2\cdot 0{,}05+15{,}2\cdot 0{,}45=9{,}95\,.$$

Відповідь: $a=0{,}1$; $M\xi=9{,}7$; $D\xi=17{,}25$; $M\eta=4{,}4$; $D\eta=2{,}4$; $K_{\xi\eta}=-2{,}4$;

$\sigma_\xi=4{,}15$; $\sigma_\eta=1{,}55$; $r_{\xi\eta}=-0{,}37$; $M(\eta/\xi=15{,}2)=4$; $M(\xi/\eta=4{,}4)=9{,}95$.

Приклад 2. Щільність розподілу НВВ (ξ,η) задано у вигляді:

$f(x,y)=\begin{cases}a(x+y), & (x,y)\in\Omega;\\ 0, & (x,y)\notin\Omega,\end{cases}$ де $\Omega=\left(0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2\right)$, a - невідомий параметр. Треба визначити: 1) значення параметра a; 2) функцію розподілу $F(x,y)$; 3) ймовірність попадання ВВ (ξ,η) в область $S=\left(0\le x<0{,}5;\ \ 0\le y<1\right)$; 4) числові характеристики $M\xi, D\xi, M\eta, D\eta$, $K_{\xi\eta}, \sigma_\xi, \sigma_\eta$, $r_{\xi\eta}$.

Розв'язання: 1) Значення параметра a визначимо з умови нормування (34):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\,dxdy=1\ \Rightarrow\ \iint_{\Omega}f(x,y)dxdy=1\ \Rightarrow\ a\iint_{\Omega}(x+y)dxdy=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\int_0^1 dx\int_0^2 (x+y)\,dy = a\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dx = a\int_0^1 (2x+2)dx = a(x^2+2x)\Big|_0^1 = 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Отже, щільність розподілу НВВ (ξ,η) має вигляд:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{3}, & (x,y)\in\Omega;\\ 0, & (x,y)\notin\Omega,\end{cases} \quad \text{де } \Omega=(0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2).$$

2) Функцію розподілу $F(x,\,y)$ знайдемо за формулою (33):

$$F(x,\,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,\,y)\,dxdy\ .$$

Враховуючи значення функції $f(x,y)$ і властивості подвійного інтеграла, звідси виводимо:

А: при $x\le 0$ або $y\le 0$ $\Rightarrow$ $F(x,\,y)=0$;

Б: у першому квадранті, при $x>0$ та $y>0$, $\Rightarrow$ $F(x,\,y)=\int_0^x\int_0^y f(x,\,y)\,dxdy$;

В: в області Ω, при $0\le x\le 1$ та $0\le y\le 2$ $\Rightarrow$ $F(x,\,y)=\int_0^x\int_0^y f(x,\,y)\,dxdy=$

$$=\frac{1}{3}\int_0^x\int_0^y (x+y)\,dxdy=.\frac{1}{3}\int_0^x dx\int_0^y (x+y)\,dy=\frac{1}{3}\int_0^x (xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^y dx=\frac{1}{3}\int_0^x (xy+\frac{y^2}{2})dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{y^2x}{2}\right)\Bigg|_0^x=\frac{xy(x+y)}{6};$$

Г: при $0\le x\le 1$ та $y>2$

$$\Rightarrow F(x,\,y)=\int_0^x\int_0^2 f(x,\,y)\,dxdy=\ \frac{xy(x+y)}{6}\Bigg|_{y=2}=\frac{x(x+2)}{3};$$

Д: при $x>1$ та $0\le y\le 2$

$$\Rightarrow F(x,\,y)=\int_0^1\int_0^y f(x,\,y)\,dxdy=\ \frac{xy(x+y)}{6}\Bigg|_{x=1}=\frac{y(y+1)}{6};$$

Е: при $x>1$ та $y>2$ $\Rightarrow F(x,\,y)=\int_0^1\int_0^2 f(x,\,y)\,dxdy=1$.

3) Ймовірність попадання випадкової точки (ξ,η) у прямокутну область $S = \left(0 \le x < 0{,}5;\ \ 0 \le y < 1\right)$ отримаємо за формулою (27):

$$p\{(\xi,\eta) \in S\} = p(0 \le \xi < 0{,}5; 0 \le \eta < 1) = F(0{,}5;\, 1) - F(0;\, 1) - F(0{,}5; 0) + F(0;\, 0)\,.$$

За знайденими значеннями Ω функції $F(x,\, y)$ в області встановлюємо:

$$p\{(\xi,\eta) \in S\} = \left.\frac{xy(x+y)}{6}\right|_{x=0{,}5;\, y=1} - \left.\frac{xy(x+y)}{6}\right|_{x=0;\, y=1} -$$

$$- \left.\frac{xy(x+y)}{6}\right|_{x=0{,}5;\, y=0} - \left.\frac{xy(x+y)}{6}\right|_{x=0;\, y=0} = \frac{1}{8}\,.$$

4) Числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$, $K_{\xi\eta}$, σ_ξ, σ_η, $r_{\xi\eta}$ знайдемо за формулами (38):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^2 x(x+y)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 x\left.\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x^2 + 2x\right)dx = \frac{1}{3}\left.\left(\frac{2x^3}{3} + x^2\right)\right|_0^1 = \frac{5}{9};$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^2 x^2(x+y)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left.\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\right|_0^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\left(2x+2\right)dx = \frac{2}{3}\left.\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{7}{18};$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162} \Rightarrow \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{13}{162}} \approx 0{,}283;$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^2 y(x+y)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left.\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y3}{3}\right)\right|_0^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x + \frac{8}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left.\left(x^2 + \frac{8}{3}x\right)\right|_0^1 = \frac{11}{9};$$

$$M\eta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^2 y^2(x+y)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left.\left(\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\right|_0^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{8}{3}x + 4\right)dx = \frac{1}{3}\left.\left(\frac{4}{3}x^2 + 4x\right)\right|_0^1 = \frac{16}{9};$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{23}{81} \Rightarrow \sigma_\eta = \sqrt{D\eta} = \sqrt{\frac{23}{81}} \approx 0{,}533;$$

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dx \int_0^2 xy(x+y)dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3}x\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9};$$

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = \frac{2}{9} - \frac{5}{9}\cdot\frac{11}{9} = -\frac{1}{81};\ r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \approx -\frac{1}{81\cdot 0{,}283\cdot 0{,}533} \approx -0{,}08.$$

Відповідь:

$$1)\ a = \frac{1}{3};\ 2)\ F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ або } y \le 0, \\ xy(x+y)/6, & 0 \le x \le 1 \text{ та } 0 \le y \le 2, \\ x(x+2)/3, & 0 \le x \le 1 \text{ та } y \ge 2, \\ y(y+1)/6, & x \ge 1 \text{ та } 0 \le y \le 2, \\ 1, & x \ge 1 \text{ та } y \ge 1; \end{cases}\quad 3)\ p\{(\xi,\eta) \in S\} = \frac{1}{8};$$

4) $M\xi = \frac{5}{9}$; $D\xi = \frac{13}{162}$; $M\eta = \frac{11}{9}$; $D\eta = \frac{23}{81}$; $K_{\xi\eta} = -\frac{1}{81}$; $\sigma_\xi \approx 0{,}283$; $\sigma_\eta \approx 0{,}533$; $r_{\xi\eta} \approx -0{,}08$.

9. Задачі на випадкові процеси та їхні лінійні алгебраїчні перетворення

А. Теоретичні відомості

Випадковий процес та його ймовірнісне дослідження

Означення 1. **Випадковим процесом (ВП)** $\xi(t)$ називається сім'я випадкових величин, що задані на спільному просторі елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$ і залежать від деякого параметра $t -$ «часу»:

$$\xi(t) = \xi(t,\omega) \quad (t \in T, \omega \in \Omega). \tag{39}$$

Множина T (множина значень параметра t) називається **областю визначення ВП**, а множина X всіх можливих значень випадкових величин $\xi(t)$ − **фазовим простором ВП**.

Кожному фіксованому значенню $t = t_k$ параметра t ВП (27) ставить у відповідність випадкову величину $\xi(t_k) = \xi(t_k,\omega)$, яка називається **перерізом ВП $\xi(t)$ в момент t_k**. Кожній елементарній події $\omega = \omega_k$ ВП (27) ставить у відповідність детерміновану, тобто невипадкову функцію $x_k(t)$, яка називається **траєкторією ВП при реалізації події ω_k**: $x_k(t) = \xi(t,\omega_k)$.

Зауваження1. Кожна **випадкова величина** $\alpha = \alpha(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ **є частинним випадком ВП** $\alpha(t) = \alpha$ $(t \in T)$, у якого всі перерізи є однаковими і співпадають з ВВα. Траєкторії $x_k(t)$ цього процесу є прямими лініями $x_k(t) = x_k = const$.

Означення 2. ВП $\xi(t)$ називається **ВП з дискретним часом**, якщо його область визначення T є зліченною (зокрема, скінченною) множиною. Якщо область визначення T є незліченною множиною (що заповнює деякий скінченний або нескінченний інтервал), то $\xi(t)$ називається **ВП з неперервним часом**.

Означення 3. ВП $\xi(t)$ називається **ВП з дискретними станами**, якщо всі його перерізи є дискретними випадковими величинами (ДВВ).

Прикладами випадкових процесів є:

1) ункції зміни у часі напруги $V(t)$ електропостачання локомотива;

2) кількість $Q(t)$ відмов ЕОМ за час t;

3) коливання курсів валют $I(t)$, як функції часу;

4) кількість пасажирів $K(t)$, що обслуговуються ункції за час t і т. д.

Імовірнісне дослідження ВП$\xi(t)$ здійснюється за розподілами систем його перерізів $\xi(t_k)$ $(t_k \in T,\ k = 1,2,3,\ldots)$, їх $n-$вимірних функцій та щільностей розподілу, $n \in N$.

Означення 4. **Одновимірною функцією розподілу** випадкового процесу $\xi(t)$ називають детерміновану функцію $F_\xi(x|\ t)$, яка в кожен фіксований момент t співпадає з функцією розподілу відповідного перерізу $\xi(t)$:

$$F_\xi(x|\ t) = P(\xi(t) < x).$$

Означення 5. **Одновимірною щільністю розподілу** випадкового процесу $\xi(t)$ називається функція:

$$f_\xi(x|\ t) = \frac{\partial F_\xi(x|\ t)}{\partial x}\ .$$

Одновимірну функцію розподілу можна знайти через щільность за формулою:

$$F_\xi(x|\ t) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y|\ t) dy\,.$$

Означення 6. **Двовимірною функцією розподілу** випадкового процесу $\xi(t)$ називається функція $F_\xi(x_1, x_2 \mid t_1, t_2)$, яка для $\forall t_1, t_2 \in T$ співпадає з двовимірною функцією розподілу перерізів $\xi(t_1), \xi(t_2)$:

$$F_\xi(x_1, x_2 \mid t_1, t_2) = P(\xi(t_1) < x_1; \xi(t_2) < x_2).$$

Означення 7. **Двовимірною щільністю розподілу** випадкового процесу $\xi(t)$ називається функція:

$$f_\xi(x_1, x_2 \mid t_1, t_2) = \frac{\partial F_\xi(x_1, x_2 \mid t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Між двовимірною щільністю та функцією розподілу існує інтегральний зв'язок:

$$F_\xi(x_1, x_2 \mid t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_\xi(y_1, y_2 \mid t_1, t_2) dy_1 dy_2 .$$

Характеристики ВП та їх властивості

Означення 8. **Математичним сподіванням ВП** $\xi(t)$ називається детермінована функція $m_\xi(t)$, значення якої при кожному фіксованому $t \in T$ співпадає з математичним сподіванням відповідного перерізу $\xi(t)$ процесу в момент t:

$$m_\xi(t) = M\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x|t) dx . \qquad (40)$$

Означення 9. **Центрованим випадковим процесом** $\xi(t)$ називається випадковий процес

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t). \qquad (41)$$

Функції $\overset{\circ}{\xi}(t)$ та $m_\xi(t)$ називають відповвідно **флуктуаційною та детермінованою складовими ВП** $\xi(t)$.

Означення 10. **Дисперсією випадкового процесу** $\xi(t)$ $(t \in T)$ називають невипадкову функцію $D_\xi(t)$, значення якої при кожному фіксованому $t \in T$ співпадають з дисперсією випадкової величини $\xi(t)$, що є перерізом даного випадкового процесу в момент t:

$$D_\xi(t) = D\xi(t) = M\left[\overset{\circ}{\xi}(t)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi(t))^2 f(x|t) dx . \qquad (42)$$

Означення 11. **Середнім квадратичним відхиленням випадкового процесу** $\xi(t)$ називається величина $\sigma_\xi(t)=\sqrt{D_\xi(t)}$.

Означення 12. **Кореляційною функцією випадкового процесу** $\xi(t)$ $(t\in T)$ називають функцію $K_\xi(t_1,\ t_2)$ двох змінних $t_1,\ t_2$, значення якої при довільних фіксованих $t_1,\ t_2\in T$ дорівнює кореляційному моменту перерізів $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$ процесу в моменти $t_1,\ t_2$:

$$K_\xi(t_1,\ t_2)=M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_\xi(t_1)(x_2-m_\xi(t_2)f_\xi(x_1,x_2|t_1,t_2)dx_1dx_2. \quad (43)$$

Означення 13. **Нормованою кореляційною функцією випадкового процесу** $\xi(t)$ називається функція:

$$k_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\,\sigma_\xi(t_2)}. \quad (44)$$

Означення 14. **Взаємною кореляційною функцією випадкових процесів** $\xi(t)$ та $\eta(t)$ (зі спільною областю визначення T і спільним ймовірнісним простором Ω) називається функція $K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)$, яка при довільних фіксованих $t_1,\ t_2\in T$ дорівнює кореляційному моменту перерізів $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$. Має місце формула:

$$K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_\xi(t_1)(y-m_\eta(t_2)f_{\xi\eta}(x,y|t_1,t_2)dxdy, \quad (45)$$

де $f_{\xi\eta}(x,y|t_1,t_2)-$ щільнисть розподілу випадкового вектора $(\xi(t_1),\eta(t_2))$.

Означення 15. **Випадкові процеси** $\xi(t)$ **та** $\eta(t)$ називаються **некорельованими**, якщо їх взаємна кореляційна функція дорівнює нулю: $K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=0$ $(\forall t_1,t_2\in T)$.

Зауваження 2: Якщо **ВП** $\alpha(t),\beta(t)$ **задано рівностями** $\alpha(t)=\alpha$, $\beta(t)=\beta$ $(t\in T)$, **де** $\alpha,\beta-$ **випадкові величини** з числовими характеристиками $M\alpha, D\alpha$, $M\beta$, $D\beta$, $K_{\alpha\beta}$, то за формулами (30) – (45) **знайдемо:**

$$m_\alpha(t)=M\alpha(t)=M\alpha,\ D_\alpha(t)=M\left(\overset{\circ}{\alpha}(t)\right)^2=M\left(\overset{\circ}{\alpha}\right)^2=D\alpha,$$

$$K_\alpha(t_1,t_2)=M\left(\overset{\circ}{\alpha}(t_1)\overset{\circ}{\alpha}(t_2)\right)=D\alpha,\ m_\beta(t)=M\beta,\ D_\beta(t)=D\beta,\ K_\beta(t_1,t_2)=D\beta, \quad (46)$$

$$K_{\alpha\beta}(t_1,t_2)=M\left(\overset{\circ}{\alpha}(t_1)\overset{\circ}{\beta}(t_2)\right)=M\left(\overset{\circ}{\alpha}\,\overset{\circ}{\beta}\right)=K_{\alpha\beta}.$$

Властивості характеристик ВП

1) $K_\xi(t_1,\ t_2)=K_\xi(t_2,\ t_1)$;

2) $K_\xi(t_1,t_2)_{|t_1=t_2=t}=K_\xi(t,\ t)=D_\xi(t)$;

3) $K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=K_{\eta\xi}(t_2,\ t_1)$;

4) $K_{\xi\eta}(t_1,t_2)_{|t_1=t_2=t}=K_{\xi\eta}(t,\ t)=K_{\eta\xi}(t,\ t)$;

5) $\left|K_\xi(t_1,\ t_2)\right|\le\sqrt{D_\xi(t_1)\,D_\xi(t_2)}=\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)$;

6) $\left|K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)\right|\le\sqrt{D_\xi(t_1)\,D_\eta(t_2)}=\sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2)$.

Характеристики лінійних алгебраїчних перетворень ВП

1. При перетворенні ВП $\xi(t)$ у ВП $\eta(t)$ за формулою $\eta(t)=A(t)\xi(t)+B(t)$, де $A(t)$ та $B(t)-$ детерміновані функції, маємо:

$$\begin{aligned}&1)\ m_\eta(t)=A(t)m_\xi(t)+B(t),\\&2)\ K_\eta(t_1,t_2)=A(t_1)A(t_2)K_\xi(t_1,t_2),\\&3)\ D_\eta(t)=A^2(t)D_\xi(t).\end{aligned}\quad (47)$$

2. При перетворенні випадкових процесів $\alpha(t)$, $\beta(t)$ у випадкові процеси $\xi(t)$, $\eta(t)$ за формулами $\xi(t)=A_1(t)\alpha(t)+B_1(t)$, ВП $\eta(t)=A_2(t)\beta(t)+B_2(t)$, де $A_1(t)$, $B_1(t)$, $A_2(t)$, $B_2(t)-$ детерміновані функції, маємо:

$$K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=A_1(t_1)A_2(t_2)K_{\alpha\beta}(t_1,t_2)\,,K_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)=A_1(t_1)A_2(t_2)K_{\alpha\beta}(t_1,t_2)\,. \quad (48)$$

3. Якщо ВП $\xi(t)$, $\eta(t)$,$\zeta(t)$ зв'язані рівністю $\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t)$, то

$$\begin{aligned}&1)\ m_\zeta(t)=m_{\xi+\eta}(t)=m_\xi(t)+m_\eta(t),\\&2)\ D_\varsigma(t)=D_{\xi+\eta}(t)=D_\xi(t)+D_\eta(t)+2K_{\xi\eta}(t,t),\\&3)\ K_\zeta(t_1,t_2)=K_{\xi+\eta}(t_1,t_2)=K_\xi(t_1,t_2)+K_\eta(t_1,t_2)+K_{\xi\eta}(t_1,t_2)+K_{\eta\xi}(t_1,t_2).\end{aligned}\quad (49)$$

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Дано характеристики випадкового процесу $\xi(t)$: $m_\xi(t) = 3t^2$, $K_\xi(t_1,t_2) = \dfrac{t_1^2 t_2^2}{1+t_1t_2}$. Треба знайти характеристики $m_\eta(t), K_\eta(t_1,t_2)$ і $D_\eta(t)$ для ВП $\eta(t) = (t^2+4)\xi(t) + e^{-2t}$.

Розв'язання: Для знаходження характеристик випадкового процесу $\eta(t)$ застосуємо формули лінійного алгебраїчного перетворення (35), матимемо:

$$m_\eta(t) = (t^2+4)m_\xi(t) + e^{-2t} = 3(t^2+4)t^2 + e^{-2t},$$

$$K_\eta(t_1,t_2) = (t_1^2+4)(t_2^2+4)K_\xi(t_1,t_2) = (t_1^2+4)(t_2^2+4)\frac{t_1^2t_2^2}{1+t_1t_2},$$

$$D_\eta(t) = K_\eta(t_1,t_2)_{|t_1=t_2=t} = (t^2+4)^2 D_\xi(t) = (t^2+4)^2\frac{t^4}{1+t^2}.$$

Відповідь: $m_\eta(t) = 3(t^2+4)t^2 + e^{-2t}$, $K_\eta(t_1,t_2) = (t_1^2+4)(t_2^2+4)\dfrac{t_1^2t_2^2}{1+t_1t_2}$,

$$D_\eta(t) = (t^2+4)^2\frac{t^4}{1+t^2}.$$

Приклад 2. Дано випадкові величини α та β з характеристиками: $M\alpha = 2$, $M\beta = -3$, $D\alpha = 4$, $D\beta = 5$, $K_{\alpha\beta} = -2$. Випадкові процеси $\xi(t), \eta(t)$ задано рівностями $\xi(t) = \alpha\cdot\sin 3t + 2e^{-5t}$, $\eta(t) = \beta\cdot\cos 3t + \dfrac{3t}{3t+7}$. Знайти характеристики $m_\zeta(t), K_\zeta(t_1,t_2)$ та $D_\zeta(t)$ для випадкового процесу $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$.

Розв'язання: 1) Визначимо характеристики компонентів $\xi(t)$, $\eta(t)$. За формулами (46) та формулами лінійних алгебраїчних перетворень (47), (48) по виразах $\xi(t)$, $\eta(t)$ знайдемо:

$$m_\xi(t) = M\alpha\cdot\sin 3t + 2e^{-5t} = 2\sin 3t + 2e^{-5t},\ m_\eta(t) = M\beta\cdot\cos 3t + \frac{3t}{3t+7} =$$

$$= -3\cos 3t + \frac{3t}{3t+7},$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = K_\alpha(t_1,t_2)\cdot\sin 3t_1\sin 3t_2 = D_\alpha\cdot\sin 3t_1\sin 3t_2 = 4\sin 3t_1\sin 3t_2,$$

$$K_{\eta}(t_1,t_2) = K_{\beta}(t_1,t_2)\cdot\cos 3t_1\cos 3t_2 = D_{\beta}\cdot\cos 3t_1\cos 3t_2 = 5\cos 3t_1\cos 3t_2,$$

$$D_{\xi}(t) = D_{\alpha}\cdot\sin^2 3t = 4\sin^2 3t,\quad D_{\eta}(t) = D_{\beta}\cdot\cos^2 3t = 5\cos^2 3t,$$

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = K_{\alpha\beta}(t_1,t_2)\cdot\sin 3t_1\cos 3t_2 = K_{\alpha\beta}\cdot\sin 3t_1\cos 3t_2 = -2\sin 3t_1\cos 3t_2,$$

$$K_{\eta\xi}(t_1,t_2) = K_{\alpha\beta}(t_2,t_1)\cdot\sin 3t_2\cos 3t_1 = K_{\alpha\beta}\cdot\sin 3t_2\cos 3t_1 = -2\sin 3t_2\cos 3t_1.$$

2) За формулами (48) по знайдених характеристиках компонентів отримаємо:

$$m_{\zeta}(t) = m_{\xi+\eta}(t) = m_{\xi}(t) + m_{\eta}(t) = 2\sin 3t + 2e^{-5t} - 3\cos 3t + \frac{3t}{3t+7},$$

$$D_{\zeta}(t) = D_{\xi+\eta}(t) = D_{\xi}(t) + D_{\eta}(t) + 2K_{\xi\eta}(t,t) = 4\sin^2 3t + 5\cos^2 3t - 4\sin 3t\cos 3t =$$

$$= 4 + \cos^2 3t - 2\sin 6t,$$

$$K_{\zeta}(t_1,t_2) = K_{\xi+\eta}(t_1,t_2) = K_{\xi}(t_1,t_2) + K_{\eta}(t_1,t_2) + K_{\xi\eta}(t_1,t_2) + K_{\eta\xi}(t_1,t_2) =$$

$$= 4\sin 3t_1\sin 3t_2 + 5\cos 3t_1\cos 3t_2 - 2\sin 3t_1\cos 3t_2 - 2\sin 3t_2\cos 3t_1 = 4\cos 3(t_2 - t_1) +$$
$$+ \cos 3t_1\cos 3t_2 - 2\sin 3(t_1 + t_2).$$

Відповідь: $m_{\zeta}(t) = 2\sin 3t + 2e^{-5t} - 3\cos 3t + \frac{3t}{3t+7}$, $D_{\xi}(t) = 4 + \cos^2 3t - 2\sin 6t$, $K_{\xi}(t_1,t_2) = 4\cos 3(t_2 - t_1) + \cos 3t_1\cos 3t_2 - 2\sin 3(t_1 + t_2)$.

10. Задачі на диференціювання та інтегрування випадкових процесів

А. Теоретичні відомості

Диференціювання ВП

Означення 1. **Випадковий процес** $\xi(t)$ називається **диференційовним в точці** $t_0 \in T$, а **випакова величина** $\xi'(t_0)$ – його **похідною в точці** t_0 і пишуть $\xi'(t_0) = CK\lim\limits_{t\to t_0}\frac{\xi(t)-\xi(t_0)}{t-t_0}$ (або $\xi'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{\xi(t)-\xi(t_0)}{t-t_0}$), якщо має місце рівність:

$$\lim_{t\to t_0} M\left(\frac{\xi(t)-\xi(t_0)}{t-t_0} - \xi'(t_0)\right)^2 = 0.$$

Означення 2. ВП $\xi(t)$ називається **диференційовним на інтервалі** (a,b), якщо він є диференційовним при $\forall t \in (a,b)$.

Теорема 1. Випадковий процес $\xi(t)$ є диференційовним на інтервалі (a,b) тоді і лише тоді, коли для всіх $t,\ t_1,\ t_2 \in (a,b)$:

1) існують похідні $\dfrac{dm_\xi(t)}{dt}$, $\left.\dfrac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \ \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2 = t}$;

2) характеристики випадкового процесу $\xi'(t)$ визначаються за формулами

$$m_{\xi'}(t) = \frac{dm_\xi(t)}{dt}, \ K_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \ \partial t_2}. \qquad (50)$$

Інтегрування ВП

Нехай $\xi(t)$ − ВП з областю визначення T=[a,b], а $\varphi(t,\theta)$− детермінована функція, визначена у квадраті $D = \{(t,\theta), \ a \le t \le b, a \le \theta \le b\}$. Введемо на відрізку [$a,b$] розбиття $\pi(a, b)$: $a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_{n-1} < \theta_n = b$. Довжини інтервалів (θ_{k-1}, θ_k) ($k = \overline{1;n}$) позначимо через $\Delta\theta_k$, довжину найбільшого з цих інтервалів − через λ: $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_k \Delta\theta_k$. На інтервалах (θ_{k-1}, θ_k) виберемо довільним чином точки $\widetilde{\theta}_k$ і складемо інтегральну суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(t, \widetilde{\theta}_k)\xi(\widetilde{\theta}_k)\Delta\theta_k$.

Означення 3. **Випадковий процес** $\eta(t)$ називається **визначеним інтегралом від випадкового процесу** $\xi(t)$ **з ядром** $\varphi(t,\theta)$ **на відрізку [*a,b*]** і пишуть $\eta(t) = = \int\limits_a^b \varphi(t,\theta)\xi(\theta)d\theta$, якщо $\eta(t) = CK\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(t,\widetilde{\theta}_k)\xi(\widetilde{\theta}_k)\Delta\theta_k$, тобто має місце рівність:

$$\lim_{\lambda\to 0} M\left[\sum_{k=1}^{n}\varphi(t,\widetilde{\theta}_k)\xi(\widetilde{\theta}_k)\Delta\theta_k - \eta(t)\right]^2 = 0, \quad t \in [a,b].$$

Якщо $\eta(t) = C$ **(**$C = const$**)**, то випадковий процес $\eta(t)$ вироджується у випадкову величину $\eta = C \cdot \int\limits_a^b \xi(\theta)d\theta$.

Якщо ядро $\varphi(t,\theta)$ є функцією Хевісайда: $\varphi(t,\theta) = h(t-\theta) = \begin{cases} 1, \theta \le 1, \\ 0, \theta > 1, \end{cases}$ то випадковий процес $\eta(t)$ стає **інтегралом зі змінною верхнею межею**: $\eta(t)$ = $= \int\limits_a^t \xi(\theta)d\theta$.

Теорема 2. Випадковий процес $\xi(t)$ є інтегровним на відрізку $[a, \ b]$ з ядром $\varphi(t, \theta)$ тоді і тільки тоді, коли:

1) функції $m_\xi(t)$, $K_\xi(t_1,\ t_2)$ та $\varphi(t,\theta)$ є інтегровними на $[a,\ b]$ (по кожному з аргументів);

2) характеристики випадкового процесу $\eta(t)=\int_a^b \varphi(t,\theta)\xi(\theta)d\theta$ визначаються через характеристики випадкового процесу $\xi(t)$ за формулами:

$$m_\eta(t)=\int_a^b \varphi(t,\theta)m_\xi(\theta)d\theta,\ K_\eta(t_1,t_2)=\int_a^b\int_a^b \varphi(t_1,\theta_1)\varphi(t_2,\theta_2)K_\xi(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2,$$

$$D_\eta(t)=\int_a^b\int_a^b \varphi(t,\theta_1)\varphi(t,\theta_2)K_\xi(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2, \quad (51)$$

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\int_a^b \varphi(t_2,\theta)K_\xi(t_1,\theta)d\theta.$$

Наслідок. Якщо ВП $\xi(t)$ є інтегровним на відрізку $[a,\ b]$ з ядром $\varphi(t,\theta)$, то характеристики ВП $\eta(t)$ $=\int_a^t \varphi(t,\theta)\xi(\theta)d\theta$ знаходяться за формулами:

$$m_\eta(t)=\int_a^t \varphi(t,\theta)m_\xi(\theta)d\theta,\ K_\eta(t_1,t_2)=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \varphi(t_1,\theta_1)\varphi(t_2,\theta_2)K_\xi(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2,$$

$$D_\eta(t)=K_\eta(t_1,t_2)=\int_a^t \varphi(t,\theta_1)\varphi(t,\theta_2)K_\xi(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2, \quad (52)$$

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\int_a^{t_2} \varphi(t_2,\theta)K_\xi(t_1,\theta)d\theta.$$

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Випадкові процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ зв'язані рівністю $\eta(t)=\dfrac{8}{e^{-t}+1}\dfrac{d\xi}{dt}+2\sin^2 t$. Характеристики випадкового процесу $\xi(t)$ задано виразами: $m_\xi(t)=\ln(t^2+1), K_\xi(t_1,t_2)=\dfrac{t_1^3 t_2^3}{(1+t_1)(1+t_2)}$. Треба знайти характеристики $m_\eta(t), K_\eta(t_1,t_2)$ та $\sigma_\eta(t)$ для випадкового процесу $\eta(t)$.

Розв'язання: 1) За формулами (50) визначимо характеристики ВП $\xi'(t)=\dfrac{d\xi}{dt}$.

Матимемо: $m_{\xi'}(t)=\dfrac{dm_\xi(t)}{dt}=\left(\ln(t^2+1)\right)'=\dfrac{2t}{t^2+1}$. При визначенні кореляційної функції $K_{\xi'}(t_1,t_2)$ спершу знайдемо частинну похідну $\dfrac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1}$:

$$\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\left(\frac{t_1^3t_2^3}{(1+t_1)(1+t_2)}\right)'_{t_1}=\frac{t_2^3}{1+t_2}\left(\frac{t_1^3}{1+t_1}\right)'_{t_1}=$$

$$=\frac{t_2^3}{1+t_2}\frac{3t_1^2(1+t_1)-t_1^3}{(1+t_1)^2}=\frac{t_2^3}{1+t_2}\frac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}.$$

Далі після диференціювання по змінній t_2, отримаємо:

$$K_{\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}=\left(\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right)'_{t_1}=\left(\frac{t_2^3}{1+t_2}\frac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}\right)'_{t_1}=$$

$$=\left(\frac{t_2^3}{1+t_2}\frac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}\right)'_{t_1}=\frac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}\left(\frac{t_2^3}{1+t_2}\right)'_{t_1}=\frac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}\frac{3t_2^2+2t_2^3}{(1+t_2)^2}.$$

2) ВП $\eta(t)$ розглядатимемо як лінійне перетворення ВП $\xi'(t)$ за законом: $\eta(t)=A(t)\xi'(t)+B(t)$, де $A(t)=\dfrac{8}{e^{-t}+1}$, $B(t)=2\sin^2 t$. Оскільки характеристики ВП вже знайдені, $m_{\xi'}(t)=\dfrac{2t}{t^2+1}$ і $K_{\xi'}(t_1,t_2)=\dfrac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}\dfrac{3t_2^2+2t_2^3}{(1+t_2)^2}$, то далі за формулами (48) отримаємо: $m_\eta(t)=A(t)m_{\xi'}(t)+B(t)=\dfrac{8}{e^{-t}+1}\dfrac{2t}{t^2+1}+2\sin^2 t$,

$$K_\eta(t_1,t_2)=A(t_1)A(t_2)K_\xi(t_1,t_2)=\frac{8}{e^{-t_1}+1}\frac{8}{e^{-t_2}+1}\frac{3t_1^2+2t_1^3}{(1+t_1)^2}\frac{3t_2^2+2t_2^3}{(1+t_2)^2}=$$

$$=\frac{64}{(e^{-t_1}+1)(e^{-t_2}+1)}\frac{t_1^2t_2^2(3+2t_1)(3+2t_2)}{(1+t_1)^2(1+t_2)^2},D_\eta(t)=A^2(t)D_\xi(t)=\frac{64}{(e^{-t_1}+1)^2}\frac{t^4(3+2t)^2}{(1+t)^4},$$

$$\sigma_\eta(t)=\sqrt{D_\eta(t)}=\frac{8}{e^{-t}+1}\frac{t^2(3+2t)}{(1+t)^2}.$$

Відповідь: $m_\eta(t)=\dfrac{16t}{(e^{-t}+1)(t^2+1)}+2\sin^2 t$, $\sigma_\eta(t)=\dfrac{8}{e^{-t}+1}\dfrac{t^2(3+2t)}{(1+t)^2}$,

$$K_\eta(t_1,t_2)=\frac{64}{(e^{-t_1}+1)(e^{-t_2}+1)}\frac{t_1^2t_2^2(3+2t_1)(3+2t_2)}{(1+t_1)^2(1+t_2)^2}.$$

Приклад 2. Випадкові процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ зв'язані рівністю $\eta(t) = e^{-3t}\int\limits_0^t \cos(t-\theta)\xi(\theta)d\theta + \dfrac{7t}{t^2+2}$. Характеристики випадкового процесу $\xi(t)$ задано: $m_\xi(t) = \dfrac{3}{1+\sin^2 t}$, $K_\xi(t_1,t_2) = \cos^2 t_1 \cos^2 t_2$. Треба знайти характеристики $m_\eta(t)$, $K_\eta(t_1,t_2)$ та $\sigma_\eta(t)$ для випадкового процесу $\eta(t)$.

Розв'язання: 1) Подамо ВП $\eta(t)$ у вигляді

$$\eta(t) = \zeta(t) + B(t), \tag{53}$$

де

$$\zeta(t) = \int\limits_0^t e^{-3t}\cos(t-\theta)d\theta,\quad B(t) = \frac{7t}{t^2+2}. \tag{54}$$

2) Для ВП $\zeta(t)$ за формулами (54) і (52) (при $\varphi(t,\theta) = e^{-3t}\cos(t-\theta)$) знайдемо характеристики $m_\zeta(t)$, $K_\zeta(t_1,t_2)$ і $D_\zeta(t)$. При знаходженні математичного сподівання матимемо:

$$m_\zeta(t) = \int\limits_0^t \varphi(t,\theta) m_\zeta(\theta)d\theta = \int\limits_0^t e^{-3t}\cos(t-\theta)\frac{3}{1+\sin^2\theta}d\theta =$$

$$= 3e^{-3t}\int\limits_0^t \frac{\cos(t-\theta)}{1+\sin^2\theta}d\theta = 3e^{-3t}\int\limits_0^t \frac{\cos t\cos\theta + \sin t\sin\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta = 3e^{-3t}\cos t\int\limits_0^t \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta +$$

$$+ 3e^{-3t}\sin t\int\limits_0^t \frac{\sin\theta}{2-\cos^2\theta}d\theta = 3e^{-3t}\cos t\int\limits_0^t \frac{d\sin\theta}{1+(\sin\theta)^2} + 3e^{-3t}\sin t\int\limits_0^t \frac{d\cos\theta}{(\cos\theta)^2 - 2} =$$

$$= 3e^{-3t}\cos t\cdot\left[arctg(\cos\theta)\right]\Big|_0^t + 3e^{-3t}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{\cos\theta-\sqrt{2}}{\cos\theta+\sqrt{2}}\right|\right]\Big|_0^t =$$

$$= 3e^{-3t}\cos t\cdot\left[arctg(\cos t) - \frac{\pi}{4}\right] + 3e^{-3t}\sin t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t} - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right].$$

Кореляційну функцію $K_\zeta(t_1,t_2)$ отримаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} K_\zeta(t_1,t_2) &= \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} \varphi(t_1,\theta_1)\varphi(t_2,\theta_2)K_\zeta(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = \\ &= \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} e^{-3t_1}\cos(t_1-\theta_1)e^{-3t_2}\cos(t_2-\theta_2)\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 = e^{-3(t_1+t_2)}I(t_1)I(t_2), \end{aligned} \tag{55}$$

де

$$I(t)=\int_0^t \cos(t-\theta)\cos^2\theta\, d\theta=\int_0^t (\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)\cos^2\theta\, d\theta=\cos t\int_0^t \cos^3\theta\, d\theta+$$

$$+\sin t\int_0^t \sin\theta\cos^2\theta\ d\theta=\cos t\int_0^t (1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta+\sin t\int_0^t \cos^2\theta(-1)d\cos\theta=$$

$$=\cos t\,(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta)\Big|_0^t-\sin t\cdot\frac{1}{3}(\cos^3\theta)\Big|_0^t=\cos t\,(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)-\frac{1}{3}\sin t(\cos^3 t-1)=$$

$$\cos t\ \sin t\,(1-\frac{1}{3}\sin^2 t-\frac{1}{3}\cos^2 t)+\frac{1}{3}\sin t=\frac{2}{3}\cos t\ \sin t+\frac{1}{3}\sin t=\frac{1}{3}(\sin 2t+\sin t). \qquad (56)$$

Підставивши значення $I(t)$ у вираз (55), матимемо кінцевий результат:

$$K_\zeta(t_1,t_2)=\frac{1}{9}e^{-3(t_1+t_2)}(\sin 2t_1+\sin t_1)(\sin 2t_2+\sin t_2)\,.$$

Дисперсію $D_\varsigma(t)$ знайдемо за формулою:

$$D_\zeta(t)=K_\zeta(t,t)=K_\zeta(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=t}=\frac{1}{9}e^{-6t}(\sin 2t+\sin t)^2\,.$$

3) Виходячи зі співвідношення (53) за формулами лінійного алгебраїчного перетворення (47), при $A(t)=1,\ B(t)=\dfrac{7t}{t^2+2}$, знайдемо:

$$m_\eta(t)=m_\zeta(t)+B(t)=3e^{-3t}\cos t\left[arctg(\cos t)-\frac{\pi}{4}\right]+$$

$$+\frac{3}{2\sqrt{2}}e^{-3t}\sin t\left[\ln\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]+\frac{7t}{t^2+2},$$

$$K_\eta(t_1,t_2)=K_\zeta(t_1,t_2)=\frac{1}{9}e^{-3(t_1+t_2)}(\sin 2t_1+\sin t_1)(\sin 2t_2+\sin t_2)\,,$$

$$D_\eta(t)=D_\zeta(t)=\frac{1}{9}e^{-6t}(\sin 2t+\sin t)^2,\ \sigma_\eta(t)=\sqrt{D_\eta(t)}=\frac{1}{3}e^{-3t}\left|\sin 2t+\sin t\right|.$$

Відповідь:

$$m_\eta(t)=3e^{-3t}\cos t\left[arctg(\cos t)-\frac{\pi}{4}\right]+\frac{3}{2\sqrt{2}}e^{-3t}\sin t\left[\ln\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]+$$

$$+\frac{7t}{t^2+2},$$

$$K_\eta(t_1,t_2)=\frac{1}{9}e^{-3(t_1+t_2)}(\sin 2t_1+\sin t_1)(\sin 2t_2+\sin t_2)\,,\sigma_\eta(t)=\frac{1}{3}e^{-3t}\left|\sin 2t+\sin t\right|.$$

11. Задачі на марковські ВП з дискретними станами та дискретним часом

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Випадковий процес** $\xi(t)$ з областю визначення T і фазовим простором X називається **марковським**, якщо для кожної зростаючої послідовності $\{t_j\}\Big|_{j=1}^{j=n}$ значень параметра t ($t \in T$) при довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ його умовні ймовірності мають властивість відсутності післядії:

$$P\{\xi(t_n) < x_n | \xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_{n-1}) < x_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) < x_n | \xi(t_{n-1}) < x_{n-1}\},$$

тобто не залежать від історії зміни значень ВП в минулому (до момента t_{n-1}, що безпосередньо передує моменту t_n.

Означення 2. Марковський ВП з дискретним часом і дискретними станами називають **ланцюгом Маркова**.

Зауваження 1. Якщо всі значення **ВП** $\xi(t)$ є цілочисельними (фазовий простір X є підмножиною множини Z_0), то його можна трактувати як **показник станів** деякої фізичної системи S, має скінченну або зліченну кількість станів S_k $(k \in Z_0)$, у кожен момент t може перебувати в тільки в одному з цих станів, а переходи зі стану в стан можуть відбуватись тільки у фіксовані моменти $t_j \in T$ (під дією випадкових чинників).

Означення 3. Фізична система S з марковським показником випадкових станів $\xi(t)$ називається **марковською системою**.

Визначальна властивість марковської системи: якщо для кожного момента часу $t = t_0$ ймовірність довільного стану системи в майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану в момент $t = t_0$ і не залежить від того, яким чином вона потрапила в цей стан (тобто від історії зміни станів в минулому, при $t < t_0$), то така система є **марковською системою**.

Приклади марковських систем:

1) робота телефонної лінії S зі станами S_1, S_2, S_3 (вільна, зайнята, не працює);

2) робота залізничної каси S зі станами S_1 (не працює), S_2 (вільна), S_3 (обслуговує, черги нема), S_4 (у черзі один пасажир), S_5 (у черзі двоє) тощо.

Зауваження 2. При дослідженні марковських систем їх звичайно ототожнюють з випадковими процесами $\xi(t)$ − показниками їх станів.

Означення 4. Моменти переходу із одного стану в інший називають **кроками** марковського процесу.

Позначимо через S_i^k подію, що система після кроку k знаходиться в стані S_i, а через $p_i(k)$– ймовірність цієї події. Тоді, для кожного фіксованого k, події S_1^k, $S_2^k,...,S_n^k$ утворюють повну групу подій і має місце рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} p(S_i^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1 \quad (k = 1,2,...).$$

Означення 5. Вектор-стовпець $\overline{P}(k)$ називають **вектором ймовірностей станів** системи після кроку k, вектор ймовірностей станів в початковий момент часу позначають через $\overline{P}(0)$:

$$\overline{P}(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ ... \\ p_n(k) \end{pmatrix}, \quad \overline{P}(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ ... \\ p_n(0) \end{pmatrix}.$$

Означення 6. **Перехідною ймовірністю** p_{ij}^k системи називають ймовірність того, що після кроку k система опиниться в стані j, при умові, що перед цим вона перебувала в стані i:

$$p_{ij}^k = p(S_j^k \big| S_i^{k-1}).$$

Означення 7. Ланцюг Маркова називають **однорідним**, якщо перехідні ймовірності p_{ij}^k не залежать від кроку k, тобто $p_{ij}^k = p_{ij} = const$ для всіх $k \geq 1$, в в іншому разі (якщо ймовірності p_{ij}^k залежать від кроку k) – **неоднорідним**.

Надалі будемо розглядати лише однорідні ланцюги Маркова.

Означення 8. **Матрицею перехідних ймовірностей** системи називають квадратну матрицю P, елементами якої є перехідні ймовірності:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Властивості матриці перехідних ймовірностей

Властивість 1. Сума елементів кожного рядка матриці P дорівнює 1.

Властивість 2. Вектор ймовірностей станів після кроку k дорівнює добутку транспонованої матриці перехідних ймовірностей на вектор ймовірностей станів після кроку $k-1$:

$$\overline{P}(k) = P^{T}\,\overline{P}(k-1)\ , \qquad (57)$$

де P^{T} – транспонована матриця P.

Властивість 3. Вектор ймовірностей станів системи після кроку k визначається через матрицю перехідних ймовірностей та вектор ймовірностей станів у початковий момент часу за формулою:

$$\overline{P}(k) = P^{T}\,\overline{P}(k-1) = (P^{k})^{T}\,\overline{P}(0) \qquad (58)$$

У випадку однорідного ланцюга Маркова зручно використовувати розмічений граф станів.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Залізничний вагон як фшзична система може знаходитись в одному з таких станів: S_1 – повністю справний; S_2 – несправний, оглядається на предмет ремонту; S_3 – ремонтується; S_4 – списаний. Відомо, що ймовірність виходу вагона з ладу протягом року дорівннює 0,2; ймовірність списання – 0,2; ймовірність відправки на ремонт – 0,7; ймовірність того, що він відремонтований – 0,4. Побудувати розмічений граф станів. Знайти вектор ймовірностей станів через три роки, якщо в початковий момент вагон справний.

Розв'язання: Кружечками позначимо стани системи. Стрілками показано напрямки переходу системи з одного стану в інший. В певний момент часу справний вагон (стан S_1) стає несправним і оглядається (стан S_2). Після огляду (стан S_2) вагон може бути списаним (стан S_4) або ремонтуватися (стан S_3) після чого знову стане справним (стан S_1). Біля стрілок, що вказують напрями переходу проставлені відповідні перехідні ймовірності.

Розмічений граф системи має вигляд рис. 5.

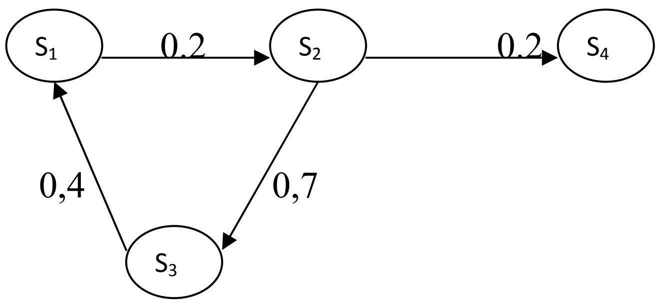


Рис. 5

Побудуємо матрицю перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Ймовірність переходу зі стану S_1 в стан S_2 дорівнює 0,2 (p_{12}=0,2). Оскільки за один крок система не може перейти із стану S_2 в стан S_3 та S_4, то $p_{13} = p_{14} = 0$. За властивістю 1 маємо $p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 1$. Отже, $p_{11} = 1 - p_{12} - p_{13} - p_{14} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, тобто ймовірність того, що вагон залишиться справним, дорівнює 0,8.

Ймовірності переходу зі стану S_2 в стани S_3, S_4 та S_1 відповідно $p_{23} = 0{,}7$, $p_{24} = 0{,}2$, $p_{21} = 0$. Ймовірність залишитись в стані S_2 (того, що огляд вагона буде продовжено) розрахуємо за формулою: $p_{22} = 1 - p_{21} - p_{23} - p_{24} = 1 - 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}1$.

Аналогічно знаходимо інші перехідні ймовірності. В початковий момент часу вагон справний, тобто $P_1(0)$=1, P_2 (0)=0, $P_3(0)$=0, $P_4(0)$=0. Таким чином,

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 3. З властивості 1 випливає, що діагональні елементи матриці P (імовірності того, що система залишається в попередньому стані) можна знаходити з умови, що сума елементів кожного її рядка повинна дорівнювати одиниці. Скориставшись формулами (57), (58), знайдемо $\overline{P}(3)$:

$$\overline{P}(1) = P^T\,\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0{,}7 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(2) = P^T\,\overline{P}(1) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}64 \\ 0{,}18 \\ 0{,}14 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad \overline{P}(3) = P^T\,\overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0{,}568 \\ 0{,}146 \\ 0{,}210 \\ 0{,}076 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: Через три роки вагон буде справним з імовірністю 0,568; буде оглядатись з імовірністю 0,146; ремонтуватись – з імовірністю 0,21; списаний – з ймовірністю 0,076.

Зауваження 2. Для контролю розрахунків на кожному кроці необхідно переконуватись, що сума елементів вектора ймовірностей станів дорівнює одиниці.

Приклад 2. Для однорідного ланцюга Маркова із заданою матрицею перехідних ймовірностей

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

побудувати розмічений граф станів та знайти ймовірності станів після третього кроку, якщо в початковий момент система перебувала в стані S_1.

Розв'язання: За умовами задачі вектор ймовірностей станів у початковий момент часу має вигляд:

$$\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що матриця перехідних ймовірностей має розмірність 4 x 4, робимо висновок, що система може знаходитись в чотирьох станах: S_1, S_2, S_3, S_4. Ймовірності $p_{21}, p_{31}, p_{32}, p_{42}, p_{43}$ рівні нулю, тому стрілки, що сполучають відповідні стани відсутні. Оскільки система може за один крок перейти із стану S_1 в стан S_4 ($p_{14} = 0,1$) й із стану S_4 в S_1 ($p_{41} = 0,5$), ці стани сполучені двома протилежно направленими стрілками. Ймовірності $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$ залишитись у відповідному стані на графі не зображаються. Розмічений граф системи зображено на рис. 6.

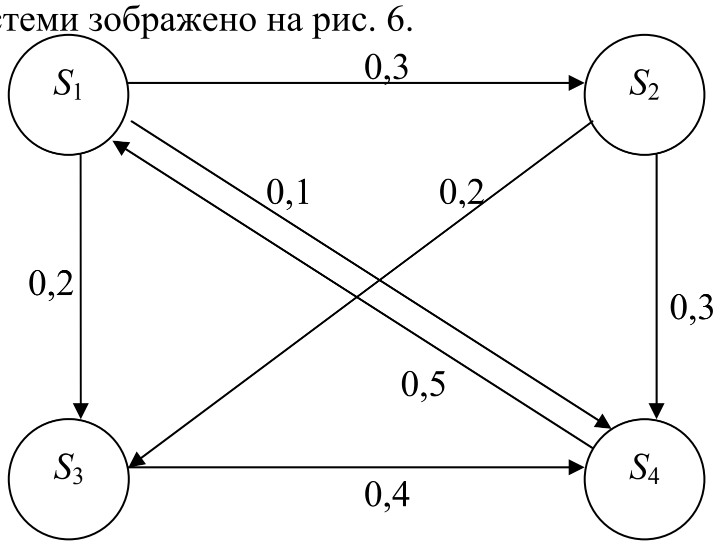


Рис. 6

Вектор $\overline{P}(3)$ знайдемо за формуламии (45), (46):

$$P^T = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad \overline{P}(1) = P^T\,\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(2) = P^T\,\overline{P}(1) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}21 \\ 0{,}27 \\ 0{,}26 \\ 0{,}26 \end{pmatrix}; \overline{P}(3) = P^T\,\overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0{,}214 \\ 0{,}198 \\ 0{,}252 \\ 0{,}336 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: Після третього кроку система з імовірністю 0,214 перебуватиме в стані S_1, з імовірністю 0,198 – в стані S_2, з імовірністю 0,252 – в стані S_3, з імовірністю 0,336 – в стані S_4.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 476 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1999. – 400 с.
3. *Грималюк В.П., Бойчук О.П., Мартиненко В.С., Ясінський А.В.* Лекції, збірник задач, типові розрахунки з вищої математики та терії ймовірностей ІІІ і V семестри. – К.: НМУВО, 2000. – 223 с.
4. *Крюков М.М., Крижановська Т.В.* Курс вищої математики. Т.2 – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
5. *Крюков М.М., Кільчинський О.О., Андрейцев А.Ю.* Конспект лекцій з теорії ймовірностей і випадкових процесів. – К: ДЕТУТ, 2008. – 132 с.
6. *Крюков М.М., Кільчинський О.О., Андрейцев А.Ю., Скрипка В.І.* Теорія ймовірностей і випадкові процеси в прикладах і задачах. – К: ДЕТУТ, 2008. – 124 с.
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

Навчально-методичне видання

Крижанівська Тетяна Василівна
Кільчинський Олександр Олександрович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки щодо виконання розрахункової роботи
Для студентів денної форми навчання
за напрямком підготовки 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Відповідальний за випуск – Кільчинський О.О.
Редакція авторська
Коректор: Щербак Н.В.
Макет і верстка: Андрієнко В.О.

Підписано до друку 10.12.2014. Формат 60х84/16. Папір – офсетний. Спосіб друку – ризографія. Замовлення № 230/14 . Наклад 40 прим.

Надруковано в Редакційно-видавничому відділі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.07 р. Серія ДК № 3079
03049, м. Київ – 049, вул. М. Лукашевича, 19