МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

А. Ю. АНДРЕЙЦЕВ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 1 для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.030601 «Менеджмент»

Київ 2015

УДК 51:517

Андрейцев А. Ю.

Вища та прикладна математика: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №1 для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.030601 «Менеджмент»/ Андрейцев А. Ю. – К.: ДЕТУТ, 2015. – 85 с.

Методичні вказівки призначені для індивідуальної роботи студентів з вищої математики. В них наводяться основні типи задач з вищої математики для студентів I курсу 1 семестру за напрямком підготовки 6.030601 «Менеджмент». На простих прикладах вивчаються найхарактерніші методи розв'язання математичних задач.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 7 від 17. 03. 15) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол № 6 від 09. 04. 15).

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.030601 «Менеджмент».

Укладач: А. Ю. Андрейцев, к.ф.-м. н., доцент

Рецензенти: Т. В. Крижановська, к.ф.-м. н., професор
О. О. Безущак, к.ф.-м. н., доцент

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки охоплюють основні розділи курсу «Вища та прикладна математика» для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент» за I семестр I курсу. Послідовність номерів задач відповідає послідовності лекцій курсу «Вища та прикладна математика». Це забезпечує рівномірне завантаження студентів і виконання ними розрахункової роботи протягом семестру, починаючи з першої лекції. Для полегшення орієнтації студентів в курсі вищої математики та глибшого засвоєння навчального матеріалу перед переліком умов завдань для самостійної роботи студентів наведено методичні рекомендації для розв'язання відповідних задач, а в кінці методичних вказівок – список контрольних питань з теорії, а також наведено список рекомендованої літератури.

Розрахункова робота повинна виконуватись на аркушах паперу білого кольору формату А4 на одному боці аркуша відповідно до чинних правил оформлення розрахункових і контрольних робіт. Зворотній бік аркуша використовується для виправлення помилок, а також для можливих допоміжних зауважень, вказівок і пояснень викладача. На титульній сторінці обов'язково має бути зазначено назву університету, назву предмета, номер розрахункової роботи, прізвище та ініціали студента, групу, в якій він навчається, а також прізвище викладача, який перевіряє роботу.

При підготовці до захисту розрахункової роботи рекомендується розглянути питання, наведені в кінці посібника. Перед виконанням кожної задачі з розрахункової роботи потрібно засвоїти теоретичні відомості з відповідної теми та самостійно розібрати наведені приклади. Розв'язання задач з розрахункової роботи повинно містити детальні пояснення всіх етапів її виконання.

Методичні вказівки містять 30 варіантів розрахункової роботи. Номер варіанта визначається порядковим номером прізвища студента в журналі викладача.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Задача 1. Виконати дії над матрицями.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. **Матрицею** називається прямокутна таблиця з $m \times n$ елементів a_{ij} $(i = \overline{1, m}\,;\, j = \overline{1, n})$, розташованих в m рядках та n стовпцях, вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо кількість рядків та стовпців однакова, то матрицю називають квадратною порядку n.

При множенні матриці на число кожен її елемент множиться на дане число.

Щоб додати дві матриці **однакової розмірності**, треба додати їхні відповідні елементи.

Добуток двох матриць існує лише тоді, коли **кількість стовпців першої з них дорівнює кількості рядків другої**. Елементи матриці $C = AB$ обчислюються за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

тобто c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів рядка i першої матриці та стовпця j другої.

Зауважимо, що $AB \neq BA$, а $A^2 = AA$, тобто є добутком матриці A на себе.

Приклад. Обчислити $AB - 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot1+0\cdot2+7\cdot3 & 5\cdot2+0\cdot0+7\cdot(-1) & 5\cdot3+0\cdot1+7\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0+3\cdot(-1) & 1\cdot3+2\cdot1+3\cdot1 \\ -1\cdot1+0\cdot2+2\cdot3 & -1\cdot2+0\cdot0+2\cdot(-1) & -1\cdot3+0\cdot1+2\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \qquad 2B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$AB - 2B = \begin{pmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -1 & 16 \\ 10 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $AB - 2B = \begin{pmatrix} 24 & -1 & 16 \\ 10 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

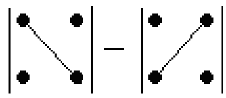
Задача 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом та за правилом Крамера.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Визначник квадратної матриці другого порядку – це число, що обчислюється за формулою:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

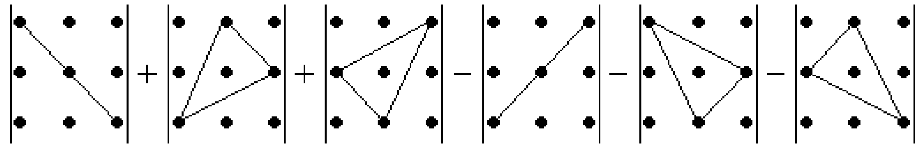
Для запам'ятовування формули використовують схему, зображену на рисунку:

$\Delta =$ 

Визначник третього порядку обчислюється за формулою:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Дану формулу легко запам'ятати, якщо застосовувати «правило трикутників», схема якого зображена на рисунку:

$\Delta =$ 

Визначник матриці позначають також $\det A$.

Означення 1. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який утворюється з Δ шляхом викреслення *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Означення 2. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij}$$

Означення 3. Квадратна матриця Е, у якій елементи головної діагоналі a_{ii} дорівнюють 1, а всі інші нулі, називається **одиничною**.

Одинична матриця виконує роль числа 1: $\mathrm{E}\mathrm{X} = XE = \mathrm{X}$.

Означення 4. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці А, якщо їх добуток дорівнює одиничній матриці, тобто виконується умова:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Обчислюється обернена матриця за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\det A$ – визначник матриці А, а A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці А.

Матричний спосіб розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задано систему, яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A – головна матриця системи (складається з коефіцієнтів при невідомих);
X – матриця невідомих;
B – матриця вільних членів (складається з чисел, що стоять в правих частинах рівнянь системи).

Тоді згідно з правилом множення матриць систему можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X: $AX = B$

Припустимо, що матриця А системи має обернену матрицю A^{-1}, помножимо обидві частини останнього рівняння на обернену матрицю A^{-1} зліва:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то $X = A^{-1}B$

Отже, щоб розв’язати систему рівнянь, достатньо знайти матрицю, обернену до головної матриці системи, і помножити її справа на матрицю-стовпець вільних членів.

Правило Крамера

Правило Крамера полягає в тому, що компоненти розв’язку системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими обчислюються за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, який одержуємо з визначника головної матриці системи шляхом заміни його стовпця i на стовпець вільних членів.

Зауважимо, що використання даних методів можливе лише тоді, коли **визначник головної матриці системи не дорівнює нулю.**

Приклад. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Розв’язання:

Матричний спосіб

Введемо матриці $\quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до матриці А. Для цього спочатку обчислимо її визначник за правилом трикутників:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot3 + 0\cdot(-1)\cdot0 - 0\cdot1\cdot3 - 2\cdot(-1)\cdot1 - 1\cdot2\cdot0 = 15.$$

Матриця А невироджена $(\det \mathrm{A} \neq 0)$, тому обернена матриця існує.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів даної матриці за формулою (1.4):

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad \mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad \mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \qquad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3; \qquad \mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6; \qquad \mathrm{A}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Складемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці ($A \cdot A^{-1} = E$):

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 7 + 0(-3) & 1(-2) + 2\cdot 1 + 0\cdot 6 & 1\cdot 4 + 2(-2) + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 7 + 2(-3) & -1(-2) + 1\cdot 1 + 2\cdot 6 & -1\cdot 4 + 1(-2) + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 7 + 1(-3) & 3(-2) + 0\cdot 1 + 1\cdot 6 & 3\cdot 4 + 0(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = E$$

Знаходимо матрицю невідомих X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Отже, остаточно $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Правило Крамера

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot(-2) + 0\cdot 5\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 5\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 0 = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot(-2) - 0\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-2) = 30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-2) + 2\cdot 5\cdot 3 + 3\cdot(-1)\cdot 0 - 3\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot 0 = 15.$$

Тоді $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{15} = -1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{15} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15}{15} = 1$. **Відповідь:** $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Задача 3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Розглянемо підприємство, що складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції.

Означення 1. **Прямі витрати** – це витрати продукції цеху i на виробництво продукції цеху k. Таким чином, продукція цеху і є проміжним продуктом (сировиною) для виробництва продукції цеху k.

Коефіцієнти a_{ik} прямих витрат – це кількість одиниць продукції цеху i, що використовується для випуску одиниці продукції цеху k.

y_i – кінцевий продукт цеху i, призначений для реалізації.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	y_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	y_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	y_3

Позначимо валовий випуск продукції цеху *i* через x_i. Тоді

$$x_i - \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3\right) = y_i, \quad i = \overline{1,3}$$

Якщо матрицю коефіцієнтів прямих витрат позначити через А, то в матричній формі маємо

$$\overline{X} - A\overline{X} = \overline{Y} \Leftrightarrow (E - A)\overline{X} = \overline{Y}$$

Звідки можемо визначити $\overline{X}$

$$\overline{X} = (E - A)^{-1}\overline{Y}$$

Означення 2. Елементи матриці $(E - A)^{-1}$ це коефіцієнти повних витрат, тобто кількість одиниць продукції цеху i необхідна для виробництва одиниці кінцевої продукції цеху k.

Приклад

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,3	300

Розв'язання:

В даному випадку: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 320 \end{pmatrix}$

Тоді $$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю (див. задачу 2)

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,00 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}$$

Таким чином, для виробництва одиниці кінцевої продукції 1-го цеху необхідно 1,04 одиниць продукції 1-го , 0,21 одиниць продукції 2-го та 0,03 одиниці продукції 3-го цеху.

Валовий випуск продукції

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,00 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 187 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Тобто валовий випуск продукції 1-го цеху $x_1 = 238$ од., 2-го – $x_2 = 187$ од., 3-го – $x_3 = 400$ од.

Відповідь: Коефіцієнти повних витрат: $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,00 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}$.

Валовий випуск продукції 1-го цеху $x_1 = 238$ од., 2-го – $x_2 = 187$ од.,
3-го – $x_3 = 400$ од.

Задача 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана – Гаусса.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Нехай маємо прямокутну матрицю $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$.

Означення 1. **Мінором *k*-го порядку** матриці А називається будь-який визначник *k*-го порядку, складений з елементів матриці А після викреслення відповідного числа рядків і стовпців без перестановок елементів, що залишилися.

Означення 2. **Рангом** r (A) матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати *елементарні перетворення*, а саме:

а) переставити місцями два рядки (стовпці);

б) помножити кожен елемент будь-якого рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Нехай дано систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

Складемо основну матрицю А і розширену матрицю $\widetilde{A}$ даної системи:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

.Можливі три випадки:

1) r (A) = r ($\widetilde{\mathrm{A}}$) = n. Система має єдиний розв'язок;
2) r (A) = r ($\widetilde{\mathrm{A}}$) < n. Система має безліч розв'язків;
3) r (A) ≠ r ($\widetilde{\mathrm{A}}$). Система не має розв'язків.

Розглянемо метод Жордана – Гаусса розв'язування і дослідження на наявність розв'язків довільної системи лінійних рівнянь.

У схемі метода елементарні перетворення проводяться з рядками розширеної матриці $\widetilde{A}$ таким чином, щоб отримати r стовпців, які складаються з нулів та однієї одиниці. При цьому в будь-яких двох таких стовпцях одиниці не можуть знаходитись в одному і тому самому рядку.

На першому кроці обирають **провідний елемент** a_{pq}. Ним може бути обраний будь-який ненульовий елемент матриці А. Далі, від кожного рядка *i*, помноженого на провідний елемент, віднімається рядок *p*, помножений на елемент a_{iq} (елемент рядка *i*, що знаходиться в одному стовпці з провідним елементом). Потім елементи всіх отриманих рядків діляться на провідний елемент. При цьому всі елементи стовпця q, крім a_{pq} стануть нулями, а $a_{pq} = 1$:

$$a'_{iq} = \begin{cases} 0, & i \neq p \\ 1, & i = p \end{cases} \qquad (*)$$

На наступному кроці провідним обирається будь-який ненульовий елемент матриці A', крім елементів рядка p і проводиться наступне перетворення.

Кількість перетворень дорівнює рангу матриці А. В результаті отримуємо матрицю, в якій r стовпців мають вигляд (*).

Символьно даний алгоритм реалізується за так званими формулами прямокутників:

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}}, \quad b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}}, \quad a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{pq} - a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}, \quad b'_i = \frac{b_i a_{pq} - a_{iq}b_p}{a_{pq}}$$

Якщо система має безліч розв'язків тобто $r(A) = r(\overline{A}) = r \prec n$, то r стовпців виду (*) називають базисними, а інші – вільними. Базисними та вільними називають відповідні їм змінні. Якщо покласти вільні змінні рівними нулю, то отримаємо базисний розв'язок. Кількість базисних розв'язків дорівнює C_n^r.

Приклад 1. Розв'язати методом Жордана – Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю (для зручності стовпець вільних членів відокремимо вертикальною лінією).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 6 \\ 4 & 6 & -7 & 10 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

На першому кроці провідним оберемо елемент $a_{11} = 2$.

Помножимо перший рядок на 4 і віднімемо від другого, помноженого на 2. Перший рядок, помножений на 3, віднімемо від третього, помноженого на 2. Отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -18 \end{array}\right)$$

Розділивши всі елементи на 2, маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -9 \end{array}\right)$$

На другому кроці провідним елементом обираємо $a'_{22} = -2.$

Помножимо другий рядок на 2 і віднімемо від першого, помноженого на –2. Другий рядок, помножений на –1, віднімемо від третього, помноженого на –2. Отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right),$$

а після ділення усіх елементів на –2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \qquad \mathrm{r}\,(\mathrm{A}) = 2; \qquad \mathrm{r}\,(\tilde{\mathrm{A}}) = 3$$

Оскільки $\mathrm{r}\,(\mathrm{A}) \neq \mathrm{r}\,(\tilde{\mathrm{A}})$ – система несумісна. Дійсно, останньому рядку матриці відповідає рівняння $0 \times x_3 = -8.$

Відповідь: Система несумісна.

Приклад 2. Розв'язати систему методом Жордана – Гаусса:
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -3 \\ 5x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання:

Випишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Ми бачимо, що третій стовпець матриці A вже має вигляд (1.11). Провідним обираємо $a_{21}=1$. Після перетворень за формулами (1.12) отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Тепер провідний елемент не може бути обраний в першому та другому рядках. Таким чином, провідним можуть бути лише $a_{32}=5$ або $a_{42}=-9$. Обираємо a_{32} і після перетворень маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

r(A)= r ($\tilde{A}$) = 3 =n. Отже система має єдиний розв'язок. Система, еквівалентна початковій, має вигляд:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$.

Приклад 3. Розв'язати систему методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Розв'язання:

На першому кроці обираємо провідним $a_{12}=1$, а на другому – $a'_{23}=1$. Отримуємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

r (A) = r ($\tilde{A}$) = 2 < n=4. Отже система має безліч розв'язків. Дійсно, система, еквівалентна початковій:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_4 = 11 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Базисні змінні x_2 та x_3 можна виразити через вільні x_1 та x_4

$x_2 = 11 - 5x_1 - 3x_4$

$x_3 = 6 - 3x_1 - 2x_4$

і надаючи x_1 та x_4 різних значень, отримувати відповідні їм x_2 та x_3.

Таким чином, $X = (x_1; 11 - 5x_1 - 3x_4; 6 - 3x_1 - 2x_4; x_4)$

Поклавши $x_1 = 0, x_4 = 0,$ отримаємо базисний розв'язок $X_b = (0; 11; 6; 0)$

Відповідь: $X = (x_1; 11 - 5x_1 - 3x_4; 6 - 3x_1 - 2x_4; x_4)$, $X_b = (0; 11; 6; 0)$.

Задача 5. Застосування векторної алгебри до задач аналітичної геометрії.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Координати вектора $\overline{AB}$ з початком в точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем в точці $B(x_2; y_2; z_2)$ визначаються як різниця координат кінця і початку вектора, тобто

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1).$$

Довжина (модуль) вектора $\overline{AB} = (x; y; z)$ визначається за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Означення 1. **Скалярним добутком** векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ на косинус кута між ними.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\varphi.$$

Якщо вектори задані своїми координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{b}$ обчислюється за формулою:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

а косинус кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Умова паралельності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$

Умова перпендикулярності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Означення 2. **Векторним добутком** векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який задовольняє умовам:

1) модуль вектора $\overline{c}$ обчислюється за формулою $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.
2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до обох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку (з кінця вектора $\bar{c}$ найкоротший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ видно проти годинникової стрілки);

Векторний добуток позначається $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ або $\bar{c} = \left[\bar{a} \times \bar{b}\right]$.

Якщо вектори $\bar{a} = \overline{AB}$ і $\bar{b} = \overline{AC}$ задані своїми координатами $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то площа трикутника ABC, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$,

де векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ визначається за формулою:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Означення 3. **Мішаним добутком** трьох впорядкованих векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ називається скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток $\bar{b} \times \bar{c}$ і позначається $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то мішаний добуток $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ обчислюється за формулою

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

Об’єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, знаходиться за формулою

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Рівняння площини в просторі, що проходить через три задані точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Якщо розкрити визначник, то рівняння площини набуде загального вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (*)$$

де $\bar{n} = (A, B, C)$ – вектор нормалі до площини.

Канонічне рівняння прямої в просторі, що проходить через задану точку $\mathrm{M}_o(x_0, y_0, z_0)$ паралельно напрямному вектору $\bar{\mathrm{s}} = (1, m, n)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (**)$$

Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Якщо пряма в просторі задана рівнянням (**), а площина α рівнянням (*), то синус кута ψ між ними обчислюється за формулою:

$$\sin\psi = \left|\frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\right|$$

Якщо пряма паралельна площині, то $Al + Bm + Cn = 0$.

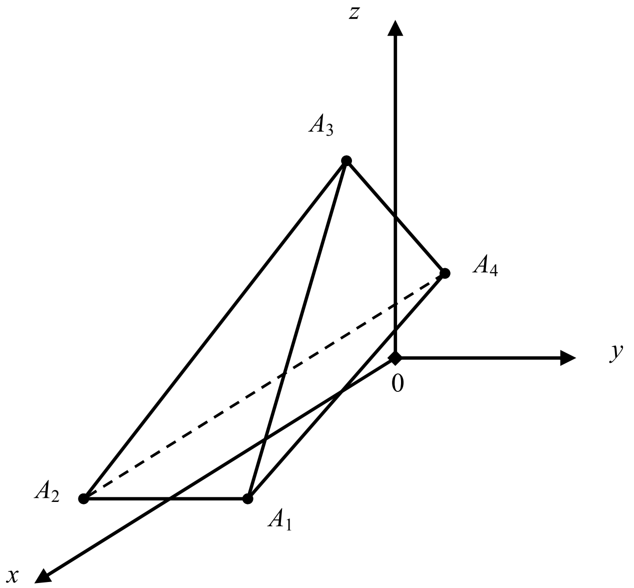
Якщо пряма перпендикулярна площині, то $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

Приклад. Дано вершини піраміди – точки $A_1(5;1;0)$, $A_2(7;0;1)$, $A_3(2;1;4)$, $A_4(5;5;3)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Розв'язання:

Побудуємо піраміду $A_1A_2A_3A_4$:



1) Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 – це кут між векторами $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_1A_4}$. Знайдемо координати вектора $\overline{A_1A_2} = (7 - 5;\ 0 - 1;\ 1 - 0) = (2;\ -1;\ 1)$ та.

$\overline{A_1A_4} = (5-5; 5-1; 3-0) = (0;4;3)$.

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 4 + 1\cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{-1}{5\sqrt{6}} \approx -0{,}08$$

2) Площа грані $A_1A_2A_3$ обчислюється за формулою $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|$, де $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$ – векторний добуток векторів $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}$.

. $\overline{A_1A_2} = (2;-1;1)$; $\overline{A_1A_3} = (2-5;1-1;4-0) = (-3;0;4)$

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \bar i\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \bar j\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + \bar k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\bar i - 11\bar j - 3\bar k = \left(-4;-11;-3\right)$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-11)^2+(-3)^2} = \sqrt{146} \text{ кв.од.}$$

3) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знаходиться за формулою $V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\bar a\bar b\bar c\right|$,

де $\bar a = \overline{A_1A_2} = (2;-1;1)$; $\bar b = \overline{A_1A_3} = (-3;0;4)$; $\bar c = \overline{A_1A_4} = (0;4;3)$.

$$\bar a\bar b\bar c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0+0-12-0-32-9 = -53 \quad \Rightarrow$$

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\bar a\bar b\bar c\right| = \frac{1}{6}\left|-53\right| = 8\frac{5}{6} \text{ куб. од.}$$

4) Складемо рівняння прямої A_1A_2 як прямої, що проходить через дві точки $A_1(5;1;0)$ і $A_2(7;0;1)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-5}{7-5} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z-0}{1-0} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

5) Запишемо рівняння площини $A_1A_2A_3$ як площини, що проходить через задані три точки $A_1(5;1;0)$, $A_2(7;0;1)$, $A_3(2;1;4)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z-0 \\ 7-5 & 0-1 & 1-0 \\ 2-5 & 1-1 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -4(x-5)-11(y-1)-3z = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x+11y+3z-31 = 0.$$

6) Знайдемо синус кута між ребром A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$. Рівняння прямої A_1A_4:

$$\frac{x-5}{5-5} = \frac{y-1}{5-1} = \frac{z-0}{3-0} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-5}{0} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-0}{3}$$

$\bar n = (A,B,C) = (-4;-11;-3)$, $\bar{\mathrm{s}} = \left(1,m,n\right) = (0;4;3)$

$$\sin\psi=\left|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|=\left|\frac{0\cdot(-4)+4\cdot(-11)+3\cdot(-3)}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-11)^2+(-3)^2}}\right|=.$$

$$=\left|\frac{-53}{5\sqrt{146}}\right|\approx 0{,}88$$

Відповідь: 1) $\cos\varphi=-0{,}08$; 2) $S=\sqrt{146}$; 3) $V=8\frac{5}{6}$; 4) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$; 5) $4x+11y+3z-31=0$; 6) $\sin\psi=0{,}88$.

Задача 6. Знайти границі числових послідовностей та функцій.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Числові послідовності

Означення 1. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n, то сукупність елементів $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ називається **числовою послідовністю** і позначається $\{x_n\}, n\in N,$ x_n – загальний член послідовності.

Число a називається **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$.

Символьно це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Властивості границь числових послідовностей

Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ та $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,то існують границі:

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=ab$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b},\quad b\neq 0$ та $\lim\limits_{n\to\infty}Cx_n=Ca,\quad C\neq 0$.

Тут C – сталий множник.

Зазначимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty,$ а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Зауваження. Якщо є невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то

1) границя частки дорівнює нулю, якщо степінь знаменника більший за степінь чисельника;

2) границя частки дорівнює нескінченності, якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника;

3) границя частки дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших членах, якщо степені чисельника і знаменника однакові.

Функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $D\subset R.$

Означення 3. Число A називається **границею функції** $y=f(x)$ в точці x_0 (прямує до x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta=\delta(\varepsilon)>0,$ що для всіх $x \in D,\ \ x \neq x_0$, які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границі функцій позначаються $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$

Властивості границь функцій

Якщо існують границі $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = a$ та $\lim\limits_{n \to \infty} g(x) = b$,то існують границі:

$\lim\limits_{n \to \infty}(f(x) + g(x)) = a + b$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) g(x) = ab$, $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b},\quad b \neq 0$ та $\lim\limits_{n \to \infty} Cf(x) = Ca,\quad C \neq 0$.

Тут C – сталий множник.

При $x \to \infty$ границі функцій знаходяться так само, як границі числових послідовностей.

Якщо при знаходженні границі відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ функції $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0,$ то маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Якщо $f(x), g(x)$ – многочлени, то для розкриття цієї невизначеності треба виділити з функцій $f(x)$ і $g(x)$ множник $(x - x_0)$.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ (або одна з них) ірраціональні, то для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ використовують формули скороченого множення.

При знаходженні границь, пов'язаних з тригонометричними функціями, доцільно користуватися формулами тригонометрії.

Для розкриття невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ та $\left[1^{\infty}\right]$ використовуються також деякі важливі границі (табл. 1).

Таблиця 1

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(1 + x)^m - 1}{x} = m$

Приклад. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{n^3 - 100n^2 + 1}{10n^3 + 15n^2 + n}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n;$;

3) $\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 1}\right)}{x^2 - 16}$ 4) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x \to 2}(3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}}$.

Розв'язання:

1) Чисельник і займенник дробу є нескінченно великі послідовності, тобто маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Винесемо за дужки з чисельника і знаменника дробу старший степінь n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{100}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(10+\frac{15}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{100}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{10+\frac{15}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{10}.$$

2) Оскільки послідовності $\left\{\sqrt{n^3+3n+5}\right\}$ і $\{n\}$ нескінченно великі, тобто маємо невизначеність $[\infty-\infty]$, то домножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5-n^2}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\frac{5}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

3) Маємо невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розкладемо знаменник на множники та домножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз.

$$\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}\right)}{x^2-16}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x+5-(2x+1)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{-x+4}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{-1}{(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{-1}{(4+4)\left(\sqrt{4+5}+\sqrt{8+1}\right)}=\frac{-1}{48}.$$

4) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\left|\frac{\sin x}{x}\to1,\ \frac{\sin 2x}{2x}\to1,\ x\to0\right|=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

5) $$\lim_{x\to2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}=\left[1^\infty\right]=\left|\begin{array}{c}x-2=t\\ x\to2\leftrightarrow t\to0\\ x=t+2\end{array}\right|=\lim_{t\to0}(3t+6-5)^{\frac{2(t+2)}{(t^2+4t+4-4)}}=$$

$$=\lim_{t\to0}(1+3t)^{\frac{2(t+2)}{t^2+4t}}=\lim_{t\to0}\left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right]^{\frac{2(t+2)3t}{t(t+4)}}=\left|\begin{array}{c}(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\to e\\ t\to0\end{array}\right|=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{6(t+2)}{t+4}}=e^{\frac{6(0+2)}{0+4}}=e^3.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{1}{48}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) e^3.

Задача 7. Знайти похідні заданих функцій.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. **Похідною функції** $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до відповідного приросту аргументу Δx при умові, що $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблиця похідних

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	a^x	$a^x \ln a$
6	e^x	e^x
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
9	$\sin x$	$\cos x$
10	$\cos x$	$-\sin x$
11	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання: 1) $(Cu)' = Cu'$; 3) $(uv)' = u'v + uv'$;

2) $(u+v)' = u' + v'$; 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Похідна складеної функції $y = f(\varphi(x))$ дорівнює добутку її похідної за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за незалежною змінною: $y'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$.

Якщо функція задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,то похідна функції y за незалежною змінною x дорівнює відношенню похідних від y та x за параметром t:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Якщо y є неявною функцією від x, тобто задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язним відносно y, то для знаходження похідної $\frac{dy}{dx}$ необхідно продиференціювати обидві частини рівності, пам'ятаючи, що y є функцією від x, а потім розв'язати отриману рівність відносно шуканої похідної y'. Ця похідна буде залежати в загальному випадку від x та y.

Для знаходження похідної від показниково-степеневої функції $y = u^v$, де u та v – функції від x необхідно:

1) прологарифмувати обидві частини рівняння за основою e:

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x),$$

2) продиференціювати обидві частини цієї рівності, пам'ятаючи, що $\ln y$ є складеною функцією від x:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x),$$

3) замінити y його виразом через x і визначити y':

$$y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Приклад. Знайти похідні заданих функцій.

1) $y = \left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \sin x$; 2) $y = \frac{x^4 - 3}{\cos x + e^x}$; 3) $y = tg^3 x$; 4) $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$;

5) $y = (3x - 6)^5 \cdot arctg 2x$; 6) $\begin{cases} x = \sin 2t - 2t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$; 7) $x^2 + y^2 - xy = 0$; 8) $y = (2x + 3)^{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання:

1) y є добутком двох функцій: $u = \left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right), \quad v = \sin x$. Тоді

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = \left(\left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \sin x\right)' = \left(\left(x^5 + x^{-3}\right) \cdot \sin x\right)' =$$

$$= \left(x^5 + x^{-3}\right)' \cdot \sin x + \left(x^5 + x^{-3}\right) \cdot (\sin x)' = \left(5x^4 - 3x^{-4}\right) \cdot \sin x + \left(x^5 + x^{-3}\right) \cdot \cos x =$$

$$= \left(5x^4 - \frac{3}{x^4}\right) \cdot \sin x + \left(x^5 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \cos x.$$

2) y є часткою двох функцій: $u = x^4 - 3, \quad v = \cos x + e^x$. Отже

$$y' = \left(\frac{x^4 - 3}{\cos x + e^x}.\right)' = \frac{\left(x^4 - 3\right)'\left(\cos x + e^x\right) - \left(x^4 - 3\right)\left(\cos x + e^x\right)'}{\left(\cos x + e^x\right)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 \cdot \left(\cos x + e^x\right) - \left(x^4 - 3\right)\left(-\sin x + e^x\right)}{\left(\cos x + e^x\right)^2}.$$

3) y є складеною функцією: $y = \varphi^3, \quad \varphi = tgx$.

$$y'_x=\left(tg^3x\right)'=f'_\varphi\cdot\varphi'_x=3\varphi^2\cdot\varphi'_x=3tg^2x\cdot(tgx)'=3tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}=\frac{3\sin^2x}{\cos^4x}.$$

4) Аналогічно до попереднього прикладу маємо

$$y'=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)'=\frac{1}{x}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5) Маємо добуток двох складених функцій. Тому

$$y'=\left((3x-7)^5\right)'\cdot arctg2x+(3x-7)^5\cdot(arctg2x)'=$$

$$=5(3x-7)^4\cdot3\cdot arctg2x+(3x-7)^5\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot2=(3x-7)^4\left(15arctg2x+\frac{6x-14}{1+4x^2}\right).$$

6) Оскільки y задана параметрично, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(t^2+1\right)'}{(\sin2t-2t)'}=\frac{2t}{2\cos2t-2}=\frac{t}{\cos2t-1}.$$

7) y – задана неявно, тому продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\left(x^2+y^2-xy\right)'=(0)';$$

$$2x+2yy'-y-xy'=0;$$

$$y'(2y-x)=y-2x;$$

$$y'=\frac{y-2x}{2y-x}.$$

8) Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою e:

$$\ln y=\ln(2x+3)^{\operatorname{tg}x}\quad\Leftrightarrow\quad\ln y=\operatorname{tg}x\ln(2x+3);$$

продиференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$(\ln y)'=(\operatorname{tg}x\ln(2x+3))'\quad\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=(\operatorname{tg}x)'\ln(2x+3)+\operatorname{tg}x(\ln(2x+3))'\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{y'}{y}=\frac{\ln(2x+3)}{\cos^2x}+\frac{2\operatorname{tg}x}{2x+3}\quad\Leftrightarrow\quad y'=(2x+3)^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\ln(2x+3)}{\cos^2x}+\frac{2\operatorname{tg}x}{2x+3}\right).$$

Відповідь: 1) $y'=\left(5x^4-\frac{3}{x^4}\right)\cdot\sin x+\left(x^5+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\cos x$;

2) $y'=\frac{4x^3\cdot\left(\cos x+e^x\right)-\left(x^4-3\right)\left(-\sin x+e^x\right)}{\left(\cos x+e^x\right)^2}$; 3) $y'=\frac{3\sin^2x}{\cos^4x}$; 4) $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $y'=(3x-7)^4\left(15arctg2x+\frac{6x-14}{1+4x^2}\right)$; 6) $y'_x=\frac{t}{\cos2t-1}$; 7) $y'=\frac{y-2x}{2y-x}$;

8) $y' = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{2x+3}\right)$.

Задача 8. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона на цьому відрізку набуває найбільшого і найменшого значення.

Означення 1. **Критичною точкою** функції $y = f(x)$ називається точка із області визначення функції, в якій її похідна $y'_x = f'(x) = 0,$ або не існує.

Сформулюємо алгоритм розв'язання цієї задачі:

1) знаходимо абсциси критичних точок та вибираємо ті з них, які належать відрізку $[a, b]$;
2) обчислюємо значення функції в критичних точках та на кінцях відрізка $[a, b]$;
3) порівнюючи всі обчислені значення функції, вибираємо найбільше і найменше з них.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 200$ на відрізку $[4;7]$.

Розв'язання:

Знайдемо критичні точки функції. Для цього обчислимо її похідну і розв'яжемо рівняння $y'(x) = 0$

$$y'(x) = 3x^2 - 12x - 36 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 12x - 36 = 0 \text{ або } x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $x_1 = -2, x_2 = 6$. Оскільки $x_1 = -2,$ не належить відрізку $[4;7]$, то виключимо її з розгляду. Для знаходження найменшого та найбільшого значення функції на відрізку, обчислимо $y(4)$ $y(6)$ $y(7)$ та порівняємо їх

$$y(4) = 4^3 - 6\cdot 4^2 - 36\cdot 4 + 200 = 40;$$

$$y(6) = 6^3 - 6\cdot 6^2 - 36\cdot 6 + 200 = -16;$$

$$y(7) = 7^3 - 6\cdot 7^2 - 36\cdot 7 + 200 = -3.$$

Найбільше із цих значень 40 досягається на лівому кінці відрізка в точці $x = 4$, а найменше -16 в точці локального мінімуму $x = 6$.

Відповідь: $y_{найб} = y(4) = 40$, $y_{найм} = y(6) = -16$.

Задача 9. Дослідити та побудувати графік функції $y = f(x)$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** на проміжку (a, b), якщо для $x_1 < x_2;\ x_1, x_2 \in (a;\ b)$ виконується $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на проміжку $(a;\ b)$, якщо для $x_1 < x_2;\ x_1,\ x_2 \in (a;\ b)$ виконується $f(x_1) > f(x_2)$.

Зростаючі і спадні функції називаються **монотонними**.

Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на проміжку (a, b), то на цьому проміжку $y'_x = f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Означення 2. Точка $x_0 \in D(f)$ – області визначення функції називається точкою **максимуму (мінімуму)** функції, якщо для всіх $x \in D(f)$ з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

Точки максимуму та мінімуму називаються **точками екстремуму** функції.

Необхідна умова екстремуму. Якщо диференційовна в точці x_0 функція $f(x)$ має в цій точці екстремум, то $f'(x_0) = 0$,

Достатня умова екстремуму. Якщо при переході через критичну точку x_0 похідна функції міняє знак з «+» на «–», то x_0 – точка максимуму, якщо з «–» на «+», то x_0 – точка мінімуму; якщо похідна не міняє знак, то x_0 – не є точкою екстремуму.

Означення 3. Функція $y = f(x)$ називається **опуклою** на проміжку (a, b), якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a;\ b)$ виконується

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) > \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2), \quad \theta \in (0;1).$$

Функція $y = f(x)$ називається **вгнутою** на проміжку $(a;\ b)$, якщо для $x_1,\ x_2 \in (a;\ b)$ виконується $f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) < \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2), \quad \theta \in (0;1)$.

графік $y = f(x)$ – опуклий, якщо $y''(x) < 0$,

графік $y = f(x)$ – вгнутий, якщо $y''(x) > 0$.

Означення 4. Точка $x_0 \in D(f)$ – області визначення функції називається точкою **перегину** функції, якщо в цій точці змінюється напрям опуклості (опуклість змінюється на вгнутість або навпаки).

У цьому випадку ліворуч та праворуч від x_0 друга похідна матиме різні знаки.

Означення 5. Пряма називається **асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо при віддаленні від початку координат відстань між прямою та кривою $y = f(x)$ прямує до нуля.

Вертикальні асимптоти мають рівняння $x = a$, якщо $x = a$ – точка розриву II роду, тобто $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \pm\infty$.

Невертикальні (горизонтальні або похилі) асимптоти мають рівняння: $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

Треба пам'ятати, що можливі різні значення цих границь, коли $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Якщо $k = 0$, та існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, то $y = b$ – горизонтальна асимптота.

Схема загального дослідження функції $y = f(x)$:

1) Знаходимо область визначення функції $y = f(x)$ і проміжки, де вона неперервна; знаходимо точки розриву функції, односторонні границі функції у цих точках та вертикальні асимптоти, якщо є точки розриву II роду.

2) Перевіряємо парність, непарність, періодичність функції.

3) Знаходимо точки перетину графіка з осями координат з $Ox(y = 0)$, з $Oy(x = 0)$.

4) Будуємо інтервали знакосталості функції. Для цього розв'язуємо рівняння $y = 0$ та знаходимо абсциси точок розриву. Знайдені точки розбивають область визначення на інтервали, в яких знак функції є сталим.

5) Будуємо інтервали монотонності та досліджуємо функцію на екстремуми. Для цього розв'язуємо рівняння $y' = 0$ та знаходимо абсциси точок, в яких похідна функції не існує. Знайдені точки розбивають область визначення на інтервали, в яких знак похідної є сталим (інтервали монотонності). Точки екстремуму визначаємо із достатньої умови існування екстремуму. Обчислюємо значення функції в екстремальних точках.

6) Досліджуємо функцію на опуклість, вгнутість та знаходимо точки перегину. Для цього розв'язуємо рівняння $y'' = 0$, та знаходимо абсциси точок, в яких друга похідна функції не існує. Знайдені точки розбивають область визначення на інтервали, в яких знак другої похідної є сталим. Обчислюємо значення функції в точках перегину.

7) Визначаємо невертикальні асимптоти графіка функції і розміщення віток кривої відносно асимптот.

8) Одержані дані заносимо в таблицю. У разі потреби обчислюємо значення функції в додаткових точках. Будуємо графік. Дослідження дає змогу будувати графіки поінтервально.

Приклад. Дослідити та побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

Розв'язання:

1) Функція визначена та неперервна $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

В точці $x = 2$ вона не визначена, отже має розрив. Дослідимо поведінку функції в околі цієї точки:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \infty \qquad \lim_{x \to 2+0} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \infty .$$

Значення цих односторонніх границь свідчать про те, що в цій точці розрив другого роду. А це в свою чергу означає, що пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

2) Парність, непарність, періодичність функції:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-2)^2} = \frac{-x^3}{(x+2)^2} \quad \Rightarrow \quad f(-x) \neq \pm f(x)$$

Отже, функція не є ні парною, ні непарною, а її графік не буде симетричним ні відносно осі *Ox,* ні відносно початку координат. Функція не є також періодичною.

3) Точки перетину з осями координат:

Ox: $y=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^3}{(x-2)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow$ точка перетину з віссю Ox (0; 0).

Oy: $x=0 \;\Rightarrow\; y(0)=\dfrac{0^3}{(0-2)^2}=0 \;\Rightarrow$ точка перетину з віссю Oy (0; 0).

4) Точка $x = 0$ розбиває усю область визначення на проміжки знакосталості.

$x \in (-\infty;0)$ – функція має знак мінус, графік лежить під віссю Ox;

$x \in (0;+\infty)$ – функція має знак плюс, графік лежить над віссю Ox.

5) Екстремуми.

Знайдемо критичні точки, для чого розв'яжемо рівняння $y'=0$, а також точки, де похідна не існує.

$$y'=\left(\frac{x^3}{(x-2)^2}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'(x-2)^2-x^3\left((x-2)^2\right)'}{(x-2)^4}=\frac{3x^2(x-2)^2-x^3 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}.$$

$y'=0$ при $x=0,\ x=6$, y' не існує при $x=2$ – це критичні точки.

Точки $x=2,\ x=6$ розбивають всю область визначення на інтервали монотонності, в яких і визначаємо знаки похідної.

$x \in (-\infty;\,2)\cup(6;\,+\infty) \;\rightarrow\; y'>0$ – *функція зростає*

$x \in (2;\ 6) \;\rightarrow\; y'<0$ – *функція спадає*

При переході через $x=2$ похідна змінює знак з плюса на мінус, але $x=2$ не належить області визначення функції. При переході через точку $x = 6$, похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже $x = 6$ є точкою мінімуму. При переході через точку $x = 0$, похідна знак не змінює – не екстремум.

x	$(-\infty;\,2)$	$(2;\,6)$	6	$(6;\,+\infty)$
y'	+	–	0	+
y	↑	↓	*min*	↑

Обчислимо екстремальні значення функції $y_{\min}=y(6)=\dfrac{6^3}{(6-2)^2}=13{,}5$.

6) Інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції.

Для цього розв'яжемо рівняння $y''=0$, а також розглянемо точки, де друга похідна не існує.

$$y'' = \left(\frac{x^3-6x^2}{(x-2)^3}\right)' = \frac{\left(x^3-6x^2\right)'(x-2)^3-\left(x^3-6x^2\right)\left((x-2)^3\right)'}{\left((x-2)^3\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(3x^2-12x\right)(x-2)^3-\left(x^3-6x^2\right)3(x-2)^2}{(x-2)^6} =$$

$$= \frac{3x(x-2)^2\left[(x-4)(x-2)-\left(x^2-6x\right)\right]}{(x-2)^6} = \frac{24x}{(x-2)^4}$$

$y''=0$ при $x=0$, y'' не визначена при $x=2$, але ця точка не входить в область визначення функції.

$y''<0$ при $x\in(-\infty;0)$ – на цьому проміжку графік опуклий;

$y''>0$ при $x\in(0;+\infty)$ – на цьому проміжку графік вгнутий.

x	$(-\infty;\,0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	–	0	+
y	$\cap$	*перегин*	$\cup$

7) Знайдемо невертикальні асимптоти та їх рівняння.

Рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(x-2)^2x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{(x-2)^2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2-4x}{(x-2)^2}\right)=4$$

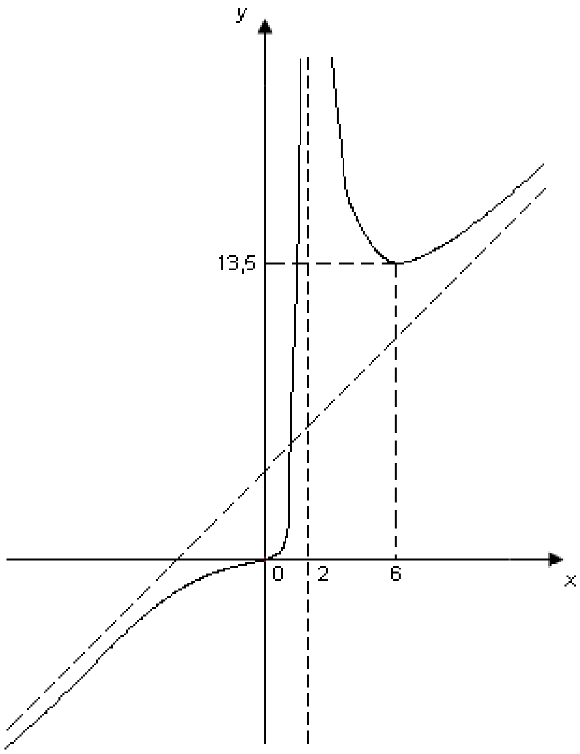
Отже, $y=x+4$ є похилою асимптотою графіка. Горизонтальних асимптот нема.

8) Будуємо графік функції, для чого визначимо координати додаткових точок.

x	– 10	– 2	1	1,5	4	8
y	– 6,9	– 0,5	1	13,5	16	14,2

Одержані результати зведемо в одну спільну таблицю. Для цього виписуємо абсциси всіх характерних точок, які з'явилися в процесі дослідження. Ці точки розділяють усю область визначення на інтервали, для яких відомі знаки y, y', y''

x	$(-\infty;\,0)$	0	(0; 2)	(2; 6)	6	$(6;+\infty)$
y'	+	0	+	–	0	+
y''	+	0	+	+	+	+
y	$\uparrow\cap$	перегин	$\uparrow\cup$	$\downarrow\cup$	$y_{min}=13.5$	$\uparrow\cup$



Задача 10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Будь-яке виробництво пов'язане з економічними витратами: витратами, пов'язаними з використанням ресурсів (обладнання, сировина, робоча сила та ін.).

Економічні витрати деякого ресурсу дорівнюють його вартості при найкращому з варіантів використання.

Витрати поділяються на сталі та змінні.

Означення 1. Сталими називаються витрати, що не залежать від зміни обсягу виробництва.

До сталих належать, наприклад, рентна плата, амортизаційні відрахування.

Означення 2. Змінними називаються витрати, величина яких змінюється в залежності від зміни обсягу виробництва.

До змінних належать: вартість сировини, заробітна плата робітників та витрати на інші ресурси, що залежать від обсягу виробництва.

Таким чином, сталі витрати $СВ = d = const$, а змінні витрати $ЗВ = f(x)$, де x – обсяг виробництва.

Сукупні витрати є сумою сталих та змінних витрат.

Означення 3. Граничними витратами називаються витрати, що необхідні для виробництва наступної одиниці продукції.

На математичній мові граничні витрати

$$ГВ = \lim_{\Delta \to x} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Зауваження 1. Граничні витрати залежать від змінних витрат.

При збільшенні виробництва граничні витрати спочатку зменшуються, що пов'язано зі спеціалізацією робітників, зменшенням середніх витрат, пов'язаних з транспортуванням сировини та іншими факторами.

При деякому обсязі виробництва x, вони досягають мінімуму: $f'_{\min} = f(x_1)$. Потім, згідно з законом зменшення граничної віддачі, починають зростати.

Означення 4. Середніми витратами називаються витрати на виробництво однієї одиниці продукції.

Середні змінні витрати:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Середні сукупні витрати:

$$h(x) = \frac{f(x) + d}{x} = g(x) + \frac{d}{x}$$

де $\frac{d}{x}$ – середні сталі витрати.

Середні сталі витрати зменшуються зі збільшенням обсягу виробництва. Що ж стосується середніх змінних витрат, то вони спочатку зменшуються і досягають мінімуму в точці x_2

$$g_{\min} = g(x_2)$$

Потім починають зростати.

Аналогічно, загальні витрати досягають мінімуму в точці x_3

$$h_{\min} = h(x_3)$$

Зрозуміло, що при обсязі x_3 виробництво є найбільш прибутковим.

Зауваження 2. По-перше, $x_1 < x_2 < x_3$. По-друге, графік функції $f'(x)$ перетинає графік функції $g(x)$ в точці x_2, а $h(x)$ в точці x_3.

Зауважимо також, що оскільки обсяг виробництва не може бути від'ємним, дослідження функцій проводиться лише для $x \geq 0$

Приклад. Нехай змінні витрати на виробництво деякої продукції дорівнюють $3B = f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 15x$, а сталі витрати - 108 умовним грошовим одиницям. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Розв'язання:

Граничні витрати – це похідна від змінних витрат .

$$ГВ = f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 15$$

Для знаходження їх мінімуму необхідно знайти похідну

$$ГВ' = f''(x) = 3x - 6$$

і прирівняти її до нуля. Звідки $x_1 = \frac{6}{3} = 2,$

При цьому мінімальні граничні витрати:

$$f'(6) = 1{,}5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 15 = 9$$

Середні змінні витрати

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{0{,}5x^3-3x^2+15x}{x}=0{,}5x^2-3x+15$$

Для знаходження найменших СЗВ, знайдемо похідну $g'(x)=x-3$ і прирівняємо її до нуля. Звідки маємо $x_2=3$

$$g(9)=0{,}5\cdot 3^2-3\cdot 3+15=10{,}5 \text{ у.г.о.}$$

Середні загальні витрати

$$h(x)=\frac{f(x)+d}{x}=\frac{0{,}5x^3-3x^2+15x+108}{x}$$

Знайдемо x_3 для якого $h(x)$ будуть мінімальними

$$h'(x)=\frac{\left(1{,}5x^2-6x+15\right)x-\left(0{,}5x^3-3x^2+15x+108\right)}{x^2}=\frac{x^3-3x^2-108}{x^2}$$

Для знаходження x_3 необхідно знайти корінь рівняння

$$x^3-3x^2-108=0 \qquad (*)$$

Теорема Безу. Якщо рівняння $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, де $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ – цілі числа, має цілі корені, то вони є дільниками коефіцієнта a_0

В нашому випадку дільниками числа 108 є числа $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm9,\pm12,\pm18,\pm24,\pm27,\pm36,\pm54,\pm108$. Оскільки обсяг виробництва $x>0$, то перевіряти від'ємні числа немає сенсу. Крім того, $x_3>x_2$, тобто $x_3>3$ і відповідно 1 та 2 не можуть бути коренями рівняння

Підставимо в (*) $x=4$

$$4^3-3\cdot4^2-108=-92\neq0$$
$$6^3-3\cdot6^2-108\equiv0$$

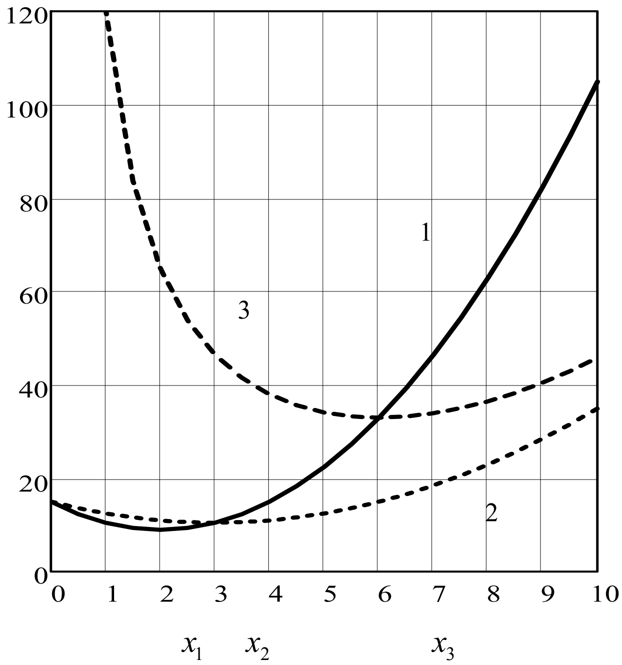
Значить $x_3=6$. Інших дійсних коренів рівняння (*) мати не може, в силу закону спадання віддачі ресурсів.

Таким чином,

$$h_{\min}(x)=h(x_3)=\frac{0{,}5\cdot6^3-3\cdot6^2+15\cdot6+108}{6}=33,$$

а сукупні витрати при даному обсязі виробництва складають 33 *6=198.

Для побудови графіків $g(x), f'(x),$ та $h(x)$ обчислимо їх значення при $x=0$ та врахуємо, що $f'(x_2)=g(x_2),\quad f'(x_3)=h(x_3)$.



Графіки: 1 –граничних витрат; 2 – середніх змінних витрат; 3 – середніх сукупних витрат.

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 6$ тисяч одиниць продукції. Сукупні мінімальні витрати складають 198 умовних грошових одиниць.

Задача 11. Знайти градієнт та похідну функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ за напрямом $\vec{e} = e_x\vec{i} + e_y\vec{j} + e_z\vec{k}$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$ визначену в деякій просторовій області G. Надамо незалежній змінній x в точці (x_0, y_0, z_0) приросту Δx; тоді u одержить приріст , який називають частинним приростом u по х в точці (x_0, y_0, z_0) і позначають $\Delta_x u$

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

Аналогічно, якщо х зберігає значення, а y або z одержує приріст , то u одержує приріст , що називається частинним приростом u по y або z в точці (x_0, y_0, z_0). Ці прирости позначаються $\Delta_y u$ та $\Delta_z u$ відповідно.

Означення 1. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}; \quad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta z} \right),$$

то вона називається **частинною похідною** функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ по змінній x (по змінній y або z) і позначається одним із символів

$$u_x, f'_x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \left(u_y, f'_y, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad u_z, f'_z, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

З означення маємо, що похідна функції багатьох змінних по змінній x являє собою звичайну похідну функції однієї змінної x при фіксованому значенні інших змінних. Тому частинні похідні обчислюють за формулами і правилами обчислення похідних функції однієї змінної.

Другі похідні визначаються, як частинні похідні від функцій f'_x, f'_y, f'_z :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \quad , \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ і т.д.}$$

Аналогічно вводиться поняття частинних похідних порядку вище другого. Зауважимо, що якщо частинні похідні, що підлягають знаходженню, є неперервними, то результат багаторазового диференціювання не залежить від порядку диференціювання.

Означення 2. Похідною функції $u = f(x, y, z)$ в заданому напрямку $\vec{e} = \overrightarrow{MM_1}$ називається границя $\frac{\partial u}{\partial e} = \lim\limits_{|M_1 M| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|M_1 M|}$, де $f(M)$ і $f(M_1)$- значення функції в точках M і M_1 відповідно.

Якщо функція $f(x, y, z)$ диференційовна, то похідна в заданому напрямку обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$. Якщо $\vec{e} = e_x\vec{i} + e_y\vec{j} + e_z\vec{k} = (e_x, e_y, e_z)$,то

$$\cos\alpha = \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}, \cos\beta = \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}, \cos\gamma = \frac{e_z}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}}$$

Зазначимо, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Означення 4. **Градієнтом** функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатній осі є частинні похідні даної функції:

$$grad f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

де $\vec{\nabla}$ – оператор набла, тобто диференціальний оператор вигляду:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Виходячи з цього, похідна за напрямком є скалярним добутком:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}.$$

Приклад. Знайти градієнт та похідну функції $u = x^2 z - xy + yz^2$ в точці $M(1;1;-2)$ за напрямком $\vec{e} = \vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$.

Розв'язання:

Обчислюємо значення частинних похідних в точці М:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xz-y;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-x+z^2;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^2+2yz;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(M)}=2\cdot 1\cdot(-2)-1=-5;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(M)}=-1+(-2)^2=3;\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(M)}=1^2+2\cdot 1\cdot(-2)=-3$$

Тоді градієнт функції в цій точці:

$$grad u(M)=\nabla \overrightarrow{u(M)}=-5\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(-5;3;-3),$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{e}$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=\frac{1}{9};\qquad \cos\beta=\frac{8}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=\frac{8}{9};$$

$$\cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=\frac{-4}{9}.$$

Отже $\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)_{(M)}=-5\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{8}{9}+(-3)\cdot\frac{(-4)}{9}=\frac{7}{9}.$

Відповідь: $grad u(M)=-5\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=(-5;3;-3)$; $\left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)_{(M)}=\frac{7}{9}.$

Задача 12. Для функції двох змінних z знайти екстремуми та найбільше і найменше значення в прямокутній області.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Кажуть, що функція $z=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ локальний максимум (мінімум), якщо існує такий окіл точки M_0, в якому для будь-якої точки $M(x;y)$ виконується нерівність $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$.

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками екстремуму.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $z=f(x,y)$ досягає в точці $M_0(x_0;y_0)$ екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці або дорівнюють нулю , тобто $f'_x(x_{0,}y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, або не існують.

Точки, в яких виконуються ці умови називаються критичними точками функції $z=f(x,y)$, або стаціонарними точками.

Достатні умови екстремуму. Нехай в стаціонарні точці $M_0(x_0;y_0)$і в деякому її околі функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Покладемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Тоді:

а) якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція має екстремум, причому при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ – локальний максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ – локальний мінімум;

б) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає;

в) якщо $\Delta = 0$, то питання про наявність екстремуму в точці M_0 залишається відкритим (необхідне подальше дослідження).

Розглянемо алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції в замкненій області.

Для того щоб знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області потрібно:

1) знайти стаціонарні точки в цій області і обчислити значення функції в цих точках;
2) знайти найбільше і найменше значення на границі області;
3) вибрати із знайдених значень найбільше і найменше.

Приклад. Для функції двох змінних $z = x^3 + y^3 - 3xy$ знайти:

а) екстремуми;

б)найбільше та найменше значення в прямокутній області $0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 2$.

Розв'язання:

а) Обчислимо частинні похідні функції і прирівняємо їх до нуля

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$.

З першого рівняння маємо $y = x^2$. Після підстановки у друге рівняння отримуємо $x^4 - x = 0$, звідки $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 1$. Таким чином, точки $(0;0)$ та $(1;1)$ є підозрілі на екстремум.

Обчислимо другі похідні функції z в цих точках:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3 \quad \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$.

$\Delta(0;0) = -9; \quad \Delta(1;1) = 27.$

Отже в точці $(0;0)$ екстремуму немає, а в точці $(1;1)$ функція z досягає локального мінімуму, оскільки $\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x^2} = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ і $z_{\min} = z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$;

б) 1) Знайдемо значення функції в стаціонарних точках:

$z_1 = z(0;0) = 0, \quad z_2 = z(1;1) = -1.$

2) Досліджуємо функцію на границі області.

2, а) Границя $x = 0$. Тоді $z = y^3$, де $y \in [-1;2]$

$$\frac{dz}{dy}=3y^2=0 \quad \Rightarrow \quad y=0\in[-1;2], \quad z(0;0)=z_1=0$$

На кінцях відрізка $[-1;2]$

$z_3=z(0;-1)=-1, \quad z_4=z(0;2)=8$.

2, б) Границя $x=2$. Тоді $z=y^3-6y+8$, де $y\in[-1;2]$.

$$\frac{dz}{dy}=3y^3-6=0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{2}; \quad y=-\sqrt{2}\notin[-1;2], \ y=\sqrt{2}\in[-1;2];$$

$$z_5=z(2;\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3-6\sqrt{2}+8=-4\sqrt{2}+8; \quad z_6=z(-1;2)=13; \ z_7=z(2;2)=4.$$

2, в) Границя $y=2$. Тоді $z=x^3-6x+8$, де $x\in[0;2]$,

$$\frac{dz}{dx}=3x^2-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=-\sqrt{2}\notin[0;2], \ x=\sqrt{2}\in[0;2]$$

$$z_8=z(\sqrt{2};2)=(\sqrt{2})^3-6\sqrt{2}+8=-4\sqrt{2}+8; \quad z(2;2)=z_7=4; \qquad z(0;2)=z_4=8.$$

2, г) Границя $y=-1$. Тоді , $z=x^3+3x-1$ де $x\in[0;2]$

$\frac{dz}{dx}=3x^2+3=0$ – немає корнів.

На кінцях відрізка $[0;2]$ всі значення z вже обчислено.

4) Порівнюючи значення $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=-1$, $z_4=8$, $z_5=z_8=-4\sqrt{2}+8$, $z_6=13$, $z_7=4$, робимо висновок , що найбільше значення функції $z=13$ досягається в точці $(2;-1)$, а найменше $z=-1$ - в точках $(0;-1)$ і $(1;1)$.

Відповідь: а) $z_{\min}=z(1;1)=-1$; б) $z_{найм.}=z(0;-1)=z(1;1)=-1$, $z_{найб.}=z(2;-1)=13$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ВАРІАНТ № 1

1. Обчислити A^2-3B, якщо $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\9&4&5\\0&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&2&1\\4&0&2\\3&5&1\end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+2x_3=-2\\4x_1-5x_2+2x_3=-3\\5x_1-6x_2+4x_3=-1\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт.
Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,1	200
2	0,2	0	0,3	400
3	0,1	0,3	0	300

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\2x_1+2x_2-3x_3+x_4=-1\\-4x_2+5x_3-x_4=3\end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(7,\ 2,\ 4)$, $A_2(7,\ -1,\ -2)$, $A_3(3,\ 3,\ 1)$, $A_4(-4,\ 2,\ 1)$.

Знайти:
1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-8}-n\sqrt{n(n+5)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{x\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\log_2 x$;

2) $y=\dfrac{5\cos x}{x-\ln x}$; 3) $y=\arcsin x^2$; 4) $y=arcctg^3\dfrac{1}{x}$; 5) $\begin{cases} x=t\ln t \\ y=\dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$;

6) $y=9^{\sqrt{x}tgx}$; 7) $x^2y^2+2\ln xy=4$; 8) $y=x^{\arcsin x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3-9x^2-24x+100$ на відрізку $[2;5]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^2-4}{x-3}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-6x^2+25x$	243

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=3xz-5y^2+2yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;2;-1)$ у точці M (2, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=-\dfrac{2}{3}x^3+2xy-y^2-1$ знайти:

а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 1,\quad -2\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 2

1. Обчислити $AB-2A$, якщо, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 4x_1+x_2+4x_3=9 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт.
Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,1	0,1	100
2	0,1	0	0,3	450
3	0,1	0,3	0	200

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 13 \\ 3x_2 - x_4 = 9 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(0, \ -1, \ -1)$, $A_2(-2, \ 3, \ 5)$, $A_3(1, \ -5, \ -9)$, $A_4(-1, \ -6, \ 3)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами $A_1 A_2$ та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра $A_1 A_2$;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n-2n^3}{n^3-5n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+tg2x)}{\sin 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{3x}{x^2-9}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\sin x$;

2) $y=\dfrac{arctgx-3x^2}{5+e^x}$; 3) $y=\left(x^2+5\right)^3$; 4) $y=e^{\sqrt[3]{6x+1}}$; 5) $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$;

6) $y=ctgx\cdot e^{-x^2}$; 7) $xy+\ln y-2\ln x=0$; 8) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3-3x^2-24x+75$ на відрізку $[2;5]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-6x^2+25x$	128

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=2xz-4y^2+7yz$ за напрямом $\vec{e}=(-2;2;-1)$ у точці M (1, 4, 4).

12. Для функції двох змінних $z=x^3+2y^2-6xy-39x+18y+19$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 1, \quad -1\le y\le 2$.

ВАРІАНТ № 3

1. Обчислити A^2+4B, якщо $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&2\\2&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2&1\\9&4&5\\0&1&4\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=8\\x_1+x_2+2x_3=4\\2x_1+2x_2+5x_3=9\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт.
Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт
	1	2	3	y_i
1	0	0,2	0,2	200
2	0,2	0	0,3	300
3	0,2	0,3	0	350

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3\\2x_2+x_3=0\\3x_1+x_2+2x_3=5\\4x_1+4x_2+3x_3=6\end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(1,\ 3,\ 6)$, $A_2(2,\ 2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 6,\ -3)$.
Знайти:
1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{5-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{8+x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{5x}-1\right)^2}{x\arcsin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}(3+x)^{\frac{x}{x^2-4}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(4x^{-3}+\dfrac{3}{x^5}\right)\cdot\arccos x$;

2) $y=\dfrac{6\ln x-\sqrt{x}}{tgx+2}$; 3) $y=e^{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y=\arccos^5 3x$; 5) $y=\dfrac{\cos x}{e^{2x}}$;

6) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$; 7) $x^2 \sin y + \cos y - \cos 2x = 0$; 8) $y = x^{e^{-x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 90$ на відрізку $[3;6]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y = \dfrac{3}{4 - x^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 6x^2 + 25x$	49

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = xz - 2y^2 + 3yz$ за напрямом $\vec{e} = (-1;2;2)$ у точці M (3, 3, 1).

12. Для функції двох змінних $z = 2x^3 - 36xy + 2y^3 + 81$ знайти:
а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 4

1. Обчислити $AB - 3B$, якщо, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт.
Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,1	200
2	0,2	0	0,2	300
3	0,1	0,2	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -14 \\ 3x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(2,\ 1,\ 4)$, $A_2(-1,\ 5,\ -2)$, $A_3(-7,\ -3,\ 2)$, $A_4(-6,\ -3,\ 6)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3 - 8n^2 + n - 1}{n^2 - 5n - 2n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2 - 3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x} - 1}{x^2 + 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{1 - \cos 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \sin 5x)^{ctgx}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = \ln x \cdot \left(\dfrac{5}{x^2} - x^{-7}\right)$;

2) $y = \dfrac{12x^3 + 4e^x}{\log_2 x}$; 3) $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2x-1}}$; 4) $y = \sqrt[3]{ctg\dfrac{x}{5}}$; 5) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$;

6) $y = tg2x \cdot x^3$; 7) $e^{y^2} = x^2 - y$; 8) $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ на відрізку $[1;4]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції: $y = \dfrac{25}{(x-6)x}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 3x^2 + 15x$	16

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = 7xz + 9y^2 - yz$ за напрямом $\vec{e} = (2;-2;-1)$ у точці M (4, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z = x^3 - 3xy + y^3 + 11$ знайти: а) екстремуми; б) найбільше та найменше значення в прямокутній області $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 5

1. Обчислити $B^2 - 3A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,1	200
2	0,2	0	0,3	300
3	0,1	0,3	0	300

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(-1,\ -5,\ 2)$, $A_2(-6,\ 0,\ -3)$, $A_3(3,\ 6,\ -3)$, $A_4(-10,\ 6,\ 7)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 5n + 3}{n^2 + 2n - 4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)} - n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{e^{x^2} - 1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5}\left(3 - \dfrac{6}{x-2}\right)^{\frac{2x^2}{x-5}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = tgx \cdot \left(\dfrac{7}{x} + \dfrac{4}{x^9}\right)$;

2) $y = \dfrac{6^x - 12}{3\arcsin x - x}$; 3) $y = \arccos^5 x$; 4) $y = 3^{arcctg \ln x}$; 5) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases}$;

6) $y = 2^x \cdot \ln\sqrt[4]{x}$; 7) $e^{-x}\sin y - e^y \cos x = 0$; 8) $y = (\ln x)^x$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ на відрізку $[2;5]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції: $y = \dfrac{x}{(x-4)^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 3x^2 + 15x$	50

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = 8xz - 5y^2 - 2yz$ за напрямом $\vec{e} = (2;2;1)$ у точці M (8, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z = x^3 + 12xy + y^2 - 5$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1 \le x \le 0, \quad -2 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 6

1. Обчислити $BA - 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 25 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,1	0,1	300
2	0,1	0	0,3	450
3	0,1	0,3	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(-4,\ 2,\ 6)$, $A_2(2,\ -3,\ 0)$, $A_3(-10,\ 5,\ 8)$, $A_4(-5,\ 2,\ -4)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-5n+n^2-n^3}{n-n^2-2n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+2n}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 2x}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}(1+tg2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(x^{-1}-4x^{-4}\right)\cdot ctgx$;

2) $y=\dfrac{5x+3\cos x}{3^x-7}$; 3) $y=ctg\dfrac{2}{x}$; 4) $y=\cos^9(4x+1)$; 5) $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$;

6) $y=\sqrt{1+\ln x}\arccos x$; 7) $\sin\dfrac{x}{y}=e^{xy}$; 8) $y=(\sin x)^{\cos x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3-3x^2-36x+70$ на відрізку $[1;4]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції: $y=\dfrac{x^2}{x-4}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-9x^2+55x$	242

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=xz-3y^2+5yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;-1)$ у точці M (2, 6, 4).

12. Для функції двох змінних $z=2x^3-3xy+6y^2+12$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$0\le x\le1,\quad -2\le y\le3$.

ВАРІАНТ № 7

1. Обчислити A^2-4B, якщо $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\7&1&3\\8&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&6&2\\1&7&4\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,2	200
2	0,2	0	0,3	300
3	0,2	0,3	0	350

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(5,\ 2,\ 0)$, $A_2(2,\ 5,\ 0)$, $A_3(1,\ 2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 1,\ 1)$.

Знайти:
1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n - 7}{1 - n - n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n(n-2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x^2 + 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \left(e^{5x} - 1\right)}{tg4x \cdot arctgx}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + tg4x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = \left(-\dfrac{5}{x^2} + x^{-7}\right) \cdot \ln x$;

2) $y = \dfrac{\arccos x + 3}{\ln x + 5x}$; 3) $y = \dfrac{4}{(-1 + 4x)^6}$; 4) $y = \arcsin^5 6x$; 5) $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$;

6) $y = x^3 \cdot arcctg(2x - 5)$; 7) $x\ln y - y\ln x = 8$; 8) $y = (arctg2x)^{\sin 3x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції: $y(x) = 2x^3 - 9x^2 - 36x + 200$ на відрізку $[2;6]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції: $y = \dfrac{4}{x^2 - 1}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 3x^2 + 15x$	196

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = 4xz + 2y^2 - 4yz$ за напрямом $\vec{e} = (-2;2;-1)$ у точці M (2, 3, 9).

12. Для функції двох змінних $z = x^3 - 3xy + y^3 + 8$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 8

1. Обчислити $AB + 2B$, якщо, $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -8 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,1	250
2	0,2	0	0,2	300
3	0,1	0,2	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 8 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(1,\ 5,\ -7)$, $A_2(-3,\ 6,\ 3)$, $A_3(-2,\ 7,\ 3)$, $A_4(-4,\ 8,\ -12)$.

Знайти:
1) косинус кута між ребрами $A_1 A_2$ та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра $A_1 A_2$;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-n+7}{1+3n^3+8n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}-x}{x^3-27}$; 4) ;$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{tg^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 6}(x-5)^{\frac{2x}{x^2-6x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=3^x\cdot\left(2x^{-4}-\frac{8}{x^7}\right)$;

2) $y=\frac{5\sqrt{x}-2tgx}{arcctgx}$; 3) $y=\sqrt{4x^2-2x+5}$; 4) $y=e^{1-\sin 2x}$; 5) $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\frac{\cos^3 t}{t^2}\end{cases}$;

6) $y=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^x}$; 7) $x^2+y^2=4\sqrt{xy}$; 8) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3-9x^2-24x+10$ на відрізку $[-2;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\frac{x^3}{x^2-9}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-4x^2+12x$	25

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=3xz+2y^2-4yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;1)$ у точці M (5, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=6x^2-3xy+2y^3-13$ знайти:
а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-2\le x\le 1,\quad -2\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 9

1. Обчислити B^2-5A, якщо $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\4&0&6\\2&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\7&1&3\\8&5&1\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,1	250
2	0,2	0,1	0,3	400
3	0,1	0,3	0	300

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 17 \\ 3x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(-2,\ 0,\ -4)$, $A_2(-1,\ 7,\ 1)$, $A_3(4,\ -8,\ -4)$, $A_4(1,\ -4,\ 6)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 + 4n + 1}{2n - n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - x}{x^2 - 4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1-3x)}{x \arcsin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -4}(x+5)^{\frac{2x}{x^2-16}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = \cos x \cdot \left(\dfrac{9}{x^5} + x^{-2}\right)$;

2) $y = \dfrac{6x^2 + \arcsin x}{\log_4 x}$; 3) $y = \cos(2x - 4)$; 4) $y = \ln arctg \dfrac{1}{x}$; 5) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$;

6) $y = x^3 \cdot 4^{\cos x}$; 7) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$; 8) $y = x^{x^2}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 10$ на відрізку $[-3;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y = \dfrac{x+3}{x(x+6)}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 4x^2 + 12x$	147

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = xz + y^2 - yz$ за напрямом $\vec{e} = (2;-2;1)$ у точці М (6, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z = x^3 - 3xy + 3y^3 + 5$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області $-2 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 1$.

ВАРІАНТ № 10

1. Обчислити $BA + 3A$, якщо, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_3 = 13 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,1	0,1	150
2	0,1	0,1	0,3	450
3	0,1	0,3	0	200

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(1,\ 1,\ -1),\ A_2(2,\ 3,\ 1),\ A_3(3,\ 2,\ 1),\ A_4(5,\ 9,\ -8)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n+4}{n^2-n+n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+n^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{x^2-2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{x\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{5x}{x^2-4}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\arcsin x\cdot\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{6}{x^7}\right)$;

2) $y=\dfrac{7\ln x+\sqrt{x}}{5^x+4}$; 3) $y=\dfrac{5}{\sin x}$; 4) $y=tg^5 5x$; 5) $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$; 6) $y=\dfrac{\log_5 x}{\sqrt[4]{x^3-6x}}$;

7) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$; 8) $y=x^{\sin x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3-6x^2-15x+10$ на відрізку $[-2;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3-4}{4x^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-4x^2+12x$	72

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=2xz+4y^2-6yz$ за напрямом $\vec{e}=(-2;2;-1)$ у точці M (8, 1, 4).

12. Для функції двох змінних $z=3x^3-3xy+y^3+6$ знайти: а) екстремуми; б) найбільше та найменше значення в прямокутній області $-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 2$.

ВАРІАНТ № 11

1. Обчислити A^2+2B, якщо $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\9&4&5\\1&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&5\\4&0&6\\2&5&1\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,2	200
2	0,2	0,1	0,3	300
3	0,2	0,3	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(1,\ 2,\ 0)$, $A_2(3,\ 0,\ -3)$, $A_3(5,\ 2,\ 6)$, $A_4(8,\ 4,\ -9)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-1}{8-n^2}$); 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-8n+3}-n\sqrt{n(n+5)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}}{x^3+x^2-x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin^3 x-2\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{\frac{4x-1}{x^2-x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(x^{-5}-2x^{-8}\right)\cdot arctgx$;

2) $y=\dfrac{8\sin x-6x}{11arctgx}$; 3) $y=arcctg\left(3+x^2\right)$; 4) $y=\ln\arcsin 5x$; 5) $\begin{cases} x=te^{-t} \\ y=\dfrac{t}{e^{2t}} \end{cases}$;

6) $y=x^5\cdot\arcsin 4x$; 7) $xy=\sin(x+y)$; 8) $y=(arctgx)^x$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ на відрізку $[-2;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 4x^2 + 12x$	256

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = xyz - 5y^2 z + 2xz$ за напрямом $\vec{e} = (2;3;-1)$ у точці M (1, 3, 1).

12. Для функції двох змінних $z = 2x^3 - 6xy + 3y^3 + 11$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 12

1. Обчислити $AB - 4B$, якщо, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ 6x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,1	200
2	0,2	0,1	0,2	350
3	0,1	0,2	0	250

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -12 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(2, \ -1, \ 2)$, $A_2(1, \ 2, \ -1)$, $A_3(3, \ 2, \ 1)$, $A_4(-4, \ 2, \ 5)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3n-4n^3}{4+n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-4)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+tg2x)}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{3x-2}{x^2-3x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\frac{7}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)\cdot arcctgx$;

2) $y=\frac{2\log_3 x-3}{2ctgx}$; 3) $y=ctg^8 x$; 4) $y=\sqrt{e^{7x-5}}$; 5) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$;

6) $y=\sqrt[5]{x+2x^2}\cdot ctgx$; 7) $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$; 8) $y=x^{3^x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3-3x^2-9x+5$ на відрізку $[-2;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\frac{x^2}{x^2-4}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-5x^2+18x$	192

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=xz-4y^2+7yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;2;1)$ у точці M (5, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=x^3-3xy+6y^3+51$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 13

1. Обчислити B^2-4A, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=7 \\ x_1+2x_2-x_3=5 \\ 2x_1-5x_2-2x_3=1 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт.

Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,1	500
2	0,2	0	0,3	400
3	0,1	0,3	0,1	300

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(1,\ 1,\ 2)$, $A_2(-1,\ 1,\ 3)$, $A_3(2,\ -2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 0,\ -2)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-n-2}{1+2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+2}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{\sqrt{8+x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln(1+x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}(5+2x)^{\frac{x-3}{x^2-4}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=e^x\cdot\left(\dfrac{3}{x^5}-2x^{-4}\right)$;

2) $y=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x}{3x+4^x}$; 3) $y=\sqrt[3]{5x^2-4x+4}$; 4) $y=\left(4^{5x}+2\right)^3$; 5) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}}{\ln^2 x}$;

6) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$; 7) $y^2-xy=e^y+x$; 8) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3-3x^2-36x-10$ на відрізку $[-3;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3+4}{2x^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-5x^2+18x$	36

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = 4xz - 2y^2 + 8yz$ за напрямом $\vec{e} = (2; -2; -1)$ у точці M (1, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z = \frac{2}{3}x^3 - 3xy + 2y^3 + 11$ знайти:

а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1 \le x \le 0, \quad -2 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 14

1. Обчислити $BA + 2A$, якщо, $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,1	0,1	300
2	0,1	0	0,3	450
3	0,1	0,3	0,1	200

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(2,\ 3,\ 1)$, $A_2(4,\ 1,\ -2)$, $A_3(6,\ 3,\ 7)$, $A_4(7,\ 5,\ -3)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^3 + 8n - 5}{1 + n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \sqrt{4n^2 - 3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\left(e^{3x}-1\right)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin 3x\right)^{ctg 2x}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(7x^{-6}+\dfrac{3}{x^3}\right)\cdot 12^x$;

2) $y=\dfrac{3tgx+5}{2x^2+e^x}$; 3) $y=\ln\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$; 4) $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$; 5) $\begin{cases} x=\ln tg\dfrac{t}{2}, \\ y=\dfrac{t}{\ln t}. \end{cases}$;

6) $y=x^2\cdot e^{1-\cos x}$; 7) $x\ln y=\cos\left(xy^2\right)$; 8) $y=\left(\cos x\right)^{\arcsin x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3-9x^2-36x+5$ на відрізку $[-3;1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-8x^2+45x$	200

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=8xz-2y^2+5yz$ за напрямом $\vec{e}=(-2;2;-1)$ у точці М (8, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=\dfrac{1}{9}x^3-xy+\dfrac{1}{2}y^2+2$ знайти: а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 2,\quad -2\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 15

1. Обчислити A^2+2B, якщо $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 2 & 6 & -1\end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=4\\ 3x_1-x_2+x_3=-2\\ 4x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,2	250
2	0,2	0	0,3	300
3	0,2	0,3	0,1	350

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 3x_2 = 14 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(14,\ 4,\ 5),\ A_2(-5,\ -3,\ 2),\ A_3(-2,\ -6,\ -3),\ A_4(-2,\ 2,\ -1).$

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-10n^2}{2n^2+3n+9}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3(n+5)}-n^2\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{e^{3x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\left(3-\dfrac{6}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x-3}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\dfrac{8}{x^6}-3x^{-5}\right)\cdot\log_6 x$;

2) $y=\dfrac{\arccos x-7x}{2x+3\ln x}$; 3) $y=e^{x-\cos x}$; 4) $y=arctg\sqrt{\sin x}$; 5) $y=x^3\cdot 10^{2x-3}$;

6) $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t). \end{cases}$; 7) $xe^y+ye^x=xy$; 8) $y=x^{\frac{2}{x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3-6x^2-36x-30$ на відрізку $[-3;1]$

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-8x^2+45x$	81

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=4xz-3y^2+2yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;-1)$ у точці M (8, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=3x^3-12xy+2y^2+5$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-2 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 16

1. Обчислити $AB + 3A$, якщо, $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,1	250
2	0,2	0	0,2	300
3	0,1	0,2	0,1	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 7x_1 - 8x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(2, \ -1, \ -2)$, $A_2(1, \ 2, \ 1)$, $A_3(5, \ 0, \ -6)$, $A_4(-10, \ 9, \ -7)$. Знайти:
1) косинус кута між ребрами $A_1 A_2$ та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра $A_1 A_2$;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 - 2n^2 + 3n}{1 + n^2 - 2n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \sin 2x)^{\frac{1}{tg 3x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[5]{x}\right) \cdot \log_3 x$;

2) $y=\dfrac{1-\sin x}{arctgx+x}$; 3) $y=\left(x^3-4x\right)^{10}$; 4) $y=\sqrt[4]{\cos 5x}$; 5) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right). \end{cases}$;

6) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ 7) $\dfrac{x}{y}=\ln(xy-5)$; 8) $y=x^{e^x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+9x^2-24x-90$ на відрізку $[-5;-2]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y\dfrac{x}{x^2+4}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-9x^2+55x$	100

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=9xz-5y^2+2yz$ за напрямом $\vec{e}=(-2;2;-1)$ у точці М (2, 3, 3).

12. Для функції двох змінних $z=4x^3-3xy+3y^2-7$ знайти: а) екстремуми; б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$.

ВАРІАНТ № 17

1. Обчислити B^2+3A, якщо $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&0&2\\5&-4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&5\\1&-4&2\\2&3&1\end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1\\ 2x_1+5x_2-x_3=3\\ 3x_1-3x_2+4x_3=5 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,4	200
2	0,2	0	0,3	400
3	0,1	0,3	0	300

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -3 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(-3,\ 4,\ -7)$, $A_2(1,\ 5,\ -4)$, $A_3(-5,\ -2,\ 0)$, $A_4(2,\ 5,\ 4)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 + 7n - 2}{n^2 - 2n + 3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - 2} - \sqrt{n(n-2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x^2 - 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \sin 4x)^{\frac{1}{tg 3x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = \left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{x^5}}\right)\cdot \cos x$;

2) $y = \dfrac{3 - \log_2 x}{\cos x - \sqrt{x}}$; 3) $y = \arccos\sqrt{x}$; 4) $y = 3^{ctg\frac{1}{x}}$; 5) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}. \end{cases}$;

6) $y = \ln tgx \cdot e^x$ .7) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$; 8) $y = (\ln x)^{\cos x}$.

8.Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 75$ на відрізку$[-5;-2]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y\dfrac{x^2}{x^2 + 9}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 7x^2 + 35x$	64

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = 3xz - 2y^2 + 2yz$ за напрямом $\vec{e} = (2;-2;-1)$ у точці М (1, 5, 4).

12. Для функції двох змінних $z = x^3 - 6xy + 3y^2 + 12$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-2 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ № 18

1. Обчислити $BA+2B$, якщо, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,1	0,4	100
2	0,1	0	0,3	450
3	0,1	0,3	0	200

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2 \\ x_2+2x_3=0 \\ x_1+4x_2+x_3=2 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди точки:

$A_1(-1,\ 2,\ -3)$, $A_2(4,\ -1,\ 0)$, $A_3(2,\ 1,\ -2)$, $A_4(3,\ 4,\ 5)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-9-n^3}{1+5n^2-n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x}-x}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{e^{x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to6}(x-5)^{\frac{2x}{x^2-36}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(12\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt[5]{x^4}}\right)\cdot\arcsin x$;

2) $y=\dfrac{8ctgx-x^3}{3x-6^x}$; 3) $y=\dfrac{2}{(2-9x)^4}$; 4) $y=\ln^3(3x-4)$; 6) $\begin{cases} x=t\arccos t, \\ y=\dfrac{\ln 2t}{t^2}. \end{cases}$;

5) $y=\arccos x^2\cdot\sqrt{x}$; 7) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=2$; 8) $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3+6x^2-15x-80$ на відрізку $[-6;-3]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x-2}{x(x-4)}$;.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-7x^2+45x$	162

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=4xz-8y^2+2yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;-1)$ у точці M (2, 3, 1).

12. Для функції двох змінних $z=4x^3-2xy+2y^2+9$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1\le x\le 2,\quad -2\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 19

1. Обчислити A^2-5B, якщо $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\7&4&2\\2&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&0&2\\5&-4&5\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=4\\4x_1-5x_2-6x_3=3\\3x_1+x_2-8x_3=0\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,2	200
2	0,2	0	0,1	300
3	0,2	0,3	0	350

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3-x_4=0\\x_1-2x_2-3x_3+2x_4=-1\\7x_1+7x_2-x_4=2\end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(4,\ -1,\ 3)$, $A_2(-2,\ 1,\ 0)$, $A_3(0,\ -5,\ 1)$, $A_4(3,\ 2,\ -6)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2n+5}{18-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n-1)(n-2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x^2-3x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{e^{3x}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{2x}{x^2-4x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\log_5 x\cdot\left(\dfrac{3}{\sqrt{x^7}}-\sqrt[5]{x^2}\right)$;

2) $y=\dfrac{\arccos x+4}{2\ln x-5}$; 3) $y=tg(3x^3-5x+2)$; 4) $y=\arcsin\lg x^2$;

5) $y=tg^3x\cdot\sin x$; 6) $\begin{cases}x=\arcsin\ln t,\\ y=\sqrt[4]{t-1}.\end{cases}$; 7) $x=y+arcctgy$; 8) $y=x^{\arccos x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+3x^2-12x-30$ на відрізку $[-4;-1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-6x^2+35x$	243

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=8xz-5y^2+4yz$ за напрямом $\vec{e}=(-2;2;-1)$ у точці M (6, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=4x^3-6xy+3y^2-5$ знайти:

а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 2,\quad -2\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 20

1. Обчислити $AB-4A$, якщо, $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+3x_2+2x_3=7 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,4	200
2	0,2	0	0,2	300
3	0,1	0,2	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=3 \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=4 \\ x_1+3x_3+5x_4=6 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(4,\ -1,\ 3)$, $A_2(-2,\ 1,\ 0)$, $A_3(0,\ -5,\ 1)$, $A_4(3,\ 2,\ -6)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9+7n+8n^3}{2n^3-n^2-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n+4n^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{4x}-1\right)^2}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}(3+x)^{\frac{5x}{x^2-4}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=ctgx\cdot\left(\dfrac{5}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{12}{\sqrt[3]{x^4}}\right)$;

2) $y=\dfrac{7\log_5 x-12}{ctgx-6x}$; 3) $y=\log_4\sqrt[3]{x^5}$; 4) $y=tg4^{5x}$; 5) $\begin{cases} x=3^{4t+5}, \\ y=\dfrac{t^3}{e^t} \end{cases}$

6) $y=\dfrac{arcctg\sqrt{x}}{3x^2-5}$;; 7) $xy=arctg\dfrac{x}{y}$; 8) $y=(\arcsin x)^{2x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3+3x^2-9x-20$ на відрізку $[-4;-1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції

$y=(x+2)^2+\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-6x^2+35x$	128

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=3xz-5y^2+9yz$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;-1)$ у точці M (7, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=2x^3-24xy+2y^2+19$ знайти: а) екстремуми; б) найбільше та найменше значення в області $-2\le x\le 1,\quad -1\le y\le 3$.

ВАРІАНТ № 21

1. Обчислити B^2-6A, якщо $A=\begin{pmatrix}1&6&-3\\5&4&0\\2&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&3\\7&4&2\\2&-3&1\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3=24\\4x_1+3x_2+3x_3=20\\x_1+6x_2+x_3=6\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,4	200
2	0,2	0	0,3	300
3	0,1	0,3	0	300

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3=-1\\2x_1+3x_2+x_3=0\\5x_1+2x_2+2x_3=9\end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(1,\quad 2,\quad -3),\ \ A_2(1,\quad 0,\quad 1),\ \ A_3(-2,\quad -1,\quad 6),\ \ A_4(0,\quad -5,\quad -4).$

Знайти:
1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+8n+2}{4-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-8n+3}-\sqrt{n(n+5)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}}{x^3-x^2-x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin^3 x-2\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{4}{x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\sqrt[4]{x^5}-15\sqrt[7]{x^3}\right)\cdot tgx$;

2) $y=\dfrac{5e^x+3\cos x}{x^3-x}$; 3) $y=2^{arctgx}$; 4) $y=e^{\sqrt{\cos x}}$; 6) $\begin{cases} x=\cos 3t+tgt, \\ y=tg3t-\cos^2 t. \end{cases}$;

5) $y=e^{-x\cos x}$; 7) $x^3-4x^2y+2xy^2-y^3=10$; 8) $y=x^{\log_3 x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+3x^2-36x-60$ на відрізку $[-4;-1]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{2x}{9-x^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-6x^2+28x$	49

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=xyz-xy^2+y^2z$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;-1)$ у точці M (4, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=2x^3-12xy+6y^2+5$ знайти:
а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 0,\quad -1\le y\le 3.$

ВАРІАНТ №22

1. Обчислити $BA-2A$, якщо, $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28 \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,1	0,4	300
2	0,1	0	0,3	450
3	0,1	0,3	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(3,\ 10,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ -5)$, $A_3(-6,\ 0,\ -3)$, $A_4(1,\ -1,\ 2)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16n^3-9}{2n^3+3n^2+4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n(n-4)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x-x^2}{\sqrt{x+6}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+tg\,2x)}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{3x-2}{x^2-9}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(-\dfrac{10}{\sqrt{x^{11}}}+\sqrt[6]{x^5}\right)\cdot\ln x$;

2) $y=\dfrac{2arctgx+\sqrt{x}}{\log_7 x}$; 3) $y=\sqrt[5]{8x-14x^2}$; 4) $y=\ln\ln(3-2x^3)$; 5) $y=ctg\dfrac{x}{\sin x}$;

6) $\begin{cases} x = tg\ln 5t, \\ y=\dfrac{arcctgt}{t}. \end{cases}$; 7) $3\cos^2(x+y)=8$; 8) $y=(arcctgx)^{x^2}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+9x^2-36x-200$ на відрізку $[-6;-3]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y = \dfrac{x-1}{x(x-2)}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 5x^2 + 20x$	192

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = xyz - 4xy^2 + 2y^2 z$ за напрямом $\vec{e} = (2;2;-1)$ у точці М (1, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z = 6x^2 - 3xy + 2y^3 + 11$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ №23

1. Обчислити $A^2 + 4B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,2	200
2	0,2	0	0,1	300
3	0,2	0,3	0	350

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(1,\ 0,\ 2)$, $A_2(1,\ 2,\ -1)$, $A_3(2,\ -2,\ 1)$, $A_4(2,\ 1,\ 0)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами $A_1 A_2$ та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

4) рівняння ребра $A_1 A_2$;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n^2+n-4}{2n^2+5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-2n+2}-3n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{\sqrt{7+2x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln(1+tgx)}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}(5-2x)^{\frac{2x-3}{x^2-4}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=35^x\cdot\left(12\sqrt[4]{x}-\dfrac{5}{\sqrt{x^3}}\right)$;

2) $y=\dfrac{\arcsin x-12x}{7^x+6x}$; 3) $y=arctgx^3$; 4) $y=\cos(2x^2-4x)^2$; 6) $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{t^3+5}}{\sin t}, \\ y=\log_4 t. \end{cases}$;

5) $y=\ln(\arcsin x\cdot tgx)$; 7) $xy=e^{2x}-e^{-3y}$; 8) $y=(\lg x)^{\sqrt[3]{x}}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+9x^2-24x+5$ на відрізку $[-1;2]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{5}{x^2-25}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0,5x^3-5x^2+17x$	36

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=4xyz-2xy^2+y^2z$ за напрямом $\bar{e}=(2;1;-1)$ у точці M (1, 3, 1).

12. Для функції двох змінних $z=3x^3-9xy+y^3-8$ знайти:
а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 2,\quad -1\le y\le 3$

ВАРІАНТ №24

1. Обчислити $AB+4B$, якщо, $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&-1&2\\9&5&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&1&3\\4&7&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -8 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0,1	0,2	0,4	250
2	0,2	0	0,2	300
3	0,1	0,2	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 9x_2 = 3 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(-1,\ 2,\ 4)$, $A_2(-1,\ -2,\ -4)$, $A_3(3,\ 0,\ -1)$, $A_4(7,\ -3,\ 1)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-4n-6}{16-n^2-n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4-3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-x}}{x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\arcsin 6x)}{x\,tg\,3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}(1+tg3x)^{ctg2x}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\arccos x\cdot\left(\dfrac{11}{\sqrt[9]{x^4}}+\sqrt[8]{x^3}\right)$;

2) $y=\dfrac{\ln x+5x^4}{4\sin x}$; 3) $y=\sin^{12}x$; 4) $y=\sqrt{\arccos x^3}$; 6) $\begin{cases} x=\sqrt[4]{\sin 8t}, \\ y=\dfrac{5t-4}{\cos t}. \end{cases}$;

5) $y=2^{\frac{\arcsin x}{x}}$; 7) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9}$; 8) $y=x^{arcctg4x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3+3x^2-24x-10$ на відрізку $[1;4]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y = \dfrac{9x}{x^2+9}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 8x^2 + 48x$	200

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = 4xyz - xy^2 + 5y^2z$ за напрямом $\vec{e} = (2;2;1)$ у точці М (1, 1, 4).

12. Для функції двох змінних $z = \frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{2}y^2 + x - 3y + 2$ знайти: а) екстремуми; б) найбільше та найменше значення в області $-1 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 3$.

ВАРІАНТ №25

1. Обчислити $B^2 + 5A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,4	250
2	0,2	0,1	0,3	400
3	0,1	0,3	0	300

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_3 - 7x_4 = -5 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:
$A_1(3,\ 10,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ -5)$, $A_3(-6,\ 0,\ -3)$, $A_4(1,\ -1,\ 2)$.

Знайти:
1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

4) рівняння ребра $A_1 A_2$;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+5}{6n-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-3n}-n^2\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{e^{3x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3-\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x-3}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\sin x\cdot\left(\dfrac{7}{\sqrt{x^5}}-\dfrac{16}{\sqrt[4]{x^9}}\right)$;

2) $y=\dfrac{tgx+\sqrt{x}}{3x-2e^x}$; 3) $y=\dfrac{3}{\sqrt[4]{x-x^2}}$; 4) $y=\log_3\sqrt[4]{2x}$; 5) $\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$;

6) $y=\log_4 x\cdot\cos 3x$; 7) $y=1+xe^y$; 8) $y=(tgx)^{\cos x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3+6x^2-15x+5$ на відрізку $[-1;2]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{1}{x(x+4)}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-3x^2+10x$	16

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=4xyz-xy^2+7y^2z$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;1)$ у точці М (1, 2, 4).

12. Для функції двох змінних $z=3x^3-12xy+2y^2-10x+7y$ знайти:
а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$.

ВАРІАНТ №26

1. Обчислити $BA+5A$, якщо $A=\begin{pmatrix}4&0&3\\1&7&2\\2&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&-1&2\\9&5&0\end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,1	0,4	150
2	0,1	0,1	0,3	450
3	0,1	0,3	0	200

4. Розв’язати систему рівнянь методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(0,\ -3,\ 1)$, $A_2(-4,\ 1,\ 2)$, $A_3(2,\ -1,\ 5)$, $A_4(3,\ 1,\ -4)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n^2+5n^3}{n^3-9n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-4n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tg\,4x)}{e^{3x}-e^{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(7\sqrt[3]{x^5}-12\sqrt[7]{x^4}\right)\cdot tgx$;

2) $y=\dfrac{\log_5 x+x}{\arccos x-3}$; 3) $y=\sqrt{1+\ln x}$; 4) $y=arcctg^2\dfrac{2}{x}$; 5) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctg 2x}$;

6) $\begin{cases} x=t+\ln^5 t, \\ y=arctg^3 t. \end{cases}$; 7) $y\ln x - x\ln y = x+y$; 8) $y=(\cos x)^{\ln x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+3x^2-12x+10$ на відрізку $[-1;2]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-3x^2+10x$	50

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=xyz-4xy^2+y^2z$ за напрямом $\vec{e}=(2;2;1)$ у точці М (1, 1, 4).

12. Для функції двох змінних $z=x^3-3xy+3y^2+x-5y$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 3$.

ВАРІАНТ №27

1. Обчислити A^2-3B, якщо $A=\begin{pmatrix}1&4&0\\3&-2&2\\8&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&6&2\\1&7&5\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=6\\4x_1+3x_2-2x_3=-4\\-5x_1-4x_2-x_3=-6\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,2	200
2	0,2	0,1	0,1	300
3	0,2	0,3	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\x_1-x_2+2x_3=2\\x_1+5x_2-x_3=5\end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки

$A_1(2,\ -4,\ -3)$, $A_2(5,\ -6,\ 0)$, $A_3(-1,\ 3,\ -3)$, $A_4(-10,\ -8,\ 7)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3-5n^2}{1-3n-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-2}-n\sqrt{n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x^2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{x\arcsin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\dfrac{11}{\sqrt{x^5}}-\dfrac{15}{\sqrt[3]{x^8}}\right)\cdot arctgx$;

2) $y=\dfrac{12^x+6x^2}{2tgx-x}$; 3) $y=10^{\sin x}$; 4) $y=\sin\left(1+e^{-2x}\right)$; 5) $y=\arcsin\dfrac{3x}{x+1}$;

6) $\begin{cases} x=\cos(4t^2-t^3), \\ y=\dfrac{\ln 6t}{7}. \end{cases}$; 7) $\ln 2x+arctg\dfrac{y}{x}=0$; 8) $y=\sqrt[4]{x}^{\sin x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3+3x^2-9x+5$ на відрізку $[-1;2]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-9x^2+60x$	242

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=4xyz-xy^2+y^2z$ за напрямом $\vec{e}=(-2;2;-1)$ у точці M (5, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z=\dfrac{1}{3}x^3+2xy-y^2+4x-7y$ знайти:

а) екстремуми;
б) найбільше та найменше значення в прямокутній області
$-1\le x\le 3,\quad -1\le y\le 2$.

ВАРІАНТ №28

1. Обчислити $AB-2B$, якщо, $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3\\ 1 & 7 & 2\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

2. Розв’язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=1\\ 2x_1+3x_2+x_3=3\\ 2x_1+x_2+3x_3=5 \end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,4	200
2	0,2	0,1	0,2	350
3	0,1	0,2	0	250

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(1,\ 3,\ 0)$, $A_2(4,\ -1,\ 2)$, $A_3(3,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 3,\ 5)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11n^3+4n^2-n-7}{n^3-8}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{e^{4x}-e^{2x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to6}(7-x)^{\frac{2x}{x^2-6x}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = 6e^x\cdot\left(\dfrac{8}{\sqrt[5]{x^7}} - 9\sqrt[9]{x^6}\right)$;

2) $y = \dfrac{4\sin x + \sqrt{x}}{2\ln x}$; 3) $y = \sqrt[3]{tgx}$; 4) $y = \arcsin^4(6x+5)$; 5) $y = \ln x\cdot 4^{tgx}$;

6) $\begin{cases} x = \sqrt{(1+ctgt)^3}, \\ y = (9t-7)\arccos t. \end{cases}$; 7) $(x+y)^2 = (x-2y)^3$; 8) $y = (\log_2 x)^{x^2}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ на відрізку $[-1;3]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y = \dfrac{x^2-3}{x}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-4x^2+15x$	25

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=2xyz-xy^2+2y^2z$ за напрямом $\vec{e}=(2;-2;-1)$ у точці М (3, 3, 1).

12. Для функції двох змінних $z=x^3+2xy+y^2+7x+8y$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1\le x\le 2,\quad -3\le y\le 3$.

ВАРІАНТ №29

1. Обчислити B^2-3A, якщо $A=\begin{pmatrix}8&2&1\\4&0&2\\3&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4&0\\3&-2&2\\8&5&1\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1-5x_2+3x_3=1\\2x_1+7x_2-x_3=8\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,2	0,4	500
2	0,2	0	0,3	400
3	0,1	0,3	0,1	300

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3\\x_1+2x_3=2\\3x_1+x_2+2x_3=8\\4x_1+x_2+4x_3=10\end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(-3,\ -5,\ 6)$, $A_2(2,\ 1,\ -4)$, $A_3(0,\ -3,\ -1)$, $A_4(-5,\ 2,\ -8)$.

Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+5n+2}{3-2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n^2}-n\sqrt{(n-1)(n-2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{4-x}}{x^2-3x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin3x}{\left(e^{arctg\,2x}-1\right)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(4\sqrt{x^9}+\dfrac{32}{\sqrt[7]{x^4}}\right)\cdot9^x$;

2) $y=\dfrac{3arcctgx-15}{\log_5 x+6x}$; 3) $y=\log_5\sqrt[4]{x}$; 4) $y=tg^3\dfrac{3}{x}$; 5) $\begin{cases}x=\dfrac{7}{\sin8t^2},\\ y=\dfrac{e^{6t}}{t-11}.\end{cases}$

6) $y=\dfrac{\arccos x^3}{e^x}$;; 7) $x+y=e^{x-y}$; 8) $y=(ctgx)^{5x}$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=2x^3+9x^2-36x+5$ на відрізку $[-1;3]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{2}{x^2+1}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3-4x^2+15x$	147

11. Знайти градієнт та похідну функції $u=xyz-9xy^2+y^2z$ за напрямом $\vec{e}=(-2;-2;-1)$ у точці M (1, 1, 1).

12. Для функції двох змінних $z=-3x^2+6xy+y^3-9x+14$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області

$-1\le x\le0,\quad -1\le y\le3.$

ВАРІАНТ №30

1. Обчислити $BA-3B$, якщо, $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&4&0\\5&3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&4\\3&6&7\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=9\\2x_1+5x_2-3x_3=4\\5x_1+6x_2-2x_3=18\end{cases}$$

3. Підприємство складається з трьох цехів. В таблиці наведено коефіцієнти прямих витрат та кінцевий продукт. Визначити коефіцієнти повних витрат та валовий випуск продукції кожного цеху.

Цехи	Коефіцієнти прямих витрат a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1	0	0,1	0,4	300
2	0,1	0	0,3	450
3	0,1	0,3	0,1	200

4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

5. Дано вершини піраміди – точки:

$A_1(1,\ 3,\ 0)$, $A_2(4,\ -1,\ 2)$, $A_3(3,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 3,\ 5)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

6. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+9n-18n^3}{2n^3+4n^2+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{2n+4n^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{x^2-x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{x\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}}$.

7. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y=\left(\dfrac{15}{\sqrt[6]{x^7}}-6\sqrt[5]{x^3}\right)\cdot\ln x$;

2) $y=\dfrac{8x-ctgx}{3x^2+4^x}$; 3) $y=\sin(x^2+\sqrt{x})$; 6) $\begin{cases} x=t^3\arcsin t, \\ y=\ln t. \end{cases}$; 5) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$;

4) $y=5^{\sqrt{\log_3 x}}$; 7) $e^{x+y}=\sin xy$; 8) $y=(arctgx)^{x^2}$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $y(x)=x^3+6x^2-36x-30$ на відрізку $[-7;-4]$.

9. Виконати повне дослідження та побудувати графік функції $y=\dfrac{2}{x(x-2)}$.

10. Задано змінні та сталі витрати. Знайти обсяги виробництва при яких найменшими будуть середні змінні, середні загальні та граничні витрати і обчислити сукупні мінімальні витрати. Побудувати графіки.

Змінні витрати	Сталі витрати
$0{,}5x^3 - 4x^2 + 15x$	256

11. Знайти градієнт та похідну функції $u = xyz - xy^2 + y^2z$ за напрямом $\vec{e} = (2;-2;-1)$ у точці M (4, 3, 4).

12. Для функції двох змінних $z = x^3 + 6xy - 3y^2 - 9y + 7$ знайти:

а) екстремуми;

б) найбільше та найменше значення в прямокутній області $-1 \le x \le 0, \quad -1 \le y \le 3$.

Контрольні питання з дисципліни

1. Визначники 2-го і 3-го порядків. Основні властивості.
2. Визначники n-го порядку. Основні властивості.
3. Матриці та дії над ними.
4. Обернена матриця.
5. Правило Крамера розв'язування СЛАР.
6. Матричний метод розв'язування СЛАР.
7. Метод Гауса розв'язування СЛАР.
8. Поняття вектора.
9. Операції множення вектора на скаляр і додавання векторів.
10. Система лінійно незалежних векторів. Базис.
11. Координати вектора в базисі.
12. Довжина вектора (модуль вектора). Одиничний вектор.
13. Скалярний добуток, його властивості та застосування.
14. Векторний добуток, його властивості та застосування.
15. Мішаний добуток, його властивості та застосування.
16. Пряма на площині.
17. Різні види рівняння прямої на площині.
18. Площина.
19. Умови паралельності і перпендикулярності площин.
20. Пряма у просторі.
21. Поняття функції.
22. Числова послідовність. Границя числової послідовності та її властивості.
23. Границя функції та її властивості.
24. Неперервні функції. Неперервність основних елементарних функцій.
25. Властивості функцій, неперервних на відрізку. Нескінченно малі величини та їх властивості.
26. Еквівалентні нескінченно малі величини.
27. Перша та друга важливі границі.
28. Похідна функції.
29. Геометричний та механічний зміст похідної.
30. Таблиця похідних.
31. Похідна від суми, добутку і частки двох функцій.

32. Похідна від складеної функції.
33. Похідна від неявно заданої функції.
34. Похідна від параметрично заданої функції.
35. Диференціал функції. Зв'язок диференціала та похідної.
36. Похідні вищих порядків.
37. Частинні похідні, їх обчислення.
38. Градієнт функції багатьох змінних. Похідна за напрямком.
39. Екстремуми функції багатьох змінних.
40. Умовний екстремум функції багатьох змінних. Метод множників Лагранжа.

ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики.: У 2-х т.; Т.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 338 с.
2. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики.: У 2-х т.; Т.2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
3. Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч.; Ч.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
4. Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч.; Ч.2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.: Збірник задач – К.: Вища школа, 2001. – 480 с.

Додаткова література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970 – 1985, т. 1, 2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965–1980.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов./ Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1964–1978.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.–383 с.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.: Ч.1, 2. – М.: Высш. шк., 1986.

Навчально-методичне видання

Андрейцев Андрій Юрійович

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 1 для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.030601 «Менеджмент»

Відповідальний за випуск – Андрейцев А.Ю.
Редактор Щербак Н. В.
Макет і верстка Андрієнка В. О.

Підписано до друку. 15.03.15. Формат 60×84/16. Папір – офсетний. Спосіб друку – ризографія. Замовлення №52/ 15. Наклад 30 примірників.

Надруковано в Редакційно-видавничому відділі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.2007 р. Серія ДК № 3079
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19