**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ**
**УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ**

**Кафедра вищої математики**

**А. Ю. Андрейцев**

# ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
# В ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ

**Методичні вказівки та контрольні завдання**
**для студентів заочної форми навчання за напрямком 6.070101**
**«Транспортні технології»**

**Київ 2015**

*УДК 51:517*

**Андрейцев А. Ю.**

**Дослідження операцій в транспортних системах:** Методичні вказівки та контрольні завдання  для студентів заочної форми навчання за напрямком 6.070101 «Транспортні технології». – К.: ДЕТУТ,  2015. – 126 с.

Методичні вказівки призначені для індивідуальної роботи студентів з дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах». В них наведено короткі теоретичні відомості та розглянуто типові приклади  по основних темах курсу. До кожної теми подано тридцять варіантів задач, що включені до контрольної роботи. В кінці наведені питання для підготовки до іспиту.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 2 від 29.10.2014) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол № 4 від 25.12.2014).

Призначені для студентів заочної форми навчання за напрямком підготовки 6.070101 «Транспортні технології».

**Укладач:** *А. Ю. Андрейцев*, кандидат фізико-математичних наук, доцент

**Рецензенти:** *О. О. Безущак*,  кандидат фізико-математичних наук, доцент;
*Т. В. Крижановська*, кандидат фізико-математичних наук, професор

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Дослідження операцій в транспортних системах – це дисципліна, що має на меті побудову, аналіз та застосування в практичній діяльності математичних моделей прийняття оптимальних рішень.

Основна задача дослідження операцій – вибір з заданої множини елементів, що називаються допустимими розв'язками, елемента, який відповідає певним вимогам (критеріям оптимальності).

Задачі дослідження операцій, в яких множина допустимих розв'язків та критерії оптимальності змінюються з часом, називаються *динамічними*. Якщо ж вони є незмінними у часі, то задачі називають *статичними*.

У разі повної визначеності параметрів задачі, її називають *детермінованою*. Якщо відомі закони розподілу ймовірностей параметрів, задачу називають *стохастичною*. Якщо ж інформація щодо параметрів відсутня, задача називається *невизначеною*.

У даних методичних вказівках розглянуто основні типи задач, що виникають при оптимізації транспортних систем та технологій. Матеріал посібника охоплює одинадцять тем з розділів «Лінійне програмування», «Випадкові процеси та системи масового обслуговування», «Сітьове планування» та «Ігрові моделі прийняття управлінських рішень». В рамках кожної теми наведені теоретичні відомості, алгоритми розв'язання та приклади розв'язання типових задач, що включені до розрахункової роботи. Наприкінці наведені варіанти задач для розв'язання з даної теми.

Контрольна робота повинна виконуватись на аркушах паперу білого кольору формату А4 на одному боці аркуша відповідно до чинних правил оформлення розрахункових і контрольних робіт. Зворотній бік аркуша використовується для виправлення помилок, а також для можливих допоміжних зауважень, вказівок і пояснень викладача. Розв'язання задач з контрольної роботи має містити детальні пояснення всіх етапів її виконання, а також обґрунтовані висновки щодо рекомендацій з оптимізації та прийняття рішень. На титульній сторінці обов'язково має бути вказано назву університету, назву предмета, номер контрольної роботи, прізвище та ініціали студента, групу, в якій він навчається, а також прізвище викладача, який перевіряє роботу.

Методичні вказівки містять 30 варіантів контрольної роботи. Номер варіанта визначається порядковим номером прізвища студента в журналі.

## Тема 1. Задача лінійного програмування

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

Сформулюємо задачу.

Знайти такі $x_1, x_2, ..., x_n$ при яких функція $z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ (*цільова функція*) досягає мінімуму або максимуму при додаткових обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{\ln}x_n \le b_l \\ a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + ... + a_{l+1,n}x_n = b_{l+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Оскільки цільова функція є лінійною і обмеження задані системою лінійних рівнянь та нерівностей, то задачу називають *задачею лінійного програмування* (ЗЛП).

*Зауваження1.1.* Якщо серед знаків нерівностей є « $\ge$ », то помноживши дані нерівності на –1 змінимо їх на « $\le$ ».

Наведемо приклад побудови ЗЛП.

**Приклад 1.1.** З міста A до міста B курсують швидкі та пасажирські потяги. Кількість вагонів кожного типу в потязі, наявний парк вагонів та кількість пасажирів в кожному з них відомі. Побудувати математичну модель для визначення оптимального комплектування маршруту.

| Тип | Пас | Шв | К-ть | Парк |
|---|---|---|---|---|
| Б | 1 | - | - | 5 |
| П | 8 | 4 | 54 | 44 |
| К | 6 | 8 | 36 | 48 |
| Л | - | 2 | 18 | 8 |

*Розв'язання.* Позначимо кількість пасажирських потягів через $x_1$, а швидких через $x_2$. Тоді нам потрібно:

$x_1$ багажних вагонів,

$8x_1 + 4x_2$ плацкартних,

$6x_1 + 8x_2$ купейних,

$2x_2$ вагонів люкс.

Враховуючи наявний парк вагонів, отримуємо такі нерівності:

$$\begin{cases} x_1 \le 5 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 44 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 48 \\ 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

Дана система нерівностей є системою виробничих обмежень.

Оскільки ми не можемо сформувати від'ємну кількість потягів то $x_1, x_2 \ge 0$.

Кількість пасажирів дорівнює

$$z = 54(8x_1 + 4x_2) + 36(6x_1 + 8x_2) + 18(2x_2) = 432x_1 + 216x_2 +$$
$$+ 216x_1 + 288x_2 + 36x_2 = 648x_1 + 540x_2 \to \max$$

*Відповідь.*

$$\begin{cases} x_1 \le 5 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 44 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 48 \\ 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 648x_1 + 540x_2 \to \max$$

*Стандартна форма запису ЗЛП.* Всі виробничі обмеження задані нерівностями, змінні – невід'ємні. Цільова функція може прямувати як до мінімуму, так і до максимуму.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .............................................. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to opt$$

*Означення 1.1. Планом* або *допустимим розв'язком* ЗЛП називають набір значень $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який задовольняє системі виробничих обмежень та обмеженням невід'ємності (якщо вони є).

Розв'язати ЗЛП означає знайти таке $\overline{X}_{opt}$ із множини допустимих розв'язків при якому цільова функція досягає максимуму або мінімуму.

*Означення 1.2.* Множина називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох точок А, В відрізок, що їх сполучає повністю належить даній множині.

***Переріз будь-якої кількості опуклих множин є опукла множина.***

*Означення 1.3.* Функція $f(\overline{X})$ називається опуклою на опуклій множині, якщо для будь-яких $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$ з цієї множини і будь-якого $\lambda \in (0,1)$ виконується нерівність:

$$f(\lambda\overline{X_1} + (1-\lambda)\overline{X_2}) \ge \lambda f(\overline{X_1}) + (1-\lambda)f(\overline{X_2})$$

і увігнутою, якщо виконується нерівність:

$$f(\lambda\overline{X_1} + (1-\lambda)\overline{X_2}) \le \lambda f(\overline{X_1}) + (1-\lambda)f(\overline{X_2})$$

***Опукла функція, задана на опуклій множині досягає свого найменшого значення на границі множини, аналогічно увігнута функція досягає свого найбільшого значення на границі множини.***

Функція $z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ є одночасно опуклою і увігнутою, тому досягає мінімуму та максимуму на границі опуклої множини.

Множина, що задається нерівністю $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{\ln}x_n \le b_l$ є опуклою множиною.

Таким чином, система виробничих обмежень ЗЛП, заданої в стандартній формі є опуклою множиною, як переріз опуклих множин (якщо цей переріз не є пустою множиною).

## 1.1. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод застосовується для розв'язання ЗЛП, записаних в стандартній формі, що містять дві змінні.

Нерівність $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 \le b_l$ задає на площині півплощину, обмежену прямою $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 = b_l$.

Півплощина є опуклою областю. Переріз скінченної кількості півплощин може бути: пустою множиною; точкою; відрізком, променем або прямою; обмеженим опуклим многокутником; необмеженим опуклим многокутником.

Розглянемо ЗЛП:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{1.2}$$

$$z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 \to opt \tag{1.3}$$

Множина, яка є перерізом півплощин, заданих нерівностями (1.1), (1.2) називається *областю допустимих розв'язків* (ОДР).

1) Якщо ОДР є пуста множина, то ЗЛП не має сенсу.
2) Якщо ОДР – одна точка, то максимум і мінімум співпадають.
3) ОДР обмежений многокутник. В цьому випадку цільова функція має обидва оптимуми.
4) ОДР необмежений многокутник. В цьому випадку один із оптимумів не існує (ЗЛП не має розв'язку).

***Цільова функція досягає найбільшого і найменшого значення на границі ОДР.***

*Алгоритм графічного методу*

*Крок 1*

Будуємо ОДР.

*Крок 2*

Будуємо вектор цілі $\vec{N} = (C_1, C_2)$. В напрямку цього вектора цільова функція буде зростати.

*Крок 3*

Будуємо *лінію нульового рівня* $C_1x_1 + C_2x_2 = 0$.

*Крок 4*

Переносимо цю пряму паралельно самій собі доти, доки не з'являться спільні точки з границею області. В цих точках цільова функція досягає мінімуму, якщо така точка одна – то мінімум єдиний, якщо це відрізок або промінь то мінімумів безліч.

Переносячи лінію рівня паралельно далі в напрямку вектора цілі, знаходимо положення, після якого вона вже не буде мати спільних точок з ОДР. В цьому положенні вона має спільні точки тільки з границею області, і в цих точках досягає максимуму, якщо ця точка єдина, то максимум єдиний, якщо це відрізок або промінь, то їх безліч.

**Приклад 1.2.** Розв'язати графічно ЗЛП

$$\begin{cases} x_1 \le 5 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 44 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 48 \\ 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 6x_1 + 5x_2 \to opt$$

*Розв'язання.* Побудуємо ОДР.

Нерівність $x_1 \le 5$ описує півплощину, обмежену прямою $x_1 = 5$, що є паралельною осі $Ox_2$. Оскільки для точки з координатами (0;0) (початок координат) нерівність $0 \le 5$ вірна, то дана півплощина лежить зліва від прямої (див. рис. 1.1,1).

Півплощина $8x_1 + 4x_2 \le 44$ – обмежена прямою $8x_1 + 4x_2 = 44$. Для побудови цієї прямої знайдемо точки її перетину з осями. Поклавши $x_1 = 0$, отримаємо $x_2 = 11$. При $x_2 = 0$, маємо $x_1 = 5{,}5$. Отже пряма проходить через точки з координатами (0;11) та (5,5; 0). Оскільки для точки з координатами (0;0) нерівність $8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \le 44$ вірна, то дана півплощина лежить нижче прямої (див. рис. 1.1,2). Аналогічно будуємо дві інші півплощини(див. рис. 1.1,3 та 1.1,4).

*Зауваження 1.2.* Якщо при перевірці належності півплощині точки з координатами (0;0) отримаємо невірну нерівність, то шукана півплощина знаходиться по інший бік прямої, що її обмежує.

Враховуючи, що $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, розв'язки знаходяться у першій чверті. Перетином побудованих півплощин є многокутник OABCDE (див. рис. 1.1,5).

Далі будуємо вектор цілі $\vec{N}$=(6;5) та лінію нульового рівня $6x_1 + 5x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, перпендикулярно до вектора $\vec{N}$.

Ми бачимо, що мінімальне значення досягається в точці з координатами (0;0), тобто $z_{\min}$= (0;0).            .

Переносячи паралельно пряму нульового рівня, досягаємо положення, після якого вона вже не буде мати з ОДР спільних точок. В цьому положенні вона має з границею ОДР одну спільну точку С, в якій досягається максимум.

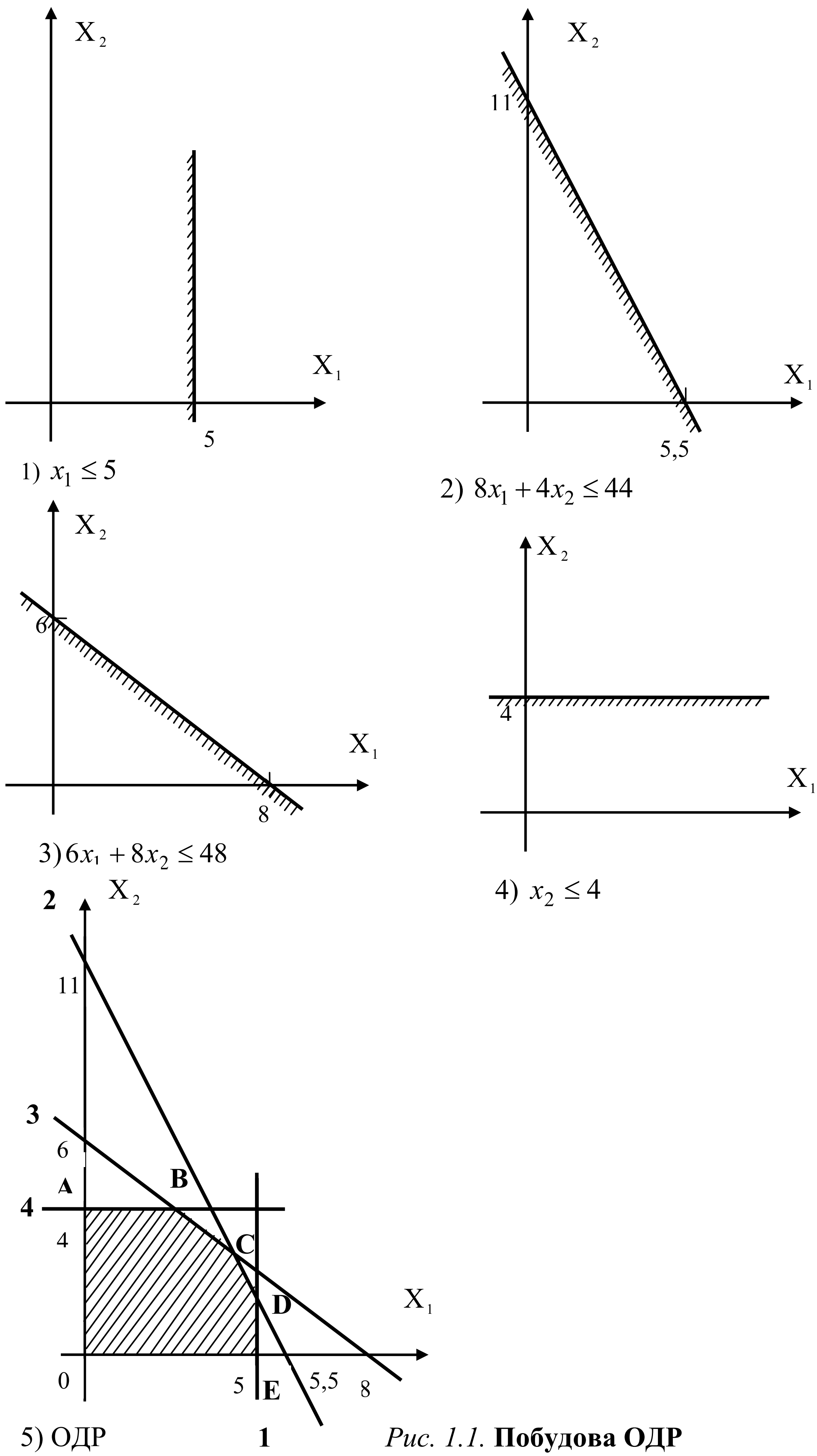



*Рис. 1.1.* **Побудова ОДР**

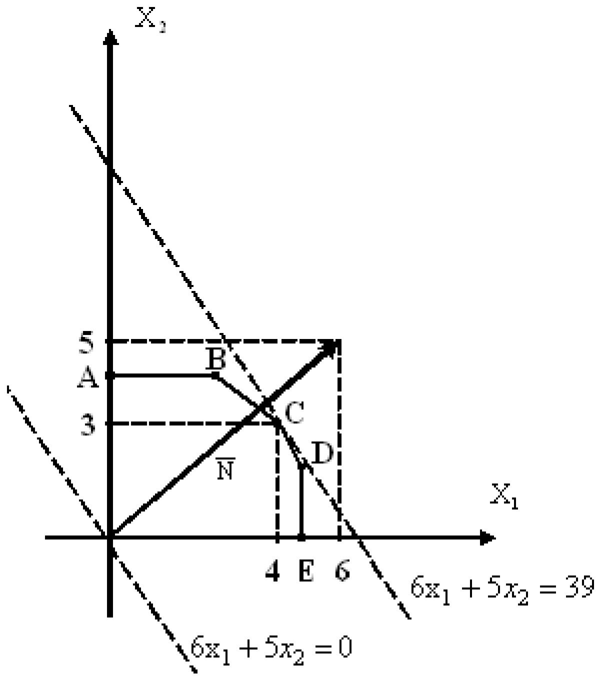



*Рис. 1.2.* **Графічне розв'язання ЗЛП *(приклад 2.1)***

У точці С перетинаються прямі $8x_1+4x_2=44$ та $6x_1+8x_2=48$. Для знаходження координат точки С розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 8x_1+4x_2=44 \\ 6x_1+8x_2=48 \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на 2 і віднімемо від нього друге. Маємо $10x_1=40$. Звідки $x_1=4$. Підставивши $x_1=4$ в будь-яке з рівнянь системи, знайдемо $x_2=3$. Таким чином, $\overline{X}_{\max}=(4;3)$; $z_{\max}=6\cdot4+5\cdot3=39$.

Графічне розв'язання ЗЛП подане на рис. 1.2.

*Відповідь.* $\overline{X}_{\min}=(0;0)$; $z_{\min}=0$. $\overline{X}_{\max}=(4;3)$; $z_{\max}=39$

*Зауваження 1.3.* Даний приклад відрізняється від прикладу 1.1 лише цільовою функцією. Але легко побачити, що помноживши $z$ з щойно розв'язаного прикладу на 108 отримаємо цільову функцію з прикладу 1.1. Таким чином, між містами А і В повинно курсувати 4 пасажирських та 3 швидких потяги, що забезпечить перевезення максимальної кількості $z_{\max}=648\cdot4+540\cdot3=4212$ пасажирів.

**Приклад 1.3.** Розв'язати графічно ЗЛП

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4\le0 \\ x_1+x_2-3\le0 \\ -x_1+x_2+1\ge0 \\ x_1,x_2\ge0 \end{cases}$$

$$z=3+x_1-x_2\to opt$$

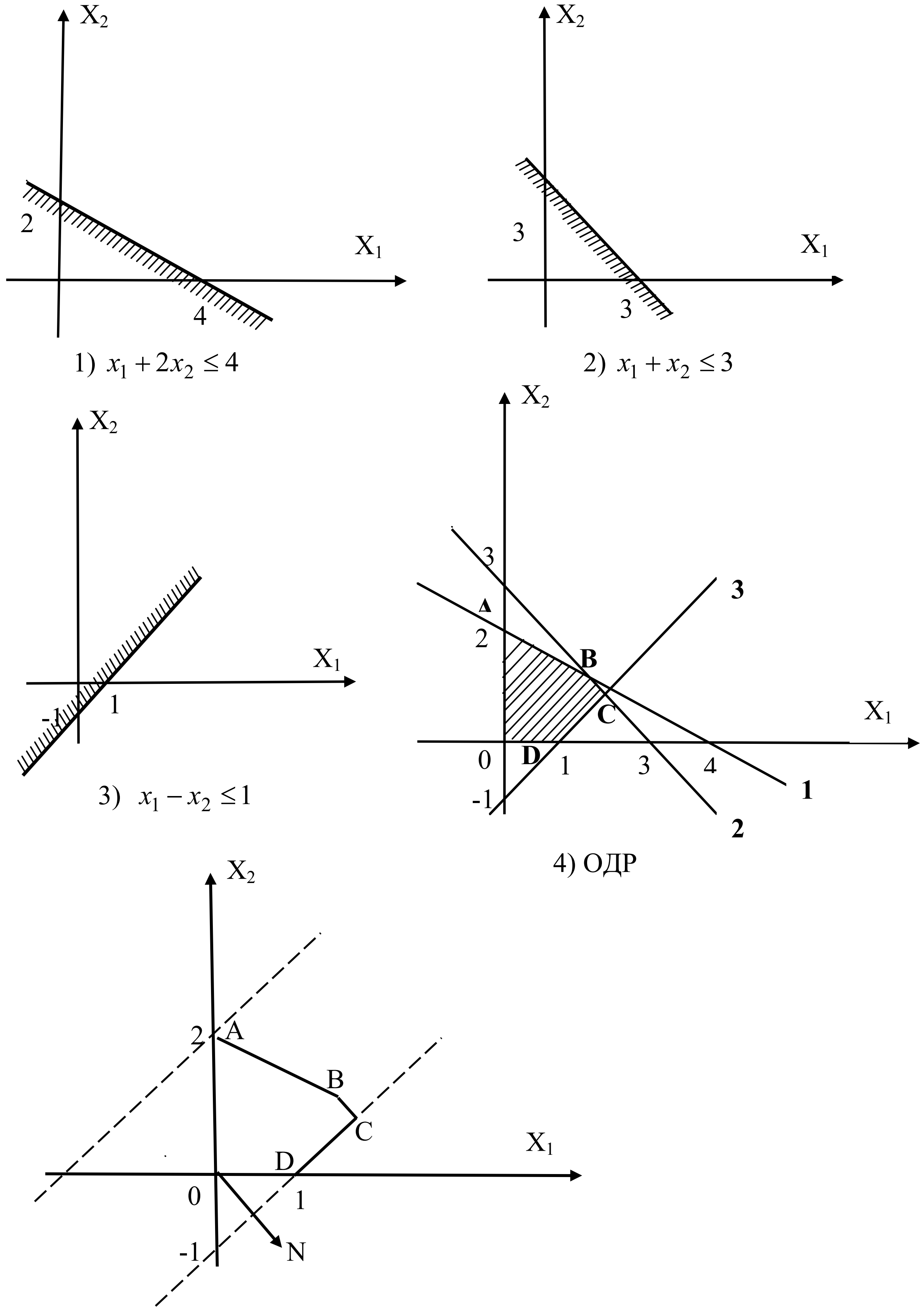



*Рис. 1.3.* **Графічне розв'язання ЗЛП** (приклад 2.2)

*Розв'язання.* Спочатку зведемо систему виробничих обмежень до виду (1.1). Для цього перенесемо у виробничих обмеженнях вільні члени в праві частини. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \end{cases}$$

Домножимо третю нерівність на –1 і отримаємо наступну ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 3 + x_1 - x_2 \to opt$$

Побудову ОДР і розв'язання даної ЗЛП показано на рис. 1.3. ОДР є многокутник OABCD. Ми бачимо, що мінімуму функція z досягає в точці A(0;2) ( $z_{\min} = 3 + 0 - 2 = 1$), а максимуму на відрізку CD. Враховуючи, що в усіх точках цього відрізка цільова функція набуває одного і того ж значення, для обчислення $z_{\max}$ підставляємо в неї координати точки D(1;0) ( $z_{\max} = 3 + 1 - 0 = 4$).

*Відповідь.* $\overline{X}_{\min} = (0;2)$; $z_{\min} = 1$. Максимум досягається на відрізку CD. $z_{\max} = 4$.

## 1.2. Симплекс-метод

Симплекс-метод застосовується для розв'язання задач, записаних в канонічній формі.

*Канонічна форма запису ЗЛП.* Всі виробничі обмеження задані рівняннями, змінні – невід'ємні. Цільова функція прямує до максимуму. $b_1, b_2, ..., b_m$ – невід'ємні.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .............................................. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,n},\ b_j \ge 0,\ j = \overline{1,m}$$

$$z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to \max$$

*Алгоритм переходу від стандартної форми до канонічної*

*Крок 1*

До лівих частин виробничих обмежень, заданих нерівностями, додаємо нові – невід'ємні змінні і знак «≤» замінюємо на «=». Ці змінні називають фіктивними, оскільки вони не впливають на значення цільової функції і після розв'язання ЗЛП відкидаються.

*Крок 2*

Якщо деяке $b_j$ від'ємне, то помножимо відповідне рівняння на $-1$.

*Крок 3*

Якщо $z \to \min$, то $-z \to \max$.

Припустимо, що система виробничих обмежень зведена до одиничного базису і при цьому усі $b_j$ невід'ємні ($b_j \geq 0$). Наприклад, при переході від стандартної до канонічної форми запису, якщо усі $b_j$ невід'ємні, ми отримаємо ЗЛП саме в такому вигляді. Базисні розв'язки називають ще *опорними планами*. Геометрично кожен базисний розв'язок відповідає вершині гіпермногогранника. Тому оптимальний розв'язок ЗЛП будемо шукати серед базисних розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 + ... + a_{1,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + ... + a_{2,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ............................................ \\ x_m + ... + a_{m,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n},\ b_j \geq 0,\ j = \overline{1,m}$$

$$z = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to \max$$

Ідея методу полягає в тому, що на кожному етапі (ітерації) здійснюється перехід до такого нового базису, при якому значення цільової функції не зменшується і усі базисні розв'язки не містять від'ємних значень змінних. Оскільки базисних розв'язків скінченна кількість ($C_n^m$), то й кількість симплекс-перетворень є скінченною.

*Алгоритм симплекс-методу*

*Крок 1*

Записуємо вихідну *симплекс-таблицю*.

| $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_p$ | $\dots$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $\dots$ | $x_q$ | $\dots$ | $x_n$ | B | C | X | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | $C_2$ | $\dots$ | $C_p$ | $\dots$ | $C_m$ | $C_{m+1}$ | $\dots$ | $C_q$ | $\dots$ | $C_n$ | $-C_0$ | | | |
| 1 | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 0 | $a_{1,m+1}$ | $\dots$ | $a_{1q}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ | $C_1$ | $x_1$ | $b_1 / a_{1q}$ |
| 0 | 1 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 0 | $a_{2,m+1}$ | $\dots$ | $a_{2q}$ | $\dots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ | $C_2$ | $x_2$ | $b_2 / a_{2q}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | |
| 0 | 0 | $\dots$ | 1 | $\dots$ | 0 | $a_{p,m+1}$ | $\dots$ | $a_{pq}$ | $\dots$ | $a_{pn}$ | $b_p$ | $C_p$ | $x_p$ | $b_p / a_{pq}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| 0 | 0 | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 1 | $a_{m,m+1}$ | $\dots$ | $a_{mq}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ | $C_m$ | $x_m$ | $b_m / a_{mq}$ |
| $\Delta_1 = 0$ | $\Delta_2 = 0$ | $\dots$ | $\Delta_p = 0$ | $\dots$ | $\Delta_m = 0$ | $\Delta_{m+1}$ | $\dots$ | $\Delta_q$ | $\dots$ | $\Delta_n$ | $z$ | | | |

В першому рядку записуємо коефіцієнти цільової функції. В основній частині записуємо матрицю коефіцієнтів системи виробничих обмежень. В останніх двох стовпчиках записуємо базисні змінні і відповідні їм коефіцієнти цільової функції.

Базисний розв'язок: $\overline{X}_0 = (b_1, b_2, ..., b_q, ..., b_m, 0, ..., 0)$.

*Крок 2*

Нижній рядок називається *індексним*, або *оціночним*. Його елементи обчислюються за формулами:

$$z = \sum_{i=1}^{m} C_i b_i + C_0, \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{ij} - C_j, \tag{1.4}$$

з яких видно, що оцінки базисних змінних дорівнюють нулю.

*Крок 3*

Перевіряємо отриманий розв'язок на оптимальність:

1) Якщо всі оцінки вільних змінних невід'ємні ($\Delta_j \geq 0$), то отриманий базисний розв'язок є оптимальним. При чому, якщо всі оцінки додатні($\Delta_j > 0$), то даний розв'язок єдиний. Якщо ж серед оцінок вільних змінних є нулі, то оптимальних розв'язків безліч, і отриманий є одним із них.

2) Серед оцінок вільних змінних є від'ємні, але всі елементи стовпчика, що знаходиться над найменшою від'ємною оцінкою недодатні. Тоді ЗЛП розв'язків не має.

3) Серед оцінок вільних змінних є від'ємні, але серед елементів стовпчика, що знаходиться над найменшою від'ємною оцінкою є додатні. Тоді даний розв'язок не є оптимальним і потрібно перейти до нового базисного розв'язку.

*Крок 4*

Знаходимо *розв'язувальний елемент*.

Стовпчик з найменшою від'ємною оцінкою називається розв'язувальним. Якщо таких стовпчиків декілька, то розглядаються усі.

Далі, знаходимо відношення елементів стовпчика В до відповідних додатніх елементів розв'язувального стовпчика. Рядок, для якого це відношення найменше, називають розв'язувальним.

Елемент, що знаходиться на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпчика називають розв'язувальним елементом. Якщо таких елементів декілька, то обираємо будь-який з них.

Нехай найменша від'ємна оцінка $\Delta q$, тоді стовпчик $x_q$ є розв'язувальним. Нехай найменшим буде відношення $b_q / a_{pq}$, тоді рядок $x_p$ є розв'язувальним. Таким чином розв'язувальним буде елемент $a_{pq}$.

*Крок 5*

Симплекс-перетворення

Елементи розв'язувального рядка ділимо на розв'язувальний елемент

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}}, \quad b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}}, \tag{1.5}$$

а всі інші елементи розраховуємо за формулами прямокутників:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{iq}b_p}{a_{pq}}. \tag{1.6}$$

У результаті перетворення змінна $x_p$ стане вільною, а $x_q$ – базисною. Всі інші базисні змінні залишаються базисними.

Після цього повертаємось до кроку 2.

| $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_p$ | $\dots$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $\dots$ | $x_q$ | $\dots$ | $x_n$ | B | C | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | $C_2$ | $\dots$ | $C_p$ | $\dots$ | $C_m$ | $C_{m+1}$ | $\dots$ | $C_q$ | $\dots$ | $C_n$ | $-C_0$ | | |
| 1 | 0 | $\dots$ | $a'_{1p}$ | $\dots$ | 0 | $a'_{1,m+1}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $a'_{1n}$ | $b'_1$ | $C_1$ | $x_1$ |
| 0 | 1 | $\dots$ | $a'_{2p}$ | $\dots$ | 0 | $a'_{2,m+1}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $a'_{2n}$ | $b'_2$ | $C_2$ | $x_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| 0 | 0 | $\dots$ | $a'_{qp}$ | $\dots$ | 0 | $a'_{q,m+1}$ | $\dots$ | 1 | $\dots$ | $a'_{qn}$ | $b'_q$ | $C_p$ | $x_p$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| 0 | 0 | $\dots$ | $a'_{mp}$ | $\dots$ | 1 | $a'_{m,m+1}$ | $\dots$ | 0 | $\dots$ | $a'_{mn}$ | $b'_m$ | $C_m$ | $x_m$ |
| $\Delta_1 = 0$ | $\Delta_2 = 0$ | $\dots$ | $\Delta_p$ | $\dots$ | $\Delta_m = 0$ | $\Delta_{m+1}$ | $\dots$ | $\Delta_q = 0$ | $\dots$ | $\Delta_n$ | $z$ | | |

**Приклад 1.4.** Розв’язати ЗЛП симплекс-методом

$$\begin{cases} x_1 \le 5 \\ 8x_1 + 4x_2 \le 44 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 48 \\ 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 648x_1 + 540x_2 \to \max$$

*Розв’язання.* Задача записана в стандартній формі. Зведемо її до канонічної. Для цього додамо до лівих частин кожної нерівності невід’ємні фіктивні змінні і знак «$\le$» замінюємо на «=».

$$\begin{cases} x_1+x_3 = 5 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_4 = 44 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_5 = 48 \\ 2x_2+x_6 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 648x_1 + 540x_2 \to \max$

***Записуємо вихідну симплекс-таблицю***

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | B | C | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 648 | 540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | $x_3$ |
| 8 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 44 | 0 | $x_4$ |
| 6 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 48 | 0 | $x_5$ |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | $x_6$ |

Змінні $x_3, x_4, x_5, x_6$ є базисними, а $x_1, x_2$– вільними. Поклавши вільні змінні рівними нулю, отримаємо $x_3 = 5, x_4 = 44, x_5 = 48, x_6 = 8.$

Вихідний опорний план – $\overline{X}^0 = (0,0,5,44,48,8).$

***Перевіряємо отриманий розв'язок на оптимальність***

Значення цільової функції та оцінки розраховуємо за формулами (1.4):

$z_0 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 44 + 0 \cdot 48 + 0 \cdot 8 = 0,$

$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 0 - 648 = -648,$

$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 2 - 540 = -540.$

Оцінки базисних змінних $\Delta_{3,} \Delta_{4,} \Delta_{5,} \Delta_6 = 0$.

Серед оцінок вільних змінних є від'ємні. Найменша від'ємна оцінка $\Delta_1 = -648$. Серед елементів 1-го стовпчика, який знаходиться над нею, є додатні, то наш розв'язок не є оптимальним.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | B | C | X | $b_i / a_{i1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 648 | 540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| **<u>1</u>** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | $x_3$ | 5/1=5 |
| 8 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 44 | 0 | $x_4$ | 44/8=5,5 |
| 6 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 48 | 0 | $x_5$ | 48/6=8 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | $x_6$ | – |
| -648 | -540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |

***Знаходимо розв'язувальний елемент***

Стовпчик $x_1$ буде розв'язувальним, оскільки він знаходиться над найменшою від'ємною оцінкою. Розглянемо відношення елементів стовпчика B до відповідних додатніх елементів розв'язувального стовпчика $x_1$. Оскільки найменше відношення $b_1 / a_{11}$=5/1=5, то розв'язувальним буде перший рядок. Отже, розв'язувальний елемент – $a_{11} = 1$.

*Зауваження 1.4.* Оскільки елемент $a_{41} = 0$ не є додатнім, то навпроти нього в останньому стовпчику таблиці ставимо «–».

***Проводимо симплекс-перетворення.***

Елементи першого рядка ділимо на 1. Стовпчики $x_4, x_5, x_6$ залишаємо базисними. Інші елементи підраховуємо за формулами прямокутників (1.6).

Елементи 2-го стовпчика ($x_2$):

$$a_{12} = \frac{0}{1} = 0, \quad a_{22} = 4 - \frac{8 \cdot 0}{1} = 4, \quad a_{32} = 8 - \frac{6 \cdot 0}{1} = 8, \quad a_{42} = 2 - \frac{0 \cdot 0}{1} = 2.$$

Елементи 3-го стовпчика ($x_3$):

$$a_{13} = \frac{1}{1} = 1, \quad a_{23} = 0 - \frac{8 \cdot 1}{1} = -8, \quad a_{33} = 0 - \frac{6 \cdot 1}{1} = -6, \quad a_{43} = 0 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 0.$$

Знаходимо елементи стовпчика $B$

$$b_1 = \frac{5}{1} = 5, \quad b_2 = 44 - \frac{8 \cdot 5}{1} = 4, \quad b_3 = 48 - \frac{6 \cdot 5}{1} = 18, \quad b_4 = 8 - \frac{0 \cdot 5}{1} = 8.$$

*Зауваження 1.5.* Можна побачити, що якщо в розв'язувальному рядку стоїть 0, то елементи відповідного стовпчика не змінюються. Дійсно, елементи стовпчика $x_2$ після симплекс-перетворення не змінились. Аналогічно, якщо в розв'язувальному стовпчику стоїть 0, то не змінюються елементи відповідного рядка (в нашому випадку це четвертий рядок).

Записуємо новий опорний план (новий базисний розв'язок): $\overline{X}^1 = (5, 0, 0, 4, 18, 8)$ і повертаємось до кроку 2.

Елементи оціночного рядка:

$$z_1 = 648 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 8 = 3240,$$

$$\Delta_2 = 648 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 2 - 540 = -540,$$

$$\Delta_3 = 648 \cdot 1 + 0 \cdot (-8) + 0 \cdot (-6) + 0 \cdot 0 - 0 = 648.$$

*Зауваження 1.6.* Елементи оціночного рядка можна також підраховувати за формулами прямокутників.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | B | C | X | $b_i / a_{i2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 648 | 540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 648 | $x_1$ | - |
| 0 | **<u>4</u>** | -8 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | $x_4$ | 4/4=1 |
| 0 | 8 | -6 | 0 | 1 | 0 | 18 | 0 | $x_5$ | 18/8=2.25 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | $x_6$ | 8/2=4 |
| 0 | -540 | 648 | 0 | 0 | 0 | 3240 | | | |

Знову отриманий розв'язок не є оптимальним, оскільки є від'ємна оцінка $\Delta_2 = -540$. Розв'язувальним буде стовпчик $x_2$. Розглянемо відношення елементів стовпчика B до відповідних додатніх елементів розв'язувального стовпчика $x_2$. Найменше відношення $b_2 / a_{22}$= 4/4=1, то розв'язувальним буде другий рядок. Розв'язувальний елемент – $a_{22} = 4$.

Елемент $a_{12} = 0$, тому перший рядок залишається без змін.

$$a_{23} = \frac{-8}{4} = -2, \quad a_{33} = -6 - \frac{8 \cdot (-8)}{4} = 10, \quad a_{43} = 0 - \frac{2 \cdot (-8)}{4} = 4;$$

$$a_{24} = \frac{1}{4}, \quad a_{34} = 0 - \frac{8 \cdot 1}{4} = -2, \quad a_{44} = 0 - \frac{2 \cdot 1}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$b_2 = \frac{4}{4} = 1, \quad b_3 = 18 - \frac{8 \cdot 4}{4} = 10, \quad b_4 = 8 - \frac{2 \cdot 4}{4} = 6.$$

$\overline{X}^2 = (5,1,0,0,10,6)$.

$z_2 = 648 \cdot 5 + 540 \cdot 1 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 6 = 3780,$

$\Delta_3 = 648 \cdot 1 + 540 \cdot (-2) + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 4 - 0 = -432,$

$$\Delta_4 = 648 \cdot 0 + 540 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot \frac{2}{4} - 0 = 135.$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | B | C | X | $b_i / a_{i3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 648 | 540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 648 | $x_1$ | 5/1=5 |
| 0 | 1 | -2 | 1/4 | 0 | 0 | 1 | 540 | $x_2$ | - |
| 0 | 0 | **<u>10</u>** | -2 | 1 | 0 | 10 | 0 | $x_5$ | 10/10=1 |
| 0 | 0 | 4 | -2/4 | 0 | 1 | 6 | 0 | $x_6$ | 6/4=1,5 |
| 0 | 0 | -432 | 135 | 0 | 0 | 3780 | | | |

$\overline{X}^2$ не є оптимальним. Розв'язувальним стає стовпчик $x_3$. Розв'язувальний елемент – $a_{33} = 10$.

$$a_{14} = 0 - \frac{1 \cdot (-2)}{10} = \frac{2}{10}, a_{24} = \frac{1}{4} - \frac{(-2) \cdot (-2)}{10} = -\frac{3}{20}, a_{34} = -\frac{2}{10}, a_{44} = -\frac{2}{4} - \frac{4 \cdot (-2)}{10} = \frac{3}{10};$$

$$a_{15} = 0 - \frac{1 \cdot 1}{10} = -\frac{1}{10}, a_{25} = 0 - \frac{(-2) \cdot 1}{10} = \frac{2}{10}, a_{35} = \frac{1}{10}, a_{45} = 0 - \frac{4 \cdot 1}{10} = -\frac{4}{10};$$

$$b_1 = 5 - \frac{1 \cdot 10}{10} = 4, b_2 = 1 - \frac{(-2) \cdot 10}{10} = 3, b_3 = \frac{10}{10} = 1, b_4 = 6 - \frac{4 \cdot 10}{10} = 2.$$

$\overline{X}^3 = (4,3,1,0,0,2).$

$z_3 = 4212, \quad \Delta_4 = 48{,}6; \quad \Delta_5 = 43{,}2.$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | B | C | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 648 | 540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 0 | 0 | 2/10 | -1/10 | 0 | 4 | 648 | $x_1$ |
| 0 | 1 | 0 | -3/20 | 2/10 | 0 | 3 | 540 | $x_2$ |
| 0 | 0 | 1 | -2/10 | 1/10 | 0 | 1 | 0 | $x_3$ |
| 0 | 0 | 0 | 3/10 | -4/10 | 1 | 2 | 0 | $x_6$ |
| 0 | 0 | 0 | 48,6 | 43,2 | 0 | 4212 | | |

Всі оцінки вільних змінних додатні, тому розв'язок $\overline{X}^3$ є оптимальним, причому єдиним. Оскільки змінні $x_3 - x_6$ фіктивні, то ми їх відкидаємо. $\overline{X}_{\max} = (4{,}3)$; $z_{\max} = 4212$, що співпадає з результатом, отриманим графічно (див. приклад 1.2.).

*Відповідь.* $\overline{X}_{\max} = (4;3)$; $z_{\max} = 4212$

*Зауваження 1.7.* При розв'язуванні ЗЛП симплекс-методом таблиці зручно записувати одна під одною.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | B | C | X | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 648 | 540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| **<u>1</u>** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | $x_3$ | 5/1=5 |
| 8 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 44 | 0 | $x_4$ | 44/8=5,5 |
| 6 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 48 | 0 | $x_5$ | 48/6=8 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | $x_6$ | - |
| -648 | -540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 648 | $x_1$ | - |
| 0 | **<u>4</u>** | -8 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | $x_4$ | 4/4=1 |
| 0 | 8 | -6 | 0 | 1 | 0 | 18 | 0 | $x_5$ | 18/8=2.25 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | $x_6$ | 8/2=4 |
| 0 | -540 | 648 | 0 | 0 | 0 | 3240 | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 648 | $x_1$ | 5/1=5 |
| 0 | 1 | -2 | 1/4 | 0 | 0 | 1 | 540 | $x_2$ | - |
| 0 | 0 | **<u>10</u>** | -2 | 1 | 0 | 10 | 0 | $x_5$ | 10/10=1 |
| 0 | 0 | 4 | -2/4 | 0 | 1 | 6 | 0 | $x_6$ | 6/4=1,5 |
| 0 | 0 | -432 | 135 | 0 | 0 | 3780 | | | |
| 1 | 0 | 0 | 2/10 | -1/10 | 0 | 4 | 648 | $x_1$ | |
| 0 | 1 | 0 | 3/20 | 2/10 | 0 | 3 | 540 | $x_2$ | |
| 0 | 0 | 1 | -2/10 | 1/10 | 0 | 1 | 0 | $x_3$ | |
| 0 | 0 | 0 | 3/10 | -4/10 | 1 | 2 | 0 | $x_6$ | |
| 0 | 0 | 0 | 135 | 0 | 0 | 4212 | | | |

**Приклад 1.5.** Розв'язати ЗЛП симплекс-методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 3 + x_1 - x_2 \to \max$$

*Розв'язання.* Запишемо ЗЛП в канонічній формі.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$z = 3 + x_1 - x_2 \to \max$$

Після заповнення вихідної симплекс-таблиці та обчислення оцінок, робимо висновок, що план $\overline{X}^0 = (0,0,4,3,1)$ не є оптимальним оскільки є від'ємна оцінка $\Delta_1 = -1$. Розв'язувальним є елемент $a_{31} = 1$. Після симплекс-перетворення отримуємо $\overline{X}^1 = (1,0,3,2,0)$. Підрахувавши оцінки, робимо висновок, що даний план є оптимальним. Але оскільки серед оцінок вільних змінних (а це змінні $x_2, x_5$) є рівна нулю ($\Delta_2 = 0$), то ЗЛП має безліч розв'язків.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | B | C | X | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | -3 | | | |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | $x_3$ | 4/1=4 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | $x_4$ | 3/1=3 |
| **1** | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $x_5$ | 1/1=1 |
| -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | | | |
| 0 | 3 | 1 | 0 | -1 | 3 | 0 | $x_3$ | |
| 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 2 | 0 | $x_4$ | |
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $x_1$ | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | | | |

*Відповідь.* ЗЛП має безліч розв'язків, $z_{\max} = 4$.

**Завдання 2**

1) Розв'язати ЗЛП графічним методом.
2) Симплекс – методом знайти найбільше значення цільової функції $z$ .

**Варіант 1**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3 \ge 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3 \le 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 20 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = x_1 + 5x_2 + 3$

**Варіант 2**

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3 \le 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 3 \ge 0 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 7x_1 - 3x_2 + 8$

**Варіант 3**

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 7x_1 + 2x_2$

**Варіант 4**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge -10 \\ 6x_1 - 5x_2 - 30 \le 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 20 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 2x_1 + 9x_2$

**Варіант 5**

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = x_1 + x_2 - 1$

**Варіант 6**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = -x_1 + 2x_2$

**Варіант 7**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 11 \ge 0 \\ -2x_1 + x_2 + 17 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 2x_1 + x_2 + 5$

**Варіант 8**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ x_1 + 2x_2 \le 21 \\ -x_1 + 2x_2 \le 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 2x_1 + 10x_2 + 17$

**Варіант 9**

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \ge -33 \\ x_1 \le 9 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = -2x_1 + 4x_2 + 2$

**Варіант 10**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 16 \ge 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 36 \le 0 \\ x_1 - 6x_2 - 2 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$F = 1 - x_1 + x_2$

**Варіант 11**

$$.\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 32 \\ 4x_1 - x_2 \le 28 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 3x_1 + 5x_2 - 3$

**Варіант 12**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = x_1 + 3x_2 + 1$

**Варіант 13**

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \ge -17 \\ -5x_1 + x_2 \ge -47 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = -2x_1 + x_2 + 3$

**Варіант 14**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 36 \le 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 12 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 2x_1 + 5x_2 - 1$

**Варіант 15**

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \ge -20 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$z = 4x_1 + 5x_2 + 1$

**Варіант 16**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 - x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 3$$

**Варіант 17**

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \ge -12 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 45 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 5x_2 - 2$$

**Варіант 18**

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \ge -25 \\ 5x_1 + x_2 \le 35 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 - 4x_2 + 3$$

**Варіант 19**

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 + 2x_2 + 4$$

**Варіант 20**

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + x_2 - 1$$

**Варіант 21**

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

**Варіант 22**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = -x_1 + 2x_2 + 5$$

**Варіант 23**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 + 5$$

**Варіант 24**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 4x_1 - 3x_2 + 5$$

**Варіант 25**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \ge 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 12 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 1$$

**Варіант 26**

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \ge 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 12 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = -3x_1 + 2x_2 + 1$$

**Варіант 27**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 24 \le 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 12 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 3x_2 - 1$$

**Варіант 28**

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \ge -20 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 1$$

**Варіант 29**

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 27 \\ 2x_1 - x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 7x_2 + 3$$

**Варіант 30**

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \ge -13 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 50 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = -5x_1 + 2x_2 - 2$$

## Тема 2. Транспортна задача

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

Нехай є $m$ постачальників з запасами сировини $a_1, a_2, ..., a_m$ і $n$ споживачів з потребами $b_1, b_2, ..., b_n$, і нехай сукупні запаси виробників дорівнюють сукупним потребам споживачів ($a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n$). В даному випадку задачу називають *замкнутою*. Відомі також вартості перевезень $c_{ij}$ одиниці сировини від постачальника $i$ до споживача $j$, (за маршрутом $i$-$j$).

Побудувати план перевезень, що забезпечує їх мінімальну вартість.

Позначимо кількість перевезень за маршрутом $i$-$j$ через $x_{ij}$, тоді

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2 \\ .................................. \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m \end{cases} \text{ – обмеження на вивіз;} \quad (2.1)$$

(сировина повинна бути вивезена повністю);

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2 \\ .................................. \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_m \end{cases} \text{ – обмеження по потребах;} \quad (2.2)$$

(потреби повинні бути задоволені повністю);

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \text{ – обмеження невід'ємності;} \quad (2.3)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \text{ – критерій оптимальності.} \quad (2.4)$$

Сукупність (2.1), (2.2), (2.3) і (2.4) називається *транспортною* задачею.

*Зауваження 2.1.* Ми бачимо, що при $m, n > 2$ кількість змінних більша за кількість рівнянь, тобто система (2.1), (2.2) має безліч розв'язків. Крім того, система рівнянь (2.1), (2.2) є лінійно залежною, кількість лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m + n - 1$.

Оскільки транспортна задача є ЗЛП, записаною в канонічній формі, то вона може бути розв'язана симплекс-методом, але особливістю цієї задачі є те, що коефіцієнти при всіх змінних дорівнюють 0 або 1.

### Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Цей метод є спрощенням симплекс-методу пристосованим до розв'язання транспортної задачі. Оскільки кількість лінійно-незалежних рівнянь в системі виробничих обмежень (2.1), (2.2) дорівнює $m + n - 1$, то базисних змінних повинно бути не більше. Якщо їх кількість менша, то задача буде виродженою.

Для розв'язання методом потенціалів, зазвичай, транспортну задачу зручно записувати у такій таблиці:

| | $b_1$ | $b_2$ | $\dots$ | $b_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $C_{11}$ $x_{11}$ | $C_{12}$ $x_{12}$ | $\dots$ | $C_{1n}$ $x_{1n}$ | $U_1$ |
| $a_2$ | $C_{21}$ $x_{21}$ | $C_{22}$ $x_{22}$ | $\dots$ | $C_{2n}$ $x_{2n}$ | $U_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $a_m$ | $C_{m1}$ $x_{m1}$ | $C_{m2}$ $x_{m2}$ | $\dots$ | $C_{mn}$ $x_{mn}$ | $U_m$ |
| | $V_1$ | $V_2$ | $\dots$ | $V_n$ | |

Кількість базисних змінних – $m+n-1$, тому $m+n-1$ клітинок будуть заповненими, а інші – вільними, або пустими.

*Алгоритм методу потенціалів*

*Крок 1*

На першому етапі побудуємо опорний (початковий) базисний розв'язок.

**Метод Північно-Західного кута (діагональний)**

В ліву верхню клітинку (1;1) заносимо менше із чисел $a_1, b_1$, $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Далі викреслюємо рядок або стовпчик, для якого кількість сировини вичерпана, а іншу величину зменшуємо на $x_{11}$ і переходимо до клітинки (1;2) або (2;1) залежно від того, яка з них залишилась у розгляді. Чинимо так само, поки не дійдемо до клітинки (m,n).

Якщо на жодному кроці, крім останнього, $a'_i \neq b'_j$, то в результаті матимемо $m+n-1$ заповнених клітинок. На останньому кроці обов'язково повинна виконуватись рівність $a'_m = b'_n$.

*Зауваження 2.2.* Якщо на деякому кроці $a'_i = b'_j$, то із розгляду викреслюємо або рядок або стовпчик, а в наступну клітинку записуємо «0», і вважаємо її заповненою, але з кількістю «0».

**Метод мінімальної вартості**

Знаходимо клітинку (маршрут) з мінімальною вартістю перевезень і вносимо в неї кількість $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Викреслюємо рядок або стовпчик, для якого кількість сировини вичерпана. Далі знаходимо клітинку з найменшою вартістю перевезень із тих, що залишились у розгляді і чинимо аналогічно. На кроці $m+n-1$ залишиться лише одна невикреслена клітинка (k;l), для якої $a'_k = b'_l$. Зауваження 2.2 залишається в силі.

*Крок 2*

Перевіряємо побудований план на оптимальність. Перевірка проводиться за допомогою так званого «методу потенціалів». Кожному постачальнику і кожному споживачу приписуються потенціали $U_i$ та $V_j$. Для заповнених клітинок записуємо систему:

$$U_i + V_j = C_{ij} \tag{2.5}$$

Оскільки кількість невідомих ($m+n$) більша за кількість рівнянь ($m+n-1$), то система (2.5) має безліч розв'язків.

Покладемо одне з невідомих рівним нулю. Після чого однозначно визначимо інші.

Знайдемо оцінки вільних клітинок за формулою:

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - \left(U_i + V_j\right) \qquad (2.6)$$

1) Якщо оцінки всіх вільних змінних невід'ємні, то даний розв'язок є оптимальним. При цьому, якщо всі вони додатні, то він єдиний, а якщо серед них є нулі, то мінімумів безліч, і знайдений нами є один із них.

2) Якщо серед оцінок вільних змінних є від'ємні, то розв'язок не є оптимальним і потрібно перейти до нового базису.

*Крок 3*

Перехід до нового базису. Знаходимо клітинку з найменшою від'ємною оцінкою. Якщо їх декілька, то можемо вибрати будь-яку (бажано з меншою вартістю перевезень), її позначаємо знаком «+» і будуємо із неї цикл.

*Означення 2.1.* Циклом називається замкнута ламана лінія, ланки якої паралельні рядкам і стовпчикам, всі вершини, крім початкової, знаходяться в заповнених клітинках.

*Властивості:*

- для кожної вільної клітинки існує один і тільки один цикл;
- кількість вершин циклу є парною;
- цикл може перетинати сам себе тільки у вільних клітинках;
- заповнені клітинки ніколи не утворюють цикл.

Вершини циклу почергово позначаємо знаками «+» і «–». В клітинках, позначених знаком «–» знаходимо найменшу кількість сировини, яку віднімаємо від кількості усіх клітинок з «–» і додаємо до кількості усіх клітинок з «+». В результаті одна клітинка стане вільною, а клітинка з найменшою від'ємною оцінкою стане заповненою.

*Зауваження 2.3.* Якщо найменша кількість є в декількох клітинках зі знаком «–», то звільняємо лише одну з них (не має значення яку, бажано з більшою вартістю перевезень), а інші вважаємо заповненими з кількостями «0».

Потім повертаємось до кроку 2, тобто перевіряємо новий план на оптимальність.

**Приклад 3.1.** Нехай маємо трьох постачальників сировини, з запасами $a_1 = 160$, $a_2 = 140$, $a_3 = 170$ і чотирьох споживачів, з потребами $b_1 = 120$, $b_2 = 50$, $b_3 = 190$, $b_4 = 110$. Матриця вартості перевезень має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Побудувати план перевезень, що мінімізує їх вартість.

*Розв'язання.* Нехай $x_{ij}$ – кількість вантажу, що перевозиться від $i$-го постачальника до $j$-го споживача.

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = 160 + 140 + 170 = 470 = \sum_{j=1}^{4} b_j = 120 + 50 + 190 + 110$, то дана задача є замкнутою. Сформулюємо математичну модель.

Знайти найменше значення функції $z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170 \end{cases} \text{– обмеження пропозиції}$$

(вся сировина повинна бути вивезена);

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 190 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 110 \end{cases} \text{– обмеження попиту}$$

(всі потреби повинні бути задоволені);

$x_{ij} \geq 0$ – обмеження невід'ємності.

Запишемо дані задачі в таблицю.

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 50 | 190 | 110 |
|---|---|---|---|---|
| 160 | 7 | 8 | 1 | 2 |
| 140 | 4 | 5 | 9 | 8 |
| 170 | 9 | 2 | 3 | 6 |

Виберемо початковий план за допомогою методу мінімальної вартості. Мінімальна вартість перевезень: $c_{13} = 1$. Кількість сировини у 1-го постачальника – 160, менша ніж потреби 3-го споживача – 190. Тому покладемо $x_{13} = 160$ і виключимо 1-й рядок з розгляду, оскільки сировина першого постачальника використана повністю. Потреби третього споживача зменшились до 30. Тепер мінімальна вартість: $c_{32} = 2$ ($c_{14} = 2$ ми не враховуємо, бо 1-й рядок виключено з розгляду). Потреби другого споживача – 50, а запаси третього постачальника – 170. Поклавши $x_{32} = 50$, виключаємо з розгляду другий стовпчик, а запаси третього постачальника тепер рівні 120. З шести клітин, що не виключені з розгляду, мінімальна вартість: $c_{33} = 3$. Нагадаємо, що залишкові потреби третього споживача рівні 30. Таким чином

$x_{33} = 30$, з розгляду виключається третій стовпчик, а запаси третього постачальника зменшуються до 90. Далі, $x_{21} = 120$ та $x_{34} = 90$. На останньому кроці другий постачальник і четвертий споживач мають однакові залишкові запаси та потреби рівні 20, а клітинка з вартістю перевезень $c_{24} = 8$ – єдина, в яку можна записати це число. Отже, базисні змінні: $x_{13}$, $x_{21}$, $x_{24}$, $x_{32}$, $x_{33}$, $x_{34}$. $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, тобто базисних змінних повинно бути саме шість. Інші шість змінних є вільними.

| | 120 | 50 | ~~190~~<br>30 | ~~110~~<br>20 |
|---|---|---|---|---|
| 160 | 7 | 8 | 1<br>160 | 2 |
| ~~140~~<br>20 | 4<br>120 | 5 | 9 | 8<br>20 |
| ~~170~~<br>~~120~~<br>90 | 9 | 2<br>50 | 3<br>30 | 6<br>90 |

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530$$

Перейдемо до другого кроку. Знайдемо потенціали споживачів та постачальників з системи $U_i + V_j = c_{ij}$ для заповнених клітинок, тобто

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 1 \\ U_2 + V_1 = 4 \\ U_2 + V_4 = 8 \\ U_3 + V_2 = 2 \\ U_3 + V_3 = 3 \\ U_3 + V_4 = 6 \end{cases}$$

Система з шести рівнянь містить сім змінних. Поклавши $U_3 = 0$, одразу знаходимо $V_2 = 2$, $V_3 = 3$, $V_4 = 6$. Звідки $U_2 = 8 - 6 = 2$, $U_1 = 1 - 3 = -2$, $V_1 = 4 - 2 = 2$.

Підрахуємо оцінки вільних клітинок

$$\Delta_{11} = c_{11} - (U_1 + V_1) = 7 - (-2 + 2) = 7 \ge 0,$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - (U_1 + V_2) = 8 - (-2 + 2) = 8 \ge 0,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (U_1 + V_4) = 2 - (-2 + 6) = -2 < 0,$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (U_2 + V_2) = 5 - (2 + 2) = 1 \ge 0,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (U_2 + V_3) = 9 - (2 + 3) = 4 \ge 0,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (U_3 + V_1) = 9 - (0 + 2) = 7 \ge 0.$$

Серед оцінок є від'ємна $\Delta_{14} = -2$, тому наш план не є оптимальним. Покращимо його. Для цього треба в клітинку з від'ємною оцінкою $\Delta_{14}$ перенести певну кількість сировини (зробити $x_{14}$ – базисною), звільнивши при цьому одну з заповнених клітинок. Для цього побудуємо цикл. Його вершини знаходяться в клітинках (1,4), (1,3), (3,3) та (3,4). Поставимо знаки «+» та «–» почергово, починаючи з клітинки (1,4). Клітинки зі знаком «–» містять 160 та 90 одиниць сировини. Оскільки мінімальну кількість 90 містить клітинка (3,4), то вона стане вільною після того, як буде проведено перерозподіл сировини: в клітинках зі знаком «+» додаємо, а зі знаком «–» – віднімаємо 90.

| | 120 | 50 | 190 | 110 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 7 | 8 | 70 1 «–» 160 | 90 2 «+» | $U_1 = -2$ |
| 140 | 4 120 | 5 | 9 | 8 20 | $U_2 = 2$ |
| 170 | 9 | 2 50 | 120 3 «+» 30 | 6 «–» 90 | $U_3 = 0$ |
| | $V_1 = 2$ | $V_2 = 2$ | $V_3 = 3$ | $V_4 = 6$ | |

Тепер базисні змінні: $x_{13}$, $x_{14}$, $x_{21}$, $x_{24}$, $x_{32}$, $x_{33}$.

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 70 & 90 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 120 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = 1 \cdot 70 + 2 \cdot 90 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 120 + 4 \cdot 120 = 1350$$

Перевіряємо цей план на оптимальність

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 1 \\ U_1 + V_4 = 2 \\ U_2 + V_1 = 4 \\ U_2 + V_4 = 8 \\ U_3 + V_2 = 2 \\ U_3 + V_3 = 3 \end{cases}$$

Поклавши $U_3 = 0$, одержуємо $U_1 = -2, U_2 = 4, V_1 = 0, V_2 = 2, V_3 = 3, V_4 = 4$.
Оцінки вільних клітин: $\Delta_{11} = 9, \Delta_{12} = 8, \Delta_{22} = -1, \Delta_{23} = 2, \Delta_{31} = 9, \Delta_{34} = 2$.

Даний план не є оптимальним. Побудуємо цикл з клітинки (2,2), оскільки $\Delta_{22} < 0$. Мінімальна кількість для клітинок зі знаком «–» рівна 20 (в клітинці (2,4)). Перерозподіл призводить до того, що базисними змінними будуть: $x_{13}$, $x_{14}$, $x_{21}$, $x_{22}$, $x_{32}$, $x_{33}$.

| | 120 | 50 | 190 | 110 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 7 | 8 | 50 1 «–» 70 | 110 2 «+» 90 | $U_1 = -2$ |
| 140 | 4 120 | 20 5 «+» | 9 | 8 «–» 20 | $U_2 = 4$ |
| 170 | 9 | 30 2 «–» 50 | 140 3 «+» 120 | 6 | $U_3 = 0$ |
| | $V_1 = 0$ | $V_2 = 2$ | $V_3 = 3$ | $V_4 = 4$ | |

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330$$

Перевіримо $X^2$ на оптимальність

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 1 \\ U_1 + V_4 = 2 \\ U_2 + V_1 = 4 \\ U_2 + V_2 = 5 \\ U_3 + V_2 = 2 \\ U_3 + V_3 = 3 \end{cases}$$

$\Delta_{11} = 8, \quad \Delta_{12} = 8, \quad \Delta_{23} = 3, \quad \Delta_{24} = 1, \quad \Delta_{31} = 8, \quad \Delta_{34} = 2.$

| | 120 | 50 | 190 | 110 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 160 | 7 | 8 | 1 50 | 2 110 | $U_1 = -5$ |
| 140 | 4 120 | 5 20 | 9 | 8 | $U_2 = 0$ |
| 170 | 9 | 2 30 | 3 140 | 6 | $U_3 = -3$ |
| | $V_1 = 4$ | $V_2 = 5$ | $V_3 = 6$ | $V_4 = 7$ | |

Усі оцінки додатні, тобто даний план є оптимальним

$$x_{11}=0,\quad x_{12}=0,\quad x_{13}=50,\quad x_{14}=110,\quad x_{21}=120,\quad x_{22}=20$$

$$x_{23}=0,\quad x_{24}=0,\quad x_{31}=0,\quad x_{32}=30,\quad x_{33}=140,\quad x_{34}=0.$$

Таким чином, перший постачальник перевозить 50 одиниць сировини третьому та 110 четвертому споживачу, другий постачальник перевозить 120 одиниць сировини першому та 20 другому споживачу, а третій постачальник – 30 одиниць другому та 140 третьому споживачу. При цьому мінімальні витрати складуть $z_2=1330$ у. г. о.

*Відповідь.*

$$x_{\min}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 50 & 110\\ 120 & 20 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 140 & 0\end{pmatrix},\ z_{\min}=1330 \text{ у. г. о.}$$

**Відкриті моделі транспортних задач**

Введемо позначення: $A=a_1+a_2+...+a_m$, $B=b_1+b_2+...+b_m$. Якщо не виконується умова A=B, то задачу називають відкритою.

Якщо запаси перевищують потреби, то вводимо фіктивного споживача з потребами $\delta=A-B$. Якщо потреби перевищують запаси, то вводимо фіктивного постачальника з запасами $\delta=B-A$. При цьому вартості перевезень за фіктивними маршрутами вважаємо рівними нулю.

Далі задача розв’язується так само, як і замкнута.

**Приклад 3.1.** Є два постачальники з запасами $a_1=70$, $a_2=100$ та три споживачі з потребами $b_1=60$, $b_2=40$, $b_3=80$. Матриця вартостей перевезень:

$$C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

Побудувати план перевезень, що мінімізує їх вартість.

*Розв’язання.* $a_1+a_2=170$, $b_1+b_2+b_3=180$. Потреби перевищують запаси на 10 одиниць, тому вводимо фіктивного постачальника з запасами рівними 10.

Початковий опорний план має вигляд:

$$X^0=\begin{pmatrix}60 & 30 & 10\\ 0 & 0 & 70\\ 0 & 10 & 0\end{pmatrix}$$

$$z_0=3\cdot 60+5\cdot 30+4\cdot 10+2\cdot 70+0\cdot 10=510$$

$$\Delta_{21}=4-(-2+3)=3$$

$$\Delta_{22}=6-(-2+5)=3$$

$$\Delta_{31}=0-(-5+3)=2$$

$$\Delta_{33}=0-(-5+4)=1$$

| | 60 | 40 | 80 | |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 3<br>60 | 5<br>30 | 4<br>10 | $U_1 = 0$ |
| 70 | 4 | 6 | 2<br>70 | $U_2 = -2$ |
| 10 | 0 | 0<br>10 | 0 | $U_3 = -5$ |
| | $V_1 = 3$ | $V_2 = 5$ | $V_3 = 4$ | |

Всі оцінки додатні, а значить розв'язок $X^0$ є оптимальним. Оскільки третій постачальник є фіктивним, то виключаємо його з розгляду.

*Відповідь.*

$$x_{\min} = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}, \; z_{\min} = 510$$

Другий споживач недоотримає 10 одиниць сировини.

**Завдання 2.** Відомий випуск продукції на трьох заводах $a_1, a_2, a_3$; потреби у цій продукції споживачів $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$; матриця транспортних витрат на перевезення одиниці продукції з $i$- го заводу до $j$- го споживача $C = \{c_{ij}\}$. Визначити оптимальний план перевезень за критерієм витрат $z$. Дані задачі наведено в таблиці

| $a_i$ \ $b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ | $c_{11}$ | $c_{13}$ | $c_{14}$ | $c_{15}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ | $c_{24}$ | $c_{25}$ |
| $a_3$ | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ | $c_{34}$ | $c_{35}$ |

**Варіант 1**

| $a_i$ \ $b_j$ | 10 | 40 | 20 | 60 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 2 | 7 | 8 | 6 | 4 |
| 70 | 9 | 4 | 5 | 7 | 3 |
| 50 | 5 | 7 | 6 | 2 | 4 |

**Варіант 2**

| $a_i$ \ $b_j$ | 35 | 25 | 40 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 9 | 8 | 2 | 5 | 4 |
| 90 | 2 | 7 | 8 | 4 | 5 |
| 40 | 6 | 6 | 3 | 3 | 7 |

**Варіант 3**

| $a_i$ \ $b_j$ | 45 | 15 | 20 | 10 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 9 | 5 | 3 | 10 | 5 |
| 55 | 6 | 3 | 8 | 2 | 4 |
| 20 | 3 | 2 | 11 | 4 | 8 |

**Варіант 4**

| $a_i$ \ $b_j$ | 90 | 100 | 70 | 130 | 110 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 12 | 15 | 21 | 14 | 17 |
| 150 | 14 | 8 | 15 | 11 | 21 |
| 150 | 19 | 16 | 26 | 12 | 20 |

**Варіант 5**

| $a_i$ \ $b_j$ | 180 | 140 | 190 | 120 | 170 |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 12 | 21 | 9 | 10 | 16 |
| 280 | 13 | 5 | 11 | 13 | 21 |
| 220 | 19 | 26 | 12 | 17 | 20 |

**Варіант 6**

| $a_i$ \ $b_j$ | 180 | 120 | 90 | 105 | 105 |
|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 12 | 8 | 21 | 10 | 15 |
| 200 | 13 | 4 | 15 | 13 | 21 |
| 150 | 19 | 16 | 26 | 17 | 20 |

**Варіант 7**

| $b_j$ / $a_i$ | 200 | 170 | 230 | 225 | 175 |
|---|---|---|---|---|---|
| 400 | 12 | 9 | 5 | 11 | 17 |
| 250 | 14 | 5 | 12 | 14 | 22 |
| 350 | 20 | 17 | 13 | 18 | 21 |

**Варіант 8**

| $b_j$ / $a_i$ | 160 | 70 | 90 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 8 | 20 | 7 | 11 | 16 |
| 200 | 4 | 14 | 12 | 15 | 17 |
| 150 | 15 | 22 | 11 | 12 | 19 |

**Варіант 9**

| $b_j$ / $a_i$ | 170 | 120 | 190 | 140 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|
| 280 | 28 | 12 | 7 | 18 | 5 |
| 300 | 35 | 14 | 12 | 15 | 3 |
| 220 | 30 | 11 | 16 | 25 | 15 |

**Варіант 10**

| $b_j$ / $a_i$ | 180 | 120 | 90 | 105 | 105 |
|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 14 | 6 | 4 | 9 | 4 |
| 250 | 17 | 10 | 9 | 11 | 5 |
| 200 | 15 | 11 | 6 | 13 | 8 |

**Варіант 11**

| $b_j$ / $a_i$ | 300 | 160 | 220 | 180 | 140 |
|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 9 | 15 | 35 | 20 | 7 |
| 400 | 15 | 35 | 12 | 11 | 6 |
| 350 | 16 | 19 | 40 | 15 | 25 |

**Варіант 12**

| $b_j$ / $a_i$ | 100 | 70 | 130 | 110 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 15 | 35 | 20 | 9 | 7 |
| 150 | 15 | 35 | 12 | 11 | 6 |
| 200 | 16 | 19 | 40 | 15 | 25 |

**Варіант 13**

| $b_j$ / $a_i$ | 190 | 140 | 120 | 180 | 170 |
|---|---|---|---|---|---|
| 220 | 20 | 3 | 9 | 15 | 35 |
| 280 | 14 | 10 | 12 | 20 | 46 |
| 300 | 25 | 11 | 16 | 19 | 48 |

**Варіант 14**

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 105 | 180 | 105 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 7 | 3 | 9 | 15 | 36 |
| 250 | 3 | 10 | 12 | 46 | 20 |
| 150 | 15 | 11 | 16 | 19 | 48 |

**Варіант 15**

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 105 | 180 | 105 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 7 | 3 | 9 | 15 | 36 |
| 250 | 3 | 10 | 12 | 46 | 20 |
| 150 | 35 | 41 | 16 | 19 | 48 |

**Варіант 16**

| $b_j$ / $a_i$ | 110 | 120 | 185 | 95 | 190 |
|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 5 | 13 | 18 | 17 | 8 |
| 250 | 6 | 10 | 15 | 6 | 3 |
| 200 | 24 | 21 | 9 | 16 | 17 |

**Варіант 17**

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 105 | 180 | 105 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 7 | 3 | 9 | 15 | 36 |
| 250 | 3 | 10 | 12 | 46 | 20 |
| 150 | 15 | 11 | 16 | 19 | 48 |

**Варіант 18**

| $b_j$ / $a_i$ | 30 | 80 | 15 | 25 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 8 | 12 | 4 | 6 | 10 |
| 40 | 7 | 5 | 15 | 3 | 6 |
| 100 | 9 | 4 | 6 | 12 | 7 |

**Варіант 19**

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 80 | 160 | 80 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| 140 | 10 | 5 | 7 | 4 | 12 |
| 155 | 7 | 4 | 9 | 10 | 5 |
| 205 | 16 | 6 | 14 | 8 | 7 |

**Варіант 20**

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 130 | 100 | 160 | 140 |
|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 27 | 36 | 35 | 31 | 29 |
| 200 | 22 | 23 | 26 | 32 | 35 |
| 200 | 35 | 42 | 38 | 32 | 39 |

**Варіант 21**

| $b_j$ / $a_i$ | 400 | 400 | 300 | 250 | 450 |
|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 3 | 4 | 6 | 1 | 7 |
| 700 | 5 | 1 | 2 | 3 | 8 |
| 600 | 4 | 5 | 8 | 1 | 10 |

**Варіант 22**

| $b_j$ / $a_i$ | 20 | 70 | 60 | 50 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 70 | 100 | 40 | 80 | 50 |
| 90 | 90 | 50 | 120 | 60 | 70 |
| 80 | 40 | 80 | 30 | 90 | 60 |

**Варіант 23**

| $b_j$ / $a_i$ | 100 | 125 | 325 | 250 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 5 | 8 | 7 | 10 | 3 |
| 400 | 4 | 2 | 2 | 5 | 6 |
| 300 | 7 | 3 | 5 | 9 | 2 |

**Варіант 24**

| $b_j$ / $a_i$ | 120 | 130 | 100 | 160 | 140 |
|---|---|---|---|---|---|
| 250 | 27 | 36 | 35 | 31 | 29 |
| 200 | 22 | 23 | 26 | 32 | 35 |
| 200 | 35 | 42 | 38 | 32 | 39 |

**Варіант 25**

| $b_j$ / $a_i$ | 210 | 170 | 220 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| 350 | 3 | 12 | 9 | 1 | 7 |
| 330 | 2 | 4 | 11 | 2 | 10 |
| 270 | 7 | 14 | 12 | 5 | 8 |

**Варіант 26**

| $b_j$ / $a_i$ | 210 | 150 | 120 | 135 | 135 |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 4 | 8 | 13 | 2 | 7 |
| 250 | 9 | 4 | 11 | 9 | 17 |
| 200 | 3 | 16 | 10 | 1 | 7 |

**Варіант 27**

| $b_j$ / $a_i$ | 170 | 140 | 200 | 195 | 145 |
|---|---|---|---|---|---|
| 350 | 22 | 14 | 16 | 28 | 29 |
| 200 | 19 | 17 | 26 | 36 | 36 |
| 300 | 37 | 30 | 31 | 39 | 41 |

**Варіант 28**

| $b_j$ / $a_i$ | 140 | 90 | 160 | 110 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 28 | 27 | 18 | 27 | 24 |
| 250 | 18 | 26 | 27 | 32 | 21 |
| 200 | 27 | 33 | 23 | 31 | 34 |

**Варіант 29**

| $b_j$ / $a_i$ | 140 | 90 | 160 | 110 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| 230 | 40 | 19 | 25 | 25 | 35 |
| 250 | 49 | 26 | 27 | 18 | 38 |
| 170 | 46 | 27 | 36 | 40 | 45 |

**Варіант 30**

| $b_j$ / $a_i$ | 210 | 150 | 120 | 135 | 135 |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 19 | 10 | 13 | 13 | 18 |
| 300 | 27 | 19 | 20 | 16 | 22 |
| 250 | 26 | 17 | 19 | 21 | 23 |

# Тема 3. Ланцюги Маркова

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

*Означення 3.1.* Випадковим процесом на ймовірнісному просторі $(\Omega, S, P)$ називається сім'я випадкових величин $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, що залежить від часового параметра $t \in [0;+\infty)$.

Випадковий процес можна трактувати як показник стану динамічної системи, що змінюється у часі під дією випадкових факторів. Якщо стан системи розглядати лише в дискретні моменти часу, то отримаємо випадкову послідовність (випадковий процес з дискретним часом).

Протікання випадкових процесів у часі неможливо передбачити однозначно.

При будь-якому фіксованому значенні $t = t_0$ випадковий процес стає випадковою величиною $\xi(t_0) = \xi(t_0, \omega)$, яку називають перерізом випадкового процесу $\xi(t)$ в момент $t_0$. Якщо в будь-який момент часу перерізи є дискретними випадковими величинами (кількість станів, в яких може знаходитись система є скінченною або зліченною), то випадковий процес називають *процесом з дискретними станами.*

Прикладами випадкових процесів є:

1) процес зміни у часі напруги $V(t)$ електропостачання локомотива;
2) кількість $Q(t)$ відмов ЕОМ за час $t$;
3) коливання курсів валют $I(t)$ , як функції часу;
4) кількість пасажирів $K(t)$, що обслуговуються касиром за час $t$ і т.д.

Якщо в будь-який момент часу $t_0$ ймовірності станів системи в майбутньому залежать лише від її стану в момент $t = t_0$ і не залежать від того, яким чином вона потрапила в цей стан, то випадковий процес називають *марковським*.

*Означення 3.2.* Марковський процес називається процесом з дискретними станами, якщо будь-який його переріз є дискретною випадковою величиною.

Зауважимо, що в більшості прикладних задач досліджувана система може знаходитись в скінченній кількості станів.

Наприклад, телефонна лінія може перебувати в одному з трьох станів: працює ($S_1$), зайнята ($S_2$), не працює ($S_3$). При описанні функціонування залізничної каси можливі такі стани: каса не працює ($S_1$), каса вільна ($S_2$), каса обслуговує пасажира і немає черги ($S_3$), в черзі один пасажир ($S_4$), в черзі два пасажира ($S_5$) і т.д..

Якщо перехід системи із одного стану в інший можливий лише у фіксовані моменти часу, то марковський процес називають *процесом з дискретним часом*. Прикладом такого процесу може бути накопичення балів студентами під час навчання . Кількість станів обмежена, а переходи із одного стану в інший відбуваються в фіксовані моменти часу. Даний процес є марковським, тому що наступні оцінки не залежать від того, якими були попередні.

Моменти переходу із одного стану в інший називають **кроками** марковського процесу. Марковські процеси з дискретним часом та дискретними станами називають ще **ланцюгами Маркова**.

Позначимо через $S_i^k$ подію, що система після кроку *k* знаходиться в стані $S_i$, а через $p_i(k)$ – ймовірність цієї події. Тоді, для кожного фіксованого $k$, події $S_1^k, S_2^k, ..., S_n^k$ утворюють повну групу подій, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} p(S_i^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1 \quad (k = 1,2,...).$$

Вектор-стовпець $\overline{P}(k)$ називають вектором *імовірностей станів* після кроку k. Вектор імовірностей станів системи в початковий момент часу позначають через $\overline{P}(0)$.

$$\overline{P}(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ ... \\ p_n(k) \end{pmatrix}, \quad \overline{P}(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ ... \\ p_n(0) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо ймовірність того, що після кроку *k* система опиниться в стані *j*, при умові, що перед цим вона перебувала в стані *i*

$$p_{ij}^k = p(S_j^k \middle| S_i^{k-1}).$$

Цю ймовірність називають *перехідною ймовірністю*.

*Означення 3.3.* Якщо перехідні ймовірності не залежать від кроку *k*, тобто $p_{ij}^k = p_{ij} = const$ для всіх $k \geq 1$, то ланцюг Маркова називають *однорідним*, в противному випадку – *неоднорідним.*

Надалі будемо розглядати лише однорідні ланцюги Маркова.

*Означення 3.4.* Квадратну матрицю $P$, елементами якої є перехідні ймовірності, називають *матрицею перехідних імовірностей.*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо властивості матриці перехідних імовірностей.

*Властивість 1.* Сума елементів кожного рядка матриці $P$ дорівнює 1.

*Властивість 2.* Вектор імовірностей станів після кроку $k$ дорівнює добутку транспонованої матриці перехідних імовірностей на вектор імовірностей станів після кроку $k-1$, тобто

$$\overline{P}(k) = P^T \overline{P}(k-1)$$

*Властивість 3.* Вектор імовірностей станів системи після кроку k однозначно визначається за допомогою матриць перехідних імовірностей та вектором імовірностей станів у початковий момент часу**:**

$$\overline{P}(k) = P^T \overline{P}(k-1) = (P^k)^T \overline{P}(0) \quad (3.1)$$

У випадку однорідного ланцюга Маркова зручно використовувати розмічений граф станів.

**Приклад 3.1**. Розглянемо залізничний вагон, як систему, що може знаходитись в одному з таких станів:

$S_1$ – повністю справний;

$S_2$ – несправний, оглядаєсья;

$S_3$ – ремонтується;

$S_4$ – списаний.

Відомо, що протягом року ймовірність виходу вагона з ладу рівна 0,2; ймовірність списання – 0,2; ймовірність відправки на ремонт – 0,7; ймовірність того, що він відремонтований – 0,4. Побудувати розмічений граф станів. Знайти вектор імовірностей станів через три роки, якщо в початковий момент вагон справний.

*Розв'язання*

Кружечками позначимо стани системи. Стрілками показано напрямки переходу системи з одного стану в інший. В певний момент часу справний вагон (стан $S_1$) стає несправним і оглядається (стан $S_2$). Після огляду (стан $S_2$) вагон може бути списаний (стан $S_4$) або ремонтуватися (стан $S_3$) після чого знову стане справним (стан $S_1$). Біля стрілок, що вказують напрями переходу проставлені відповідні перехідні ймовірності.

Розмічений граф системи має вигляд:

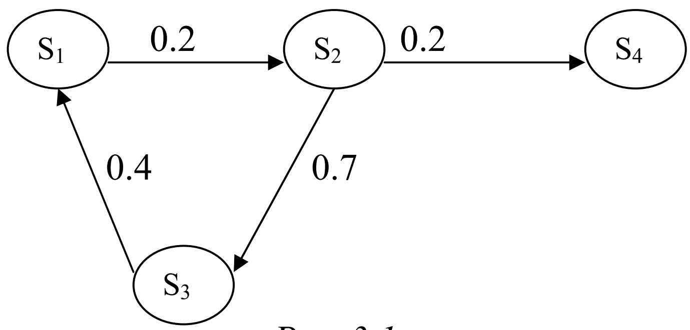



*Рис. 3.1*

Побудуємо матрицю перехідних імовірностей

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Ймовірність переходу із стану $S_1$ в стан $S_2$ дорівнює 0,2 ($p_{12}$=0,2). Оскільки за один крок система не може перейти із стану $S_2$ в стан $S_3$ та $S_4$, то $p_{13}=p_{14}=0$. За властивістю 1 маємо $p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}=1$. Отже, $p_{11}=1-p_{12}-p_{13}-p_{14}=1-0{,}2=0{,}8$, тобто ймовірність того, що вагон залишиться справним. дорівнює 0,8.

Ймовірності переходу із стану $S_2$ в стани $S_3$, $S_4$ та $S_1$ відповідно $p_{23}$=0,7, $p_{24}$=0,2, $p_{21}$=0. Ймовірність залишитись в стані $S_2$ (того, що огляд вагона буде продовжено) розрахуємо за формулою: $p_{22}=1-p_{21}-p_{23}-p_{24}=1-0{,}7-0{,}2=0{,}1$.

Аналогічно знаходимо інші перехідні ймовірності. В початковий момент часу вагон справний, тобто $P_1(0)=1$, $P_2$ $(0)=0$, $P_3(0)=0$, $P_4(0)=0$. Таким чином

$$P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P^T=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

*Зауваження 3.1.* З властивості 1 випливає, що діагональні елементи матриці $P$ (імовірності того, що система залишається в попередньому стані) можна знаходити з умови, що сума елементів кожного її рядка повинна дорівнювати одиниці.

Скориставшись формулою (3.1), знайдемо $\overline{P}(3)$:

$$\overline{P}(1)=P^T\,\overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0\\ 0{,}2\cdot 1+0{,}1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0\\ 0\cdot 1+0{,}7\cdot 0+0{,}6\cdot 0+0\cdot 0\\ 0\cdot 1+0{,}2\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(2)=P^T\,\overline{P}(1)=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}64\\0{,}18\\0{,}14\\0{,}4\end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(3)=P^T\,\overline{P}(2)=\begin{pmatrix}0{,}568\\0{,}146\\0{,}210\\0{,}076\end{pmatrix}.$$

*Відповідь.* За три роки вагон буде справним з імовірністю 0,568; оглядатись з імовірністю 0,146; ремонтуватись з імовірністю 0,21; списаний з імовірністю 0,076.

*Зауваження 3.2.* Для контролю розрахунків на кожному кроці потрібно переконуватись, що сума елементів вектора ймовірностей станів дорівнює одиниці.

**Приклад 3.2.** Для однорідного ланцюга Маркова з заданою матрицею перехідних імовірностей побудувати розмічений граф станів та знайти ймовірності станів після третього кроку, якщо в початковий момент система перебувала в стані $S_1$.

$$P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

*Розв'язання*

З умов задачі вектор імовірностей у початковий момент часу має вигляд:

$$\overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що матриця перехідних імовірностей має розмірність 4 х 4, робимо висновок, що система може знаходитись в чотирьох станах: $S_1,S_2,S_3,S_4$. Ймовірності $p_{21},p_{31},p_{32},p_{42},p_{43}$ рівні нулю, тому стрілки, що сполучають відповідні стани відсутні. Оскільки система може за один крок перейти із стану $S_1$ в стан $S_4$ ($p_{14}=0{,}1$) й із стану $S_4$ в $S_1$ ($p_{41}=0{,}5$), ці стани сполучені двома протилежно направленими стрілками. Ймовірності $p_{11},p_{22},p_{33},p_{44}$: залишитись у відповідному стані, на графі не зображаються. Розмічений граф системи зображено на рис. 3.2.

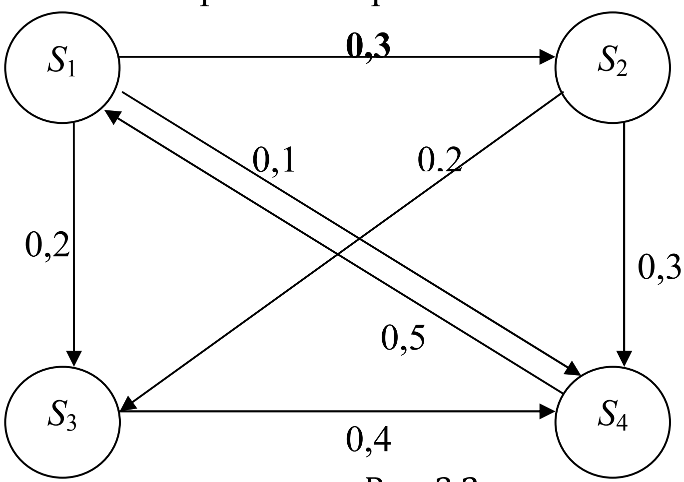



Рис. 3.2

Вектор $\overline{P}(3)$ знайдемо шляхом послідовного застосування формули (7.1):

$$P^T=\begin{pmatrix}0{,}4&0&0&0{,}5\\0{,}3&0{,}5&0&0\\0{,}2&0{,}2&0{,}6&0\\0{,}1&0{,}3&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(1)=P^T\,\overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}4&0&0&0{,}5\\0{,}3&0{,}5&0&0\\0{,}2&0{,}2&0{,}6&0\\0{,}1&0{,}3&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}3\\0{,}2\\0{,}1\end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(2)=P^T\,\overline{P}(1)=\begin{pmatrix}0{,}4&0&0&0{,}5\\0{,}3&0{,}5&0&0\\0{,}2&0{,}2&0{,}6&0\\0{,}1&0{,}3&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}3\\0{,}2\\0{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}21\\0{,}27\\0{,}26\\0{,}26\end{pmatrix};\quad \overline{P}(3)=P^T\,\overline{P}(2)=\begin{pmatrix}0{,}214\\0{,}198\\0{,}252\\0{,}336\end{pmatrix}.$$

*Відповідь.* Після третього кроку система з імовірністю 0,214 перебуватиме в стані $S_1$, з імовірністю 0,198 – в стані $S_2$, з імовірністю 0,252 – в стані $S_3$, з імовірністю 0,336 – в стані $S_4$.

**Завдання 3.** Для однорідних ланцюгів Маркова з заданими матрицями перехідних імовірностей та векторами ймовірностей початкових станів, побудувати розмічені графи станів та знайти $\overline{P}(1)$, $\overline{P}(2)$, $\overline{P}(3)$.

$$1.\, P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}1\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 2.\, P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}2\\ 0{,}2\end{pmatrix};$$

$$3.\, P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 4.\, P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}25\\ 0{,}25\end{pmatrix};$$

$$5.\, P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 6.\, P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}4\\ 0{,}3\\ 0{,}3\end{pmatrix}.$$

$$7.\, P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 8.\, P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$9.\, P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 10.\, P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\end{pmatrix};$$

$$11.\, P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 12.\, P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}7\\ 0{,}3\\ 0\end{pmatrix};$$

$$13.\, P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}1\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 14.\, P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\end{pmatrix};$$

$$15.\ P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}3\\ 0{,}2\\ 0\end{pmatrix};\quad 16.\ P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$17.\ P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad 18.\ P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0\\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}3\\ 0{,}2\end{pmatrix};$$

$$19.\ P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}3\\ 0{,}1\\ 0\end{pmatrix};\ 20.\ P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix};\ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}3\\ 0{,}1\end{pmatrix};$$

$$21.\ P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix};\ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}4\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\ 22.\ P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix};\ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}3\\ 0{,}2\end{pmatrix};$$

$$23.\ P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix};\ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}4\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\ 24.\ P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix};\ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}2\\ 0{,}3\end{pmatrix};$$

$$25.\ P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\qquad 26.\ P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}4\\ 0{,}3\\ 0{,}3\end{pmatrix};$$

$$27.\ P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}4\\ 0{,}1\end{pmatrix};\qquad 28.\ P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}8\\ 0{,}2\\ 0\end{pmatrix};$$

$$29.\ P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix};\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}3\\ 0{,}2\end{pmatrix};\qquad 30.\ P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix};:\overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}3\\ 0{,}1\end{pmatrix}.$$

# Тема 4. Марковські процеси з дискретними станами та неперервним часом

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

На практиці часто виникають ситуації, коли переходи системи із стану в стан відбуваються не у фіксовані, а у випадкові моменти часу, які передбачити неможливо. Для описання таких процесів будемо використовувати схему марковських процесів з дискретними станами і неперервним часом.

Нехай маємо систему $S$ з $n$ станами. Позначимо через $P_i(t)$ – ймовірність того, що в момент часу $t$ система $S$ знаходиться в стані $S_i$. Тоді маємо $\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$ для будь-якого $t$. Нехай $p_{ij}(t;\Delta t)$ – ймовірність переходу системи із стану $s_i$ в стан $s_j$ в проміжок часу [ t ; t+Δt ].

*Означення 4.1. Середньою інтенсивністю* переходу системи із стану $S_i$ в стан $S_j$ в проміжок часу [ t ; t+Δt ] будемо називати величину

$$\dot{\lambda}_{ij}(t) = \frac{P_{ij}(t,\Delta t)}{\Delta t},$$

а *щільністю ймовірностей* переходу (граничною інтенсивністю) в момент $t$ – величину

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(t,\Delta t)}{\Delta t}.$$

*Означення 4.2.* Марковський процес з дискретними станами називають *однорідним*, якщо щільності ймовірностей переходу не залежать від t, тобто $\lambda_{ij}(t) \equiv \lambda_{ij} = const.$

Надалі розглядатимемо лише однорідні марковські процеси.

*Означення 4.3. Матрицею інтенсивностей* (або щільностей імовірностей) переходу називається матриця виду

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

де елементи головної діагоналі матриці $\Lambda$ визначаються рівностями

$$\lambda_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_{ij} \quad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Матриця інтенсивностей має такі властивості:

*Властивість 1.* Всі її діагональні елементи від’ємні, недіагональні – невід’ємні;

*Властивість 2.* Сума елементів кожного рядка дорівнює нулю, звідки випливає, що її стовпчики є лінійно залежними, а значить її визначник дорівнює нулю.

**Теорема Колмогорова.** Нехай система може знаходитись в станах $S_{1,\dots,} S_n$ і процес зміни цих станів є випадковим. Якщо відомі щільності ймовірностей переходів $\lambda_{ij}$, то ймовірності станів системи $P_i(t)$ задовольняють системі рівнянь

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_{ji} P_j(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_{ij} P_i(t) \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{4.2}$$

які називають рівняннями Колмогорова

*Зауваження 4.1.* Сформулюємо мнемонічне правило побудови системи рівнянь Колмогорова. Похідна від ймовірності стану *i* дорівнює сумі потоків, що приводять систему в стан $S_i$ мінус сума потоків, що виводять її із цього стану.

Враховуючи (4.1), ми можемо подати систему (4.2) в матричній формі

$$\overline{P}(t)' = \Lambda^T \overline{P}(t),$$

де $\overline{P}(t)$ – вектор імовірностей станів системи, $\overline{P'}(t)$ – його похідна:

$$\overline{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_n(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{P'}(t) = \begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ \dots \\ P_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Нехай нам відомий вектор імовірностей початкових станів системи $\overline{P}_0 = \overline{P}(0)$. Тоді закон розподілу ймовірностей станів системи для довільного моменту часу визначатиметься як розв'язок задачі Коші:

$$\begin{aligned} &\overline{P'}(t) = \Lambda^T \overline{P}(t), \quad t > 0 \\ &\overline{P}(0) = \overline{P}_0 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

*Означення 4.4.* Марковський процес $\xi(t)\left(t \in [0;\infty)\right)$ з дискретними станами називається *ергодичним*, якщо існує

$$\overline{P} = \lim_{t\to\infty} \overline{P}(t),$$

що не залежить від стану, в якому система знаходилась в початковий момент. Вектор $\overline{P}$ називають вектором граничних або *фінальних імовірностей* системи, а саму систему – ергодичною.

Існування вектора фінальних імовірностей означає, що через деякий час в системі наступає певний стаціонарний режим, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \overline{P}^{\,/}(t) = 0 .$$

Таким чином, фінальні ймовірності є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &\Lambda^T \overline{P} = 0, \\ &P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

*Зауваження 4.2.* Ця система містить $n$+1 рівнянь та $n$ невідомих. Але враховуючи, що рядки матриці $\Lambda^{T}$ – лінійно залежні (див. властивість 2), одне з рівнянь системи можна виключити, після чого вона матиме єдиний розв’язок.

*Означення 4.5.* Стан $S_i$ є *несуттєвим*, якщо існує хоча б один стан $S_j$ такий, що з $S_i$ в $S_j$ система може перейти, а з $S_j$ в $S_i$ ні. $S_i$ є *суттєвим*, якщо він не є несуттєвим.

*Означення 4.6.* Два суттєвих стани $S_i$ та $S_j$ називаються *сполученими*, якщо система може перейти із стану $S_i$ в стан $S_j$ і навпаки.

*Зауваження 4.3.* Враховуючи, що система при виході із несуттєвого стану $S_i$ більше не може повернутись в цей стан, робимо висновок, що фінальна ймовірність цього стану $P_i$=0 і $P_i$ можна вилучити із (4.4) разом з рівнянням $i$.

***Вектор фінальних імовірностей системи є єдиним, якщо всі її суттєві стани – сполучені.***

Для описання системи в неперервному часі розглядають розмічений граф станів. Кружечками позначають стани системи. Стрілками показано напрямки переходу системи з одного стану в інший. Біля стрілок записують відповідні інтенсивності переходів із одного стану в інший.

**Приклад 4.1.** За заданою матрицею інтенсивностей побудувати граф станів системи, записати рівняння Колмогорова при умові, що в початковий момент часу вона знаходилась в стані $S_1$ та знайти фінальні ймовірності.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0{,}5 & -2{,}5 \end{pmatrix}$$

*Розв’язання.* Оскільки матриця перехідних імовірностей має розмірність 3х3, система може знаходитись в трьох станах: $S_1, S_2, S_3$. Система може безпосередньо перейти із стану $S_1$ в стан $S_3$ ($\lambda_{13} = 4$) й із стану $S_3$ в $S_1$ ($\lambda_{31} = 2$), ці стани сполучені двома протилежно направленими стрілками. Аналогічно, двома протилежно направленими стрілками сполучені стани $S_2$ та $S_3$. Діагональні елементи на графі не зображаються. Тоді розмічений граф станів системи можна представити у вигляді (рис. 4.1).

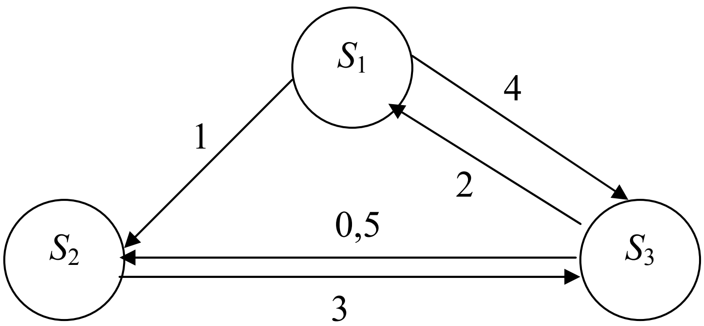



*Рис. 4.1*

Знайдемо

$$\Lambda^T = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0{,}5 \\ 4 & 3 & -2{,}5 \end{pmatrix},$$

з умови задачі також маємо

$$\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння Колмогорова мають вигляд

$$P_1'(t) = -5P_1(t) + 2P_3(t),$$

$$P_2'(t) = P_1(t) - 3P_2(t) + 0{,}5P_3(t),$$

$$P_3'(t) = 4P_1(t) + 3P_2(t) - 2{,}5P_3(t),$$

$$P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1$$

$$P_1(0) = 1, \quad P_2(0) = P_3(0) = 0.$$

З рис. 4.1 видно, що всі стани є суттєвими та сполученими. Таким чином, дана система є ергодичною. Знайдемо фінальні ймовірності.

$$-5P_1 + 2P_3 = 0,$$

$$P_1 - 3P_2 + 0{,}5P_3 = 0,$$

$$4P_1 + 3P_2 - 2{,}5P_3 = 0,$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Розв'язавши дану систему отримуємо

$$P_1 = \frac{4}{17}, P_2 = \frac{3}{17}, P_3 = \frac{10}{17}.$$

*Відповідь.* Фінальні ймовірності: $P_1 = \frac{4}{17}, P_2 = \frac{3}{17}, P_3 = \frac{10}{17}.$

**Приклад 4.2.** За заданою матрицею інтенсивностей побудувати граф станів системи, записати рівняння Колмогорова при умові, що в початковий момент часу вона знаходилась в стані $S_1$ та знайти фінальні ймовірності.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -6{,}5 & 2 & 1{,}5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

*Розв'язання.* Система може знаходитись в чотирьох станах: $S_1, S_2, S_3, S_4$. Система може безпосередньо перейти із стану $S_1$ в стани $S_2, S_3, S_4$ ($\lambda_{12} = 2; \lambda_{13} = 1{,}5; \lambda_{14} = 3$), із стану $S_2$ в $S_4$ ($\lambda_{24} = 1$) та із стану $S_3$ в стан $S_2$ ($\lambda_{32} = 2$). Сполучаємо їх відповідно направленими стрілками. Крім того, із стану $S_3$ система може безпосередньо перейти в стан $S_4$ ($\lambda_{34} = 1$) й із стану $S_4$

в $S_3$ ($\lambda_{43}=0{,}5$). Ці стани сполучені двома протилежно направленими стрілками. Біля стрілок вказані відповідні інтенсивності переходів. Розмічений граф станів системи зображено на рис. 4.2.

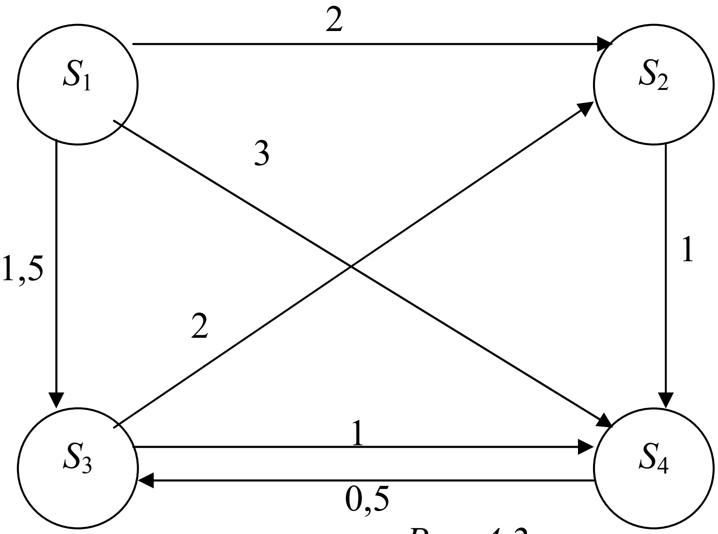



*Рис. 4.2*

$$\Lambda^T=\begin{pmatrix}-6{,}5 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ 1{,}5 & 0 & -3 & 0{,}5\\ 3 & 1 & 1 & -0{,}5\end{pmatrix},\qquad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Рівняння Колмогорова мають вигляд

$$P_1'(t)=-6{,}5P_1(t),$$

$$P_2'(t)=2P_1(t)-P_2(t)+2P_3(t),$$

$$P_3'(t)=1{,}5P_1-3P_3(t)+0{,}5P_4(t),$$

$$P_4'(t)=3P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)-0{,}5P_4(t),$$

$$P_1(0)=1,\qquad P_2(0)=P_3(0)=P_4(0)=P_5(0)=0.$$

Щоб знайти фінальні ймовірності, запишемо рівняння (4.4). Одержуємо

$$\begin{aligned}&6{,}5P_1=0,\\ &2P_1-P_2+2P_3=0,\\ &1{,}5P_1-3P_3+0{,}5P_4=0,\\ &3P_1+P_2+P_3-0{,}5P_4=0,\\ &P_1+P_2+P_3+P_4=1.\end{aligned}\tag{4.5}$$

З рис. 4.2 видно, що стан $S_1$ є несуттєвим (з нього можна перейти в стани $S_2, S_3, S_4$, а повернутись назад неможливо). Інші стани є сполученими. Таким чином, дана система є ергодичною.

Вилучаємо із системи (4.5) перше рівняння і покладаємо $P_1$=0. Маємо

$-P_2 + 2P_3 = 0,$

$-3P_3 + 0{,}5P_4 = 0,$

$P_2 + P_3 - 0{,}5P_4 = 0,$

$P_2 + P_3 + P_4 = 1.$

Оскільки перші чотири рівняння є лінійно залежними (див. зауваження 4.2), то одне з рівнянь (наприклад третє) можна відкинути.

Розв’язавши дану систему, отримуємо:

$P_2 = \frac{2}{9}, P_3 = \frac{1}{9}, P_4 = \frac{6}{9}.$

*Відповідь.* Фінальні ймовірності: $P_1 = 0, P_2 = \frac{2}{9}, P_3 = \frac{1}{9}, P_4 = \frac{6}{9}.$

**Завдання 4.** За заданою матрицею інтенсивностей побудувати граф станів системи, записати рівняння Колмогорова при умові, що в початковий момент часу вона знаходилась в стані $S_1$ та знайти фінальні ймовірності.

**Варіант 1**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

**Варіант 2**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 3**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 4**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 5**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 6**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 7**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 8**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**Варіант 9**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

**Варіант 10**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 11**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 12**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 13**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 14**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 15**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 16**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**Варіант 17**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 18**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 19**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 20**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 21**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Варіант 22**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Варіант 23**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

**Варіант 24**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Варіант 25**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

**Варіант 26**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1{,}5 & 0 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 27**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 28**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1{,}5 & 0{,}5 & -2 \end{pmatrix}$$

**Варіант 29**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & -2{,}5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 30**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# Тема 5. Системи масового обслуговування з відмовами

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

Нехай в деяку сукупність пунктів (систему обслуговування) через певні проміжки часу надходять об'єкти (вхідний потік), над якими виконуються певні операції (обслуговування), після чого об'єкти залишають систему. Таку структуру мають процеси на транспорті, в зв'язку, у виробничій сфері (ремонт та обслуговування обладнання). Звичайно вхідні потоки мають випадковий характер, тобто надходять до системи обслуговування через випадкові моменти часу. Сукупність описаних процесів називають *процесами масового обслуговування*.

Об'єкти, що надходять до системи масового обслуговування (СМО) називають *заявками* або *вимогами*.

СМО класифікують за такими ознаками:

1) Кількість каналів (кількість заявок, що можуть одночасно обслуговуватись). Виділяють одноканальні СМО (з'єднання по телефону з конкретним абонентом) та багатоканальні (залізничні каси).

2) Наявність черги (заявок, що очікують обслуговування). В СМО з відмовами, якщо канал зайнятий заявка не обслуговується, а залишає систему. СМО з чергами поділяють на системи з обмеженнями на довжину черги та системи з необмеженою чергою.

3) Кількість етапів обслуговування. В однофазовій СМО заявка обслуговується повністю в одному пункті (придбання квитка). В багатофазовій системі заявка проходить декілька етапів обслуговування (придбання товарів у супермаркетах: зважування продуктів у різних відділах, потім обслуговування касиром).

4) Дисципліна черги (для СМО з чергою). В СМО з пріоритетами є заявки, що обслуговуються не в порядку черги. СМО з нетерплячими клієнтами включає можливість заявки залишити систему не дочекавшись обслуговування.

## Найпростіший потік подій

*Означення 5.1.* Потоком подій називають послідовність однакових подій, що відбуваються у випадковий момент часу.

Прикладами потоків можуть бути виклики швидкої допомоги, прихід пасажирів до залізничних кас, рух автомобілів на шосе тощо.

*Означення 5.2.* Потік подій називають стаціонарним, якщо кількість подій, що відбувається за певний проміжок часу, залежить лише від тривалості цього проміжку і не залежить від початку його відліку.

Наприклад, потік пасажирів, що прямують до залізничних кас, не є стаціонарним, тому що кількість пасажирів залежить від часу доби, дня тижня та пори року. Потік викликів швидкої можна наближено вважати стаціонарним.

*Означення 5.3.* Потік подій називають ординарним, якщо ймовірність появи двох або більше подій за досить невеликий проміжок часу є значно меншою за ймовірність появи однієї події, і нею можна знехтувати.

Потік студентів, що приходять захищати розрахункові роботи не є ординарним з тієї причини, що ймовірність одночасного приходу двох або більше студентів є досить великою порівняно з імовірністю приходу одного студента і нехтувати нею не можна. Але викладач може зробити цей потік ординарним, призначаючи час захисту персонально.

*Означення 5.4.* Потік подій називають потоком без післядії, якщо кількість подій, що відбуваються за деякий проміжок часу не залежить від кількості подій, що відбувалися за інший проміжок часу, при умові, що ці проміжки не перетинаються.

Потік пасажирів до залізничних кас можна вважати потоком без післядії, тому що причини, з яких кожен з них приходить до кас, не залежить від причин приходу інших.

*Означення 5.5.* Стаціонарний ординарний потік подій без післядії називається найпростішим або Пуассонівським.

Дискретна випадкова величина ξ з множиною значень 0, 1, ..., n, що характеризує кількість заявок, що надходить до СМО найпростішим потоком за час *t*, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda t$, де $\lambda$ - інтенсивність потоку (середня кількість заявок в одиницю часу). Тобто

$$\mathrm{P}_m(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Випадкова величина $\tau$ – час між двома заявками, що надходять до СМО найпростішим потоком з інтенсивністю $\lambda$ – розподілена за експоненціальним законом розподілу із щільністю

$$\phi_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

В теорії масового обслуговування вважається також, що час обслуговування заявки та час очікування в черзі (якщо вона існує) теж розподілені за експоненціальним законом з параметрами $\mu$ та $\nu$ відповідно. Тут $\mu$ – інтенсивність обслуговування (кількість заявок, що обслуговуються в одиницю часу), а $\nu$ – інтенсивність того, що заявка залишить чергу, не дочекавшись обслуговування. У випадках, коли заявка не покидає чергу ні за яких умов ($\nu = 0$) СМО називають чистою СМО з очікуванням.

*Зауваження 5.1.* Ми вже наводили приклади того, що потік подій дуже часто не є найпростішим. Але на певних часових інтервалах ми можемо вважати його таким.

Аналогічно, при обслуговуванні не завжди виконані умови, при яких час обслуговування розподілений за експоненціальним законом. Але в цьому випадку, виключивши за досить тривалий проміжок часу досить малу кількість заявок, що порушують даний закон, ми можемо вважати наведені твердження виконаними.

*Зауваження 5.2.* Процеси масового обслуговування являють собою випадкові процеси з дискретними станами і неперервним часом. Враховуючи, що для цих процесів характерна відсутність післядії, ми можемо зробити висновок, що вони є марковськими. У випадку стаціонарності дані марковські процеси є однорідними. У більшості випадків СМО із стану $S_k$ може перейти лише в стани $S_{k-1}$ та $S_{k+1}$ (при умові ординарності). Наприклад, якщо $k$ – кількість заявок у черзі або кількість зайнятих каналів обслуговування, то в деякий момент часу вона може збільшитись або зменшитись тільки на одиницю. Тому ми маємо справу із схемою «загибелі і розмноження».

## СМО з відмовами

Прикладом таких систем є обслуговування заявок за багатоканальним телефоном. Нехай n- кількість каналів обслуговування. Розглянемо можливі стани системи:

$S_0$ – всі канали вільні, заявка буде обслугована;

$S_1$ – 1 канал зайнятий, заявка буде обслугована;

…… ……….. ………… ………..

$S_{n-1}$ – n–1 канал зайнятий, заявка буде обслугована;

$S_n$ – n каналів зайняті, заявка отримує відмову.

Граф цієї СМО зображено на рис. 5.1

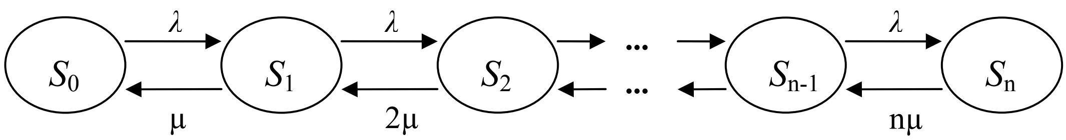



*Рис. 5.1*

*Зауваження 5.3.* Інтенсивність переходу системи із стану $S_k$ в стан $S_{k-1}$ рівна $k\mu$ тому, що $k$ каналів здійснюють обслуговування кожен з інтенсивністю $\mu$ і тому перехід в стан $S_{k-1}$ здійснюється при звільненні будь-якого з них. Оскільки канали обслуговують заявки незалежно, то ймовірність звільнення кожного з них, а значить і інтенсивність дорівнює сумі ймовірностей (інтенсивностей) звільнення кожного з них.

Для даного процесу матриця $\Lambda^T$ має вигляд:

$$\Lambda^T = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & -\mu-\lambda & 2\mu & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -2\mu-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n\mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n\mu \end{pmatrix}.$$

Розв’язавши систему рівнянь (4.4) для визначення фінальних імовірностей, одержуємо:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0\,, \quad P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0, \quad P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3}P_0, \ \dots\dots\dots\dots, \ P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}P_0,$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots\dots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1}.$$

В подальшому введемо позначення $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Величину $\rho$ називають коефіцієнтом навантаження СМО. Тоді

$$P_1 = \rho P_0, \ \ldots\ldots, \ P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \ , \quad P_0 = \left(1 + \rho + \ldots.. + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}.$$

СМО з відмовами характеризують такі параметри:

1) $P_{відм}$ – ймовірність відмови: $P_{відм} = P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} P_0$ (дійсно, коли система знаходиться в стані $S_n$, то всі канали завантажені і заявка отримує відмову);

2) $P_{обс}$ – ймовірність обслуговування або відносна пропускна спроможність (відношення кількості обслугованих заявок до кількості усіх заявок, що надійшли до СМО): $P_{обс}=1-P_{відм}$;

3) A – абсолютна пропускна спроможність (кількість заявок, що обслуговується за одиницю часу). У випадку стаціонарного процесу $A=\lambda P_{обс}$.

4) B – число необслугованих заявок: $B=\lambda P_{відм}$;

5) $t_з$ – час завантаженості СМО: $t_з = \dfrac{A}{n\mu}$ ($n\mu$ – інтенсивність обслуговування усієї СМО);

6) $t_{пр}$ – час простою СМО: $t_{пр} = 1 - t_з$;

7) $n_з$ – середня кількість завантажених каналів: $n_з = \dfrac{A}{\mu} = \rho P_{обс.}$;

8) $K_з$ – коефіцієнт завантаженості СМО: $K_з = \dfrac{n_з}{n} = t_з$.

**Приклад 5.1.** Нехай телефонні виклики у довідкове бюро надходять на одно-, дво- або триканальний телефон з інтенсивністю 15 викликів на годину. Відповідь в середньому займає 3 хвилини. Розрахувати показники ефективності СМО, якщо обслуговування заявки коштує 5 *грн*, а витрати на кожен канал – 20 *грн/год*.

*Розв'язання*

$$\lambda = 15 заявок/год; \quad t_{обс} = 3хв = \frac{1}{20} год.$$

Тоді $\mu = \dfrac{1}{t_{обс}} = 20 заявок/год$; $\rho = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

При n=1 СМО може перебувати в станах:

$S_0$ – канал вільний, заявка обслуговується;

$S_1$ – канал завантажений, заявка отримує відмову.

Граф станів зображено на рис. 5.2.

$$P_0 = \left(1 + \frac{3}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{7}; \quad P_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7};,$$

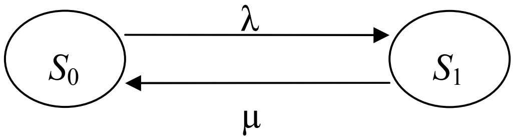



*Рис. 5.2*

$$P_{відм} = P_1 = \frac{3}{7} \approx 0{,}43; \quad P_{обс} = 1 - P_{відм} = \frac{4}{7} \approx 0{,}57;$$

$$A = 15 \cdot \frac{4}{7} = \frac{60}{7} \approx 8{,}5\,заявок\,/\,год; \; B \approx 15 - 8{,}5 = 6{,}5 \;\; заявки\,/год;$$

$$t_з \approx \frac{8{,}5}{20} = 0{,}43 \;\; год; \qquad t_{пр} \approx 1 - 0{,}43 = 0{,}57 \;\; год;$$

$$\bar{n}_з \approx \frac{8{,}5}{20} = 0{,}43; \;\; К_з \approx \frac{0{,}43}{1} = t_з = 0{,}43.$$

Таким чином, обслугованими будуть $\frac{4}{7}$ або близько 57% заявок. При цьому 57% часу СМО буде простоювати. Зазначимо, що якби виклики не надходили кожні 3 хвилини, то відмов не було б і при цьому 15 хв. щогодини СМО була б вільною.

При n=2 СМО перебуватиме в таких станах:

$S_0$ – обидва канали вільні;

$S_1$ – один канал завантажений;

$S_2$ – обидва канали завантажені, заявка отримує відмову.

Граф станів зображено на рис. 5.3.

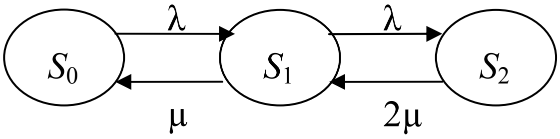



*Рис. 5.3*

$$P_0 = \left( 1 + \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \right)^{-1} = \left(\frac{65}{32}\right)^{-1} = \frac{32}{65};$$

$$P_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{65} = \frac{24}{65}; \quad P_2 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \cdot \frac{32}{65} = \frac{9}{65}.$$

Перевірка: $P_0 + P_1 + P_2 = \frac{32}{65} + \frac{24}{65} + \frac{9}{65} = 1$.

$$P_{відм} = P_2 = \frac{9}{65} \approx 0{,}14; \quad P_{обс} = 1 - P_{відм} = \frac{56}{65} \approx 0{,}86;$$

$$A = 15 \cdot \frac{56}{65} = \frac{168}{13} \approx 13 \text{ \textit{заявок / год}}; \quad B \approx 15 - 13 = 2 \text{ \textit{заявки /год}};$$

$$t_з \approx \frac{13}{2 \cdot 20} = 0{,}325 \text{ \textit{год}}; \quad t_{пр} \approx 1 - 0{,}325 = 0{,}675 \text{ \textit{год}};$$

$$\bar{n}_з \approx \frac{13}{20} = 0{,}65; \quad K_з \approx \frac{0{,}65}{2} = t_з = 0{,}325.$$

Отже, при введенні в дію другого каналу, ймовірність обслуговування збільшилась з 0,57 до 0,86, а кількість заявок, що отримують відмову зменшилось втричі. Але при цьому збільшився час простою, і СМО є завантаженою всього на 32,5% проти 43% для одноканальної.

При n=3 в стані $S_2$ заявка не отримує відмову і СМО може перебувати ще в одному стані $S_3$ – всі три канали завантажені, заявка отримує відмову.

Граф станів зображено на рис. 5.4.

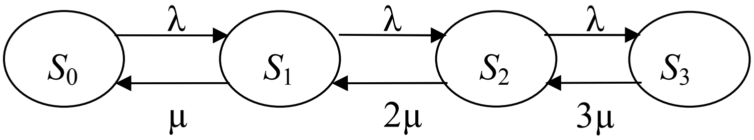



*Рис. 5.4*

$$P_0 = \left( 1 + \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3!} \right)^{-1} = \left(\frac{269}{128}\right)^{-1} = \frac{128}{269},$$

$$P_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{128}{269} = \frac{96}{269}; \quad P_2 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \cdot \frac{128}{269} = \frac{36}{269}; \quad P_3 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3!} \cdot \frac{128}{269} = \frac{9}{269}.$$

Перевірка: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{128}{269} + \frac{96}{269} + \frac{36}{269} + \frac{9}{269} = 1.$

$$P_{відм} = P_3 = \frac{9}{269} \approx 0{,}033; \quad P_{обс} = 1 - \frac{9}{269} = \frac{260}{269} \approx 1 - 0{,}033 = 0{,}967;$$

$$A = 15 \cdot \frac{260}{269} \approx 14{,}5 \text{ \textit{заявок /год}}; \quad B = 15 - 14{,}5 = 0{,}5 \text{ \textit{заявок /год}};$$

$$t_з \approx \frac{14{,}5}{3 \cdot 20} \approx 0{,}24 \text{ \textit{год}}; \quad t_{пр} \approx 1 - 0{,}24 = 0{,}76 \text{ \textit{год}};$$

$$\bar{n}_з \approx \frac{14{,}5}{20} = 0{,}725; \quad K_з = t_з \approx 0{,}24.$$

Таким чином, кількість відмов зменшилась до 3% в порівнянні з 14% для двоканальної СМО, але зріс і час простою, а відповідно коефіцієнт завантаження зменшився до 24%.

Ми бачимо, що введення в дію другого каналу суттєво підвищило ефективність СМО. Кількість обслугованих заявок збільшилась з 57% до 86%.

Третій канал не призводить до суттєвого підвищення ефективності. Справа в тому, що при розрахунках ефективності потрібно враховувати і фінансовий аспект. Додатковий канал обслуговування потребує додаткових витрат (вартість обладнання; заробітна плата особи, що його обслуговує; тощо). Якщо обслуговування заявки коштує 5*грн*, а витрати на кожен канал – 20*грн*/*год*, то прибуток для одноканальної СМО складатиме:

$$8{,}5\cdot 5 - 20 = 22{,}5 \text{ грн/год},$$

для двоканальної –

$$13\cdot 5 - 2\cdot 20 = 25 \text{ грн/год},$$

а для триканальної –

$$14{,}5\cdot 5 - 3\cdot 20 = 12{,}5 \text{ грн/год}.$$

Звідки робимо висновок, що найбільш ефективною є двоканальна СМО.

*Відповідь.* При $n$=1: $P_{выдм} \approx 0{,}43$, $P_{обс} \approx 0{,}57$, $A \approx 8{,}5$ *заявок/год*, $B \approx 6{,}5$ *заявки /год*, $t_з \approx 0{,}43$ *год*, $t_{пр} \approx 0{,}57$ *год*, $\overline{n}_з \approx 0{,}43$, $K_з \approx 0{,}43$.

При $n$=2: $P_{выдм} \approx 0{,}14$, $P_{обс} \approx 0{,}86$, $A \approx 13$ *заявок / год*, $B \approx 2$ *заявки /год*, $t_з \approx 0{,}325$ *год*, $t_{пр} \approx 0{,}675$ *год*, $\overline{n}_з \approx 0{,}65$, $K_з \approx 0{,}325$.

При $n$=3: $P_{выдм} \approx 0{,}033$, $P_{обс} \approx 0{,}967$, $A \approx 14{,}5$ *заявок /год*, $B \approx 0{,}5$ *заявок /год*, $t_з \approx 0{,}24$ *год*, $t_{пр} \approx 0{,}76$ *год*, $\overline{n}_з \approx 0{,}725$, $K_з \approx 0{,}24$.

Найбільш ефективною є двоканальна СМО.

**Завдання 5.** Нехай телефонні виклики у довідкове бюро надходять на одно-, дво- або триканальний телефон з інтенсивністю λ викликів на годину. Відповідь в середньому займає t хвилин. Розрахувати показники ефективності СМО, якщо обслуговування заявки коштує P *грн*, а витрати на кожен канал – C *грн/год*.

| Варіант | λ | t | P | C | Варіант | λ | t | P | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 1 | 4 | 10 | 16 | 10 | 4 | 6 | 15 |
| 2 | 30 | 1 | 3 | 15 | 17 | 20 | 4 | 3 | 25 |
| 3 | 90 | 1 | 3 | 30 | 18 | 25 | 4 | 3 | 30 |
| 4 | 150 | 1 | 2 | 40 | 19 | 18 | 4 | 4 | 30 |
| 5 | 20 | 1 | 4 | 10 | 20 | 75 | 1 | 2 | 25 |
| 6 | 40 | 1 | 3 | 15 | 21 | 36 | 1 | 3 | 10 |
| 7 | 80 | 1 | 2 | 25 | 22 | 48 | 1 | 4 | 25 |
| 8 | 24 | 1 | 4 | 10 | 23 | 72 | 1 | 3 | 30 |
| 9 | 15 | 2 | 4 | 10 | 24 | 100 | 1 | 2 | 40 |
| 10 | 45 | 2 | 3 | 25 | 25 | 18 | 1 | 4 | 10 |
| 11 | 75 | 2 | 3 | 40 | 26 | 18 | 2 | 4 | 15 |
| 12 | 10 | 2 | 6 | 10 | 27 | 24 | 2 | 6 | 30 |
| 13 | 20 | 2 | 4 | 15 | 28 | 36 | 2 | 4 | 30 |
| 14 | 40 | 2 | 3 | 30 | 29 | 50 | 2 | 3 | 40 |
| 15 | 12 | 2 | 6 | 15 | 30 | 9 | 2 | 6 | 10 |

## Тема 6. Системи масового обслуговування з очікуванням

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

СМО з очікуванням – це системи, в яких у випадку завантаженості усіх каналів обслуговування, заявка стає в чергу і очікує обслуговування. До таких СМО належать усі каси, автомийки і торгові точки. Причому довжина черги може бути необмежена (заявка чекає обслуговування в будь-якому разі) та обмежена певною кількістю місць (у випадку, коли черга досягла певної довжини, заявка отримує відмову: клієнт не стає в чергу, а вирішує прийти в інший час).

*Зауваження 6.1.* Дана ситуація є ідеальною. На практиці прийнятність довжини черги для кожного клієнта різна. Одна людина за будь-яких умов буде чекати обслуговування (наприклад, коли їй терміново треба придбати квиток) інша не хоче гаяти часу в черзі. Тому, ми як і раніше оперуємо середніми величинами.

Ми розглядатимемо чисті СМО: заявка, що стала в чергу, не покидає її ні за яких умов.

СМО з обмеженою чергою може перебувати в таких станах:

$S_0$ – всі канали вільні, заявка буде обслугована;

$S_1$ – 1 канал зайнятий, заявка буде обслугована;

…… ……….. ………… ………..

$S_{n-1}$ – n–1 канал зайнятий, заявка буде обслугована;

$S_n$ – n каналів зайняті, в черзі 0 заявок, заявка стає в чергу;

$S_{n+1}$ – n каналів зайняті, в черзі 1 заявка, заявка стає в чергу;

…… ……….. ………… ………..

$S_{n+m}$ – n каналів зайняті, в черзі m заявок, заявка отримує відмову.

Граф цієї СМО зображено на рис. 6.1. Як і у випадку СМО з відмовами, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Тоді, розв'язавши систему рівнянь (4.4) для визначення фінальних імовірностей, одержуємо

$$P_1 = \rho P_0, \ldots, \; P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0, \; P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} P_0, \; P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} P_0, \; \ldots, \; P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0,$$

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\varepsilon - \varepsilon^{m+1}}{1 - \varepsilon}\right)^{-1},$$

де $\varepsilon = \frac{\rho}{n}$.

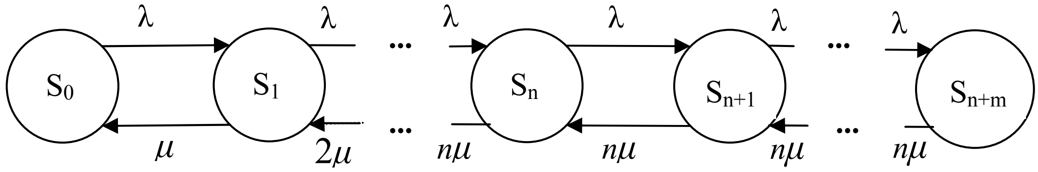



Рис. 6.1

Ймовірність відмови – це ймовірність перебування СМО в стані $S_{n+m}$

$$P_{відм} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}P_0,\ P_{обс.} = 1 - P_{відм.},\ A = \lambda P_{обс.},\ B = \lambda - A,$$

$$t_з = \frac{A}{n\mu} = \varepsilon P_{обс.},\ t_{пр} = 1 - t_з,\ n_з = \frac{A}{\mu} = \rho P_{обс.},$$

$$K_з = \frac{n_з}{n},\ t_{обс} = \frac{n_з}{\lambda} = \frac{P_{обс.}}{\mu},\ L_{обс.} = \lambda t_{обс.} = \rho P_{обс}.$$

Для СМО з очікуванням додатково вводяться характеристики:

Середня довжина черги, яка визначається як математичне сподівання випадкової величини L:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| L | 0 | 1 | 2 | … | m |
| P | $P_0 + P_1 + ...P_n$ | $P_{n+1}$ | $P_{n+2}$ | … | $P_{n+m}$ |

$$L_ч = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \varepsilon^m(m + 1 - m\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2}P_0.$$

Далі, $L_{СМО} = L_ч + L_{обс.}$.

Середній час перебування заявки в черзі та в СМО знаходимо за формулами Літтла:

$$t_ч = \frac{L_ч}{\lambda},\ t_{СМО} = \frac{L_{СМО}}{\lambda}.$$

Ймовірність черги та очікування:

$$P_ч = P_{n+1} + P_{n+2} + ... + P_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\varepsilon - \varepsilon^{m+1}}{1-\varepsilon}P_0,$$

$$P_{оч} = P_n + P_{n+1} + ... + P_{n+m-1} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{1-\varepsilon^m}{1-\varepsilon}P_0. = \frac{P_ч}{\varepsilon}.$$

Остання – це ймовірність того, що заявка одразу не обслуговується, а стає в чергу, але не отримує відмову.

Зауважимо, що наведені формули справедливі для всіх $\varepsilon \neq 1$. У випадку $\varepsilon = 1$, маємо $P_n = P_{n+1} = ... = P_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!}P_0$. Тоді:

$$P_0 = \left(1 + \rho + ... + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(m+1)\rho^n}{n!}\right)^{-1},\quad P_{відм} = \frac{\rho^n}{n!}P_0,$$

$$L_ч = \frac{\rho^n}{n!}\frac{m(m+1)}{2}P_0, \qquad P_ч = P_{оч} = \frac{m\rho^n}{n!}P_0.$$

Якщо $\varepsilon < 1$, то обмеження черги для СМО з очікуванням можна зняти.

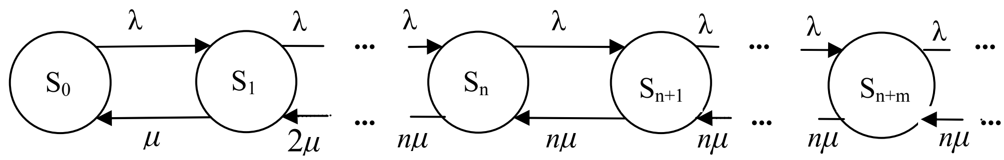



Рис. 6.2

При цьому:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n \varepsilon}{n!(1-\varepsilon)}\right)^{-1} = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^n}{n!(1-\varepsilon)}\right)^{-1},$$

$$P_{відм} = 0,\ P_{обс} = 1,\ A = \lambda,\ B = 0,\ t_з = \varepsilon,\ t_{пр} = 1 - \varepsilon,$$

$$n_з = \rho,\ K_з = \frac{\rho}{n} = \varepsilon,\ L_{обс} = \rho = n_з,\ t_{обсл} = \frac{1}{\mu},$$

$$L_ч = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!(1-\varepsilon)^2}P_0,\ L_{СМО} = L_ч + \rho, \qquad (6.1)$$

$$t_ч = \frac{L_ч}{\lambda},\ t_{СМО} = \frac{L_{СМО}}{\lambda}, P_ч = \frac{\rho^n}{n!}\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}P_0, P_{оч} = \frac{\rho^n}{n!}\frac{1}{1-\varepsilon}P_0 = \frac{P_ч}{\varepsilon}.$$

У випадку одноканальної СМО з очікуванням маємо $n = 1, \varepsilon = \rho.$ При $\rho < 1$ можна зняти обмеження черги. Граф цієї СМО зображено на рис. 6.3.

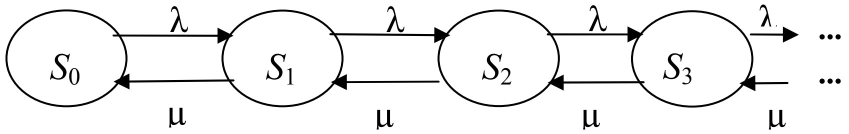



*Рис. 6.3*

Тоді

$$P_0 = 1 - \rho,\ P_{відм} = 0,\ P_{обс} = 1,\ A = \lambda,\ B = 0,\ t_з = \rho,\ t_{пр} = 1 - \rho,$$

$$n_з = K_з = \rho, \quad L_{обс} = \rho,\ t_{обсл} = \frac{1}{\mu},\ L_ч = \frac{\rho^2}{1-\rho},\ L_{СМО} = L_ч + \rho, \qquad (6.2)$$

$$t_ч = \frac{L_ч}{\lambda},\ t_{СМО} = \frac{L_{СМО}}{\lambda},\ P_ч = \rho^2,\ P_{оч} = \rho.$$

**Приклад 6.1.** На залізничній станції Феодосія працює 5 кас попереднього продажу квитків. Влітку потік пасажирів збільшується, тому черга формується в залі очікування і пасажирів запрошують до касового залу, щойно звільниться одна із кас. Відомо, що інтенсивність потоку пасажирів 100 осіб на годину. Кожен касир обслуговує в середньому 25 пасажирів за годину. Розрахувати показники ефективності СМО і порівняти їх з показниками СМО, в якій пасажир одразу заходить до касового залу і займає чергу до однієї з кас.

*Розв'язання.* Ми маємо п'ятиканальну СМО з очікуванням (граф СМО зображено на рис. 6.4). $n = 5$, $\lambda = 100$, $\mu = 25$.

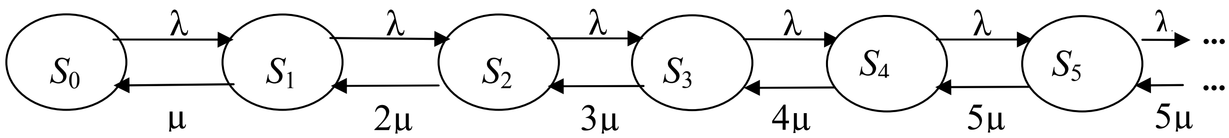



*Рис. 6.4*

Тоді $\rho = \frac{100}{25} = 4$, $\varepsilon = \frac{4}{5} = 0,8$. За формулами (6.1) знаходимо:

$$P_0 = \left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!(1-0,8)}\right)^{-1} = \frac{1}{75}; \quad A = 100;$$

$$t_з = 0,8\,год; \; t_{пр} = 0,2\,год; \; L_{обс} = n_з = 4; \; K_з = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$t_{обс} = \frac{1}{25} = 0,04\,год; \; L_ч = \frac{4^6}{5 \cdot 5!(1-0,8)^2} \cdot \frac{1}{75} \approx 2,28;$$

$$L_{СМО} \approx 2,28 + 4 = 6,28; \quad t_ч \approx \frac{2,28}{100} \approx 0,023\,год; \; t_{СМО} \approx \frac{6,28}{100} \approx 0,063\,год;$$

$$P_ч = \frac{4^5 \cdot 0,8}{5!(1-0,8)} \cdot \frac{1}{75} \approx 0,45; \; P_{оч} = \frac{4^5}{5!(1-0,8)} \cdot \frac{1}{75} \approx 0,57.$$

Таким чином, коефіцієнт завантаження СМО 80%. Пасажир перебуває на станції в середньому 4 хвилини.

Розглянемо задачу, коли пасажир одразу стає в чергу до певної каси. Тоді інтенсивність потоку до кожної каси дорівнює $\lambda_1 = \frac{100}{5} = 20\,пас/год$. Ми отримуємо 5 одноканальних СМО (граф одноканальної СМО з необмеженою чергою зображено на рис. 6.3), для яких $\lambda = 20$, $\mu = 25$, $\rho = 0,8$. Згідно з (6.2) маємо:

$$P_0 = 1 - 0,8 = 0,2; \; A = 20; \; t_з = 0,8год; \, t_{пр} = 0,2год;$$

$$n_з = K_з = L_{обс} = 0,8; \; t_{обсл} = \frac{1}{25} = 0,04год; \; L_ч = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,2;$$

$$L_{СМО} = 3,2 + 0,8 = 4; \; t_ч = \frac{3,2}{20} = 0,16год; \; t_{СМО} = \frac{4}{20} = 0,2год;$$

$$P_ч = 0,8^2 = 0,64; \; P_{оч} = 0,8.$$

*Відповідь.* Пропускна спроможність п’ятиканальної СМО $A = 100$ *заявок/год;* час завантаження та простою $t_з = 0,8\,год$ та $t_{пр} = 0,2год$ відповідно; зайнято обслуговуванням пасажирів в середньому чотири каси. В черзі до касового залу перебуває менше трьох пасажирів. Середній час перебування пасажира на станції – 4 хвилини. Ймовірність черги та очікування – $P_ч \approx 0,45; P_{оч} \approx 0,57$.

Якщо пасажир одразу заходить до касового залу і займає чергу до однієї з кас, то при однакових характеристиках завантаженості і пропускної спроможності, черга до кожної каси в середньому перевищує 3 пасажири, а час перебування на станції збільшується до 12 хвилин, тобто втричі. Ймовірність того, що пасажиру доведеться очікувати обслуговування, збільшилась майже в півтора рази. Крім того, $L_ч = 3{,}2$ – це довжина черги в одну касу, тобто в черзі в каси буде знаходитись в середньому шістнадцять пасажирів. Робимо висновок: n-канальна СМО є значно ефективнішою за n однакових СМО для клієнтів.

*Зауваження 6.2.* Наведені вище міркування використовують деякі організації, влаштовуючи перед операційними залами зали очікування. Таким чином, утворюється загальна черга до багатоканальної СМО. Потрапляючи до операційного залу клієнт обслуговується каналом, який щойно звільнився.

*Зауваження 6.3.* Оскільки для СМО ці два варіанти рівноцінні, то управлінці не зацікавлені в регулюванні потоку до кас, тим більше, що потрібно витрачати додаткові гроші на оплату праці «регулювальника». Тому цю функцію перебирають на себе пасажири-ентузіасти.

Інша річ, коли замість п’яти кас на станції, облаштувати п’ять кас в різних районах міста. В цьому випадку пасажир може витратити менше часу, щоб дістатись до найближчої каси і цим компенсувати додатковий час перебування у одноканальній СМО, порівняно з багатоканальною. Особливо це є важливим для великих міст, таких як Київ.

*Зауваження 6.4.* На перший погляд здається, що оскільки $n_з = 4$, то одну із кас можна закрити. Але в цьому випадку $\varepsilon = 1$ і черга буде необмежено збільшуватися або доведеться вводити обмеження на її довжину. При цьому з’явиться певний відсоток необслугованих заявок.

**Завдання 6.** На залізничній станції працює n кас. Відомо, що інтенсивність потоку пасажирів λ осіб на годину. Кожен касир обслуговує в середньому μ пасажирів за годину. Розрахувати показники ефективності n-канальної СМО і порівняти їх з показниками n одноканальних СМО

| Варіант | n | λ | μ | Варіант | n | λ | μ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 114 | 40 | 16 | 3 | 63 | 30 |
| 2 | 3 | 108 | 40 | 17 | 4 | 150 | 50 |
| 3 | 3 | 102 | 40 | 18 | 4 | 170 | 50 |
| 4 | 3 | 90 | 40 | 19 | 4 | 180 | 50 |
| 5 | 3 | 84 | 40 | 20 | 4 | 190 | 50 |
| 6 | 4 | 95 | 25 | 21 | 5 | 102 | 24 |
| 7 | 4 | 90 | 25 | 22 | 5 | 108 | 24 |
| 8 | 4 | 85 | 25 | 23 | 5 | 114 | 24 |
| 9 | 4 | 75 | 25 | 24 | 5 | 90 | 24 |
| 10 | 5 | 170 | 40 | 25 | 6 | 144 | 30 |
| 11 | 5 | 180 | 40 | 26 | 3 | 135 | 50 |
| 12 | 5 | 190 | 40 | 27 | 3 | 105 | 50 |
| 13 | 5 | 150 | 40 | 28 | 4 | 108 | 30 |
| 14 | 6 | 192 | 40 | 29 | 4 | 102 | 30 |
| 15 | 3 | 81 | 30 | 30 | 4 | 90 | 30 |

# Тема 7. Сітьове планування

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

У галузі будівництва, розробки нових систем, оптимізації ремонтних робіт тощо, виникає необхідність описання та дослідження процесів, пов'язаних з виконанням певного комплексу робіт. У цих випадках зручним інструментом дослідження є аналіз сітьових графіків. Основними елементами їх є роботи та події.

Робота – це тривалий у часі процес, що переводить систему із одного стану в інший. Наприклад, при побудові залізниці: зведення насипу, укладання шпал, встановлення опор ліній електропередач і т. д.

Подія – це стан системи, що означає закінчення певних робіт або готовність до виконання подальших робіт. Подію, якій не передує жодна робота, називають початковою, а подію після якої не виконується жодна робота – кінцевою. Кожній іншій події повинна передувати хоча б одна робота і після неї повинна виконуватись хоча б одна робота.

Кожна робота розпочинається при умові, що настала певна подія і закінчується настанням нової події. Більшість робіт можуть проводитись паралельно (укладання шпал та встановлення опор ліній електропередач), інші відбуваються тільки після настання певної події (укладання шпал може відбутись лише після зведення насипу). Будь-яка подія (крім початкової) не може настати, доки не виконані усі роботи, що їй передують.

Сітьовим графіком називають розмічений граф системи, на якому події зображають кружечками, а роботи стрілками, біля яких проставляють тривалість виконання робіт. Особливістю сітьового графіка є те, що рух відбувається в одному напрямку (зліва – направо) і відсутні цикли (кожна подія настає лише один раз).

Для спрощення подальшого аналізу будемо вважати, що дві події може з'єднувати тільки одна робота. Якщо це не так, то вводиться фіктивна подія і фіктивна робота, яка на сітьовому графіку позначається штриховою стрілкою. Для фіктивної роботи тривалість виконання дорівнює нулю.

Після побудови сітьового графіка, розпочинається його аналіз.

Будемо вважати, що початкова подія настала в час t = 0. Для кожної із подій визначаємо ранній термін її настання (прямий хід) за формулою:

$$E_j = \max\left(E_i + t_{ij}\right) \tag{7.1}$$

(подія не може настати раніше, ніж будуть виконані всі роботи, які їй передують). $E_k$ (ранній термін настання кінцевої події) – називатимемо найменшим часом виконання циклу робіт.

Після чого, для кінцевої події визначаємо пізній термін її настання: $L_k = E_k$, і починаємо рухатись від кінцевої до початкової події (зворотній хід), визначаючи пізні терміни настання подій:

$$L_j = \min\left(L_i - t_{ji}\right). \tag{7.2}$$

Це крайній термін, в якій може настати подія $j$, щоб кінцева подія настала не пізніше, ніж в термін $E_k$.

Далі визначається критичний шлях.

*Означення 7.1.* Критичним шляхом називають послідовність робіт від початкової до кінцевої події, що має найбільшу тривалість.

***Критичний шлях – це шлях, який з'єднує події, для яких ранній і пізній терміни настання співпадають та виконані умови:***

$$L_j - E_i - t_{ij} = 0. \quad (7.3)$$

Критичний шлях визначає найменший термін виконання всього циклу робіт від початкової події до кінцевої. Для робіт, які не належать критичному шляху, виникають резерви часу.

*Повний резерв часу:*

$$t_{ij}^{П} = L_j - E_i - t_{ij}. \quad (7.4)$$

Повний резерв часу показує на скільки можна відкласти початок виконання роботи, щоб це не вплинуло на термін настання кінцевої події, при умові, що попередня подія настала в ранній термін.

*Вільний резерв часу:*

$$t_{ij}^{В} = L_j - L_i - t_{ij}. \quad (7.5)$$

Вільний резерв часу показує на скільки можна відкласти початок виконання роботи, щоб це не вплинуло на термін настання кінцевої події, при умові, що попередня подія настала в пізній термін.

*Незалежні резерви часу:*

$$t_{ij}^{Н} = E_j - L_i - t_{ij}. \quad (7.6)$$

Незалежний резерв часу – це час простою, який не залежить від терміну настання попередньої до роботи події.

Дані про резерви заносимо в таблицю.

Зрозуміло, що виконана нерівність $t_{ij}^{П} \ge t_{ij}^{В} \ge t_{ij}^{Н}$. Повний та вільний резерви часу є невід'ємними. Що ж стосується незалежних резервів, то у випадку, якщо вони від'ємні, вважають, що їх не існує і в таблицю вносять «0» або «–» (це можливо, якщо обидві події $i$ та $j$ не належать критичному шляху).

*Зауваження 7.1.* З урахуванням (7.4), ***критичний шлях – це шлях, який з'єднує події, для яких ранній і пізній терміни настання співпадають та повні резерви часу для всіх робіт, що входять до його складу, рівні нулю.***

*Зауваження 7.2.* З означення випливає, що критичний шлях завжди існує. Але цей шлях не обов'язково один.

В результаті аналізу сітьового графіка виявляють ділянки робіт з резервами часу. Роботи з резервами часу потребують оптимізації: наприклад, зменшення кількість працівників, що призведе до збільшення часу виконання цих робіт, але не вплине на кінцевий термін завершення усього циклу. Вивільнені працівники можуть бути задіяні на виконанні робіт критичного шляху (якщо це можливо), що зменшить час виконання всього циклу робіт. Ідеальною є ситуація, в якій всі шляхи сітьового графіка є критичними, тобто, резерви часу для всіх робіт відсутні.

**Приклад 7.1.** Провести аналіз сітьового графіка.

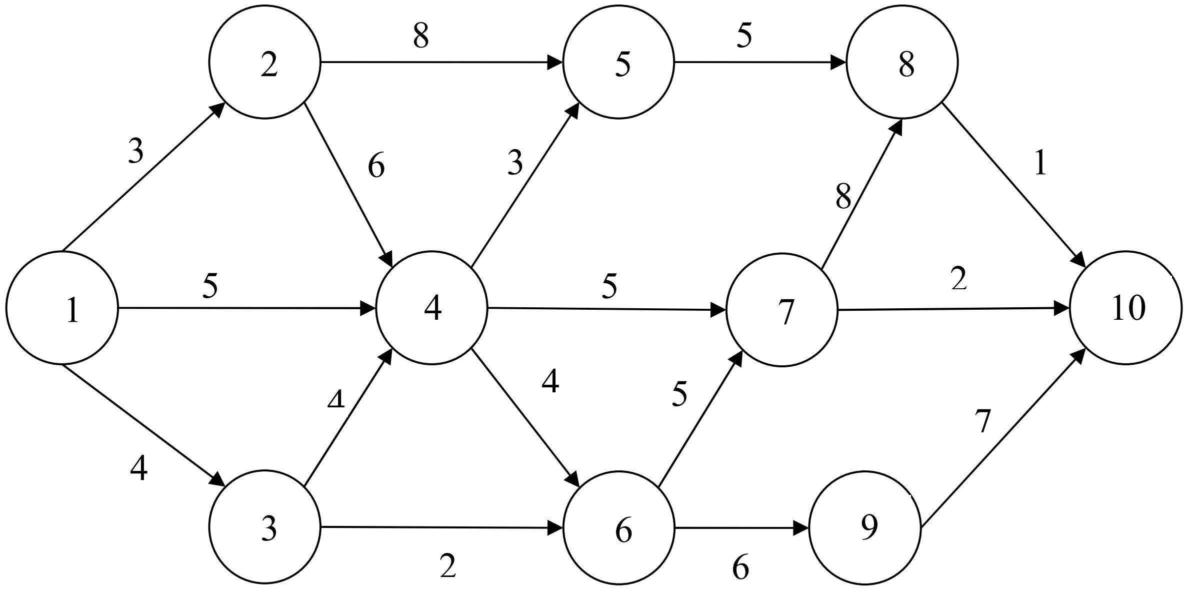



*Рис. 7.1*

*Розв'язання.* Ранній термін настання події 1 покладаємо рівним нулю і записуємо під даною подією. Далі, користуючись формулами (7.1) знаходимо ранні терміни настання інших подій і записуємо їх під відповідними подіями.

Оскільки подія 2 настане після виконання роботи 1 – 2, то

$$E_2 = E_1 + t_{12} = 0 + 3 = 3,$$

аналогічно:

$$E_3 = E_1 + t_{13} = 0 + 4 = 4.$$

Подія 4 настане лише тоді, коли будуть виконані роботи 1 – 4 , 2 – 4 та 3 – 4. Отже

$$E_4 = \max(E_1 + t_{14}; E_2 + t_{24}; E_3 + t_{34}) =$$
$$= \max(0 + 5; 3 + 6; 4 + 4) = \max(5; 9; 8) = 9.$$

Для того, щоб настала подія 5, потрібно завершити роботи 2 – 5 та 4 – 5.

$$E_5 = \max(E_2 + t_{25}; E_4 + t_{45}) = \max(3 + 8; 9 + 3) = \max(11; 12) = 12.$$

Аналогічно,

$$E_6 = \max(E_3 + t_{36}; E_4 + t_{46}) = \max(4 + 2; 9 + 4) = \max(6; 13) = 13,$$
$$E_7 = \max(E_4 + t_{47}; E_6 + t_{67}) = \max(9 + 5; 13 + 5) = \max(14; 18) = 18,$$
$$E_8 = \max(E_5 + t_{58}; E_7 + t_{78}) = \max(12 + 5; 18 + 8) = \max(17; 26) = 26.$$

Оскільки для настання події 9 потрібне завершення лише однієї роботи 6 – 9, то

$$E_9 = E_6 + t_{69} = 13 + 6 = 19.$$

Щоб настала кінцева подія 10, треба завершити роботи 7 – 10, 8 – 10 та 9 – 10. Тоді

$$E_{10} = \max(E_7 + t_{7,10}; E_8 + t_{8,10}; E_9 + t_{9,10}) =$$
$$= \max(18 + 2; 26 + 1; 19 + 7) = \max(20; 27; 26) = 27.$$

Таким чином, найкоротший термін, в який можна закінчити весь цикл робіт дорівнює 27 часовим одиницям. Покладемо $L_{10} = E_{10} = 27$ і починаємо зворотній хід. За формулами (7.2) знаходимо пізні терміни настання подій і записуємо їх над відповідними подіями.

Для того, щоб подія 10 настала через 27 часових одиниць після початку циклу робіт, треба, щоб подія 9 настала не пізніше, ніж через

$$L_9 = L_{10} - t_{9,10} = 27 - 7 = 20,$$

а подія 8 – не пізніше ніж через

$$L_8 = L_{10} - t_{8,10} = 27 - 1 = 26.$$

Пізній термін настання події 7

$$L_7 = \min(L_8 - t_{78}; L_{10} - t_{7,10}) = \min(26-8; 27-2) = \min(18; 25) = 18,$$

оскільки, при більш пізньому її настанні не буде вчасно виконана робота 7 – 9 і відповідно збільшиться загальний час виконання всього циклу робіт.

Аналогічно знаходимо

$$L_6 = \min(L_7 - t_{67}; L_9 - t_{69}) = \min(18-5; 20-6) = \min(13; 14) = 13,$$

$$L_5 = L - -t_{58} = 26 - 5 = 21,$$

$$L_4 = \min(L_5 - t_{45}; L_6 - t_{46}; L_7 - t_{47}) =$$

$$= \min(21-3; 13-4; 18-5) = \min(18; 9; 13) = 9,$$

$$L_3 = \min(L_4 - t_{34}; L_6 - t_{36}) = \min(9-4; 13-2) = \min(5; 11) = 5,$$

$$L_2 = \min(L_4 - t_{24}; L_5 - t_{25}) = \min(9-6; 21-8) = \min(3; 13) = 3.$$

І нарешті

$$L_1 = \min(L_2 - t_{12}; L_3 - t_{13}; L_4 - t_{14}) =$$

$$= \min(3-3; 5-4; 9-5) = \min(0; 1; 4) = 0.$$

Той факт, що $L_1 = E_1 = 0$ підтверджує правильність розрахунків. Якщо $L_1 \neq 0$ , то слід шукати помилку.

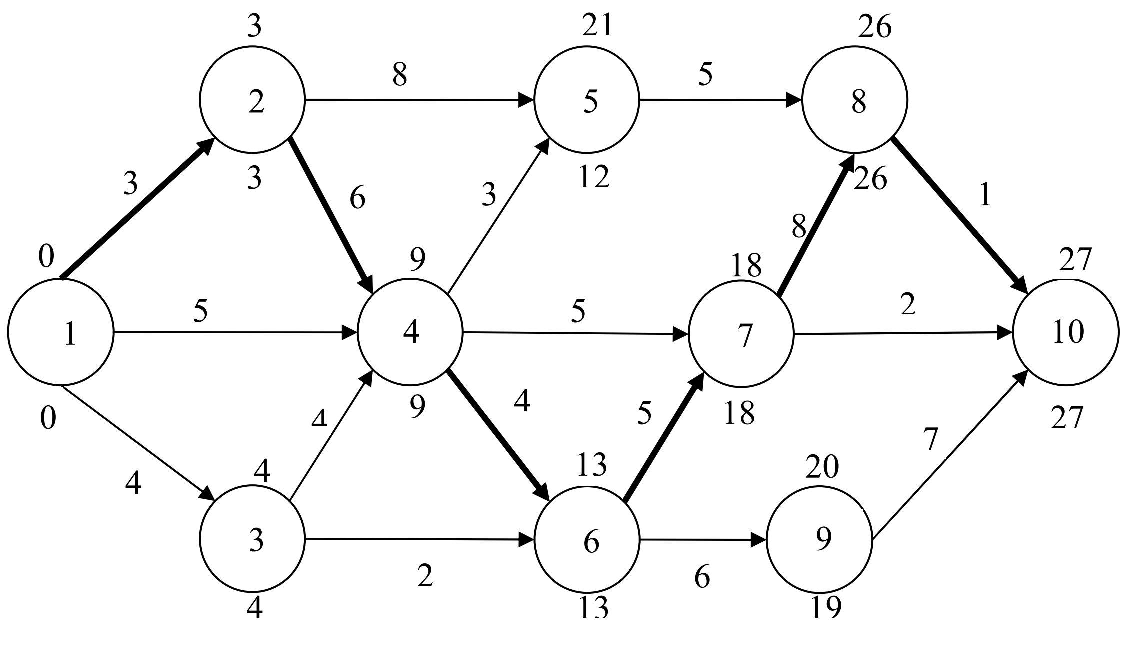



*Рис. 7.2*

Критичним шляхом даного сітьового графіка є ланцюг робіт 1 – 2 – 4 – 6– 7 – 8 – 10. Сумарний час виконання робіт даного шляху є найбільшим:

$t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{67}+t_{78}+t_{8,10}=3+6+4+5+8+1=27$.

Роботи 1 – 4, 4 – 7 та 7 – 10 хоч і сполучають події, для яких ранній і пізній терміни настання співпадають, але для них не виконана умова (7.3):

$L_4-E_1-t_{14}=9-0-5=4\neq 0$,

$L_7-E_4-t_{47}=18-9-5=4\neq 0$,

$L_{10}-E_7-t_{7,10}=27-18-2=7\neq 0$.

Результати аналізу сітьового графіка наведено на рис. 7.2.

Знайдемо повні резерви часу для робіт, що не належать критичному шляху за формулою (7.4).

$t_{13}^{П}=L_3-E_1-t_{13}=5-0-4=1$,

$t_{14}^{П}=L_4-E_1-t_{14}=9-0-5=4$,

$t_{25}^{П}=L_5-E_2-t_{25}=21-3-8=10$,

$t_{34}^{П}=L_4-E_3-t_{34}=9-4-4=1$,

$t_{36}^{П}=L_6-E_3-t_{36}=13-4-2=7$,

$t_{45}^{П}=L_5-E_4-t_{45}=21-9-3=9$,

$t_{47}^{П}=L_7-E_4-t_{47}=18-9-5=4$,

$t_{58}^{П}=L_8-E_5-t_{58}=26-12-5=9$,

$t_{69}^{П}=L_9-E_6-t_{69}=20-13-6=1$,

$t_{7,10}^{П}=L_{10}-E_7-t_{7,10}=27-18-2=7$,

$t_{9,10}^{П}=L_{10}-E_9-t_{9,10}=27-19-7=1$,

Далі для цих робіт обчислюємо вільні та незалежні резерви часу за формулами (7.5) та (7.6) відповідно.

$t_{13}^{В}=L_3-L_1-t_{13}=5-0-4=1$, $t_{13}^{Н}=E_3-L_1-t_{13}=4-0-4=0$,

$t_{14}^{В}=L_4-L_1-t_{14}=9-0-5=4$, $t_{14}^{Н}=E_4-L_1-t_{14}=9-0-5=4$,

$t_{25}^{В}=L_5-L_2-t_{25}=21-3-8=10$, $t_{25}^{Н}=E_5-L_2-t_{25}=12-3-8=1$,

$t_{34}^{В}=L_4-L_3-t_{34}=9-5-4=0$, $t_{34}^{Н}=E_4-L_3-t_{34}=9-5-4=0$,

$t_{36}^{В}=L_6-L_3-t_{36}=13-5-2=6$, $t_{36}^{Н}=E_6-L_3-t_{36}=13-5-2=6$,

$t_{45}^{В}=L_5-L_4-t_{45}=21-9-3=9$, $t_{45}^{Н}=E_5-L_4-t_{45}=12-9-3=0$,

$t_{47}^{В}=L_7-L_4-t_{47}=18-9-5=4$, $t_{47}^{Н}=E_7-L_4-t_{47}=18-9-5=4$,

$t_{58}^{В}=L_8-L_5-t_{58}=26-21-5=0$, $t_{58}^{Н}=E_8-L_5-t_{58}=26-21-5=0$,

$t_{69}^{В}=L_9-L_6-t_{69}=20-13-6=1$, $t_{69}^{Н}=E_9-L_6-t_{69}=19-13-6=0$,

$t_{7,10}^{В}=L_{10}-L_7-t_{7,10}=27-18-2=7$, $t_{7,10}^{Н}=E_{10}-L_7-t_{7,10}=27-18-2=7$,

$t_{9,10}^{В}=L_{10}-L_9-t_{9,10}=27-20-7=0$, $t_{9,10}^{Н}=E_{10}-L_9-t_{9,10}=27-20-7=0$.

Занесемо дані по резервах часу в таблицю.

| Робота | $t^{П}$ | $t^{В}$ | $t^{Н}$ |
|---|---|---|---|
| 1-3 | 1 | 1 | 0 |
| 1-4 | 4 | 4 | 4 |
| 2-5 | 10 | 10 | 1 |
| 3-4 | 1 | 0 | 0 |
| 3-6 | 7 | 6 | 6 |
| 4-5 | 9 | 9 | 0 |
| 4-7 | 4 | 4 | 4 |
| 5-8 | 9 | 0 | 0 |
| 6-9 | 1 | 1 | 0 |
| 7-10 | 7 | 7 | 7 |
| 9-10 | 1 | 0 | 0 |

З таблиці ми бачимо, що для робіт 1 – 4, 2 – 5, 3 – 6, 4 – 7 та 7 – 10 існують резерви часу, що не залежать від термінів виконання інших робіт циклу, тому слід вжити заходів для їх ліквідації.

*Відповідь.* Критичним шляхом даного сітьового графіка є ланцюг робіт 1 – 2 – 4 – 6 – 7 – 8 – 10. Найменший термін виконання всього циклу робіт дорівнює 27 часовим одиницям. В першу чергу потрібно вжити заходів для оптимізації робіт 1 – 4, 2 – 5, 3 – 6, 4 – 7 та 7 – 10 .

**Приклад 7.2.** Провести аналіз сітьового графіка.

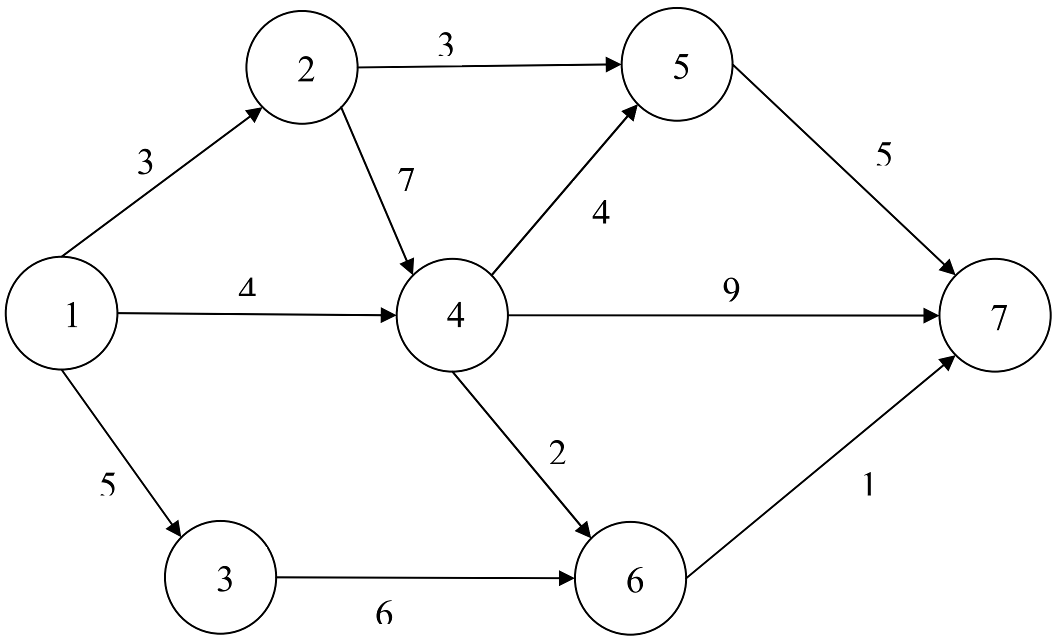



*Рис. 7.3*

*Розв'язання.* За формулами (7.1), (7.2) обчислюємо ранні та пізні терміни настання подій, після чого, знаходимо резерви часу для всіх робіт і заносимо їх в таблицю.

| Робота | $t^{П}$ | $t^{В}$ | $t^{Н}$ |
|---|---|---|---|
| **1-2** | **0** | **0** | **0** |
| 1-3 | 7 | 7 | 0 |
| 1-4 | 6 | 6 | 6 |
| **2-4** | **0** | **0** | **0** |
| 2-5 | 8 | 8 | 8 |
| 3-6 | 7 | 0 | – |
| **4-5** | **0** | **0** | **0** |
| 4-6 | 6 | 6 | 0 |
| **4-7** | **0** | **0** | **0** |
| **5-7** | **0** | **0** | **0** |
| 6-7 | 6 | 0 | 0 |

*Зауваження 7.3.* Для роботи 3 – 6 вільний резерв часу від'ємний:

$$t_{36}^{H} = E_6 - E_3 - t_{36} = 12 - 6 - 12 = -6,$$

тому в таблиці ставимо «– ».

З таблиці видно, що до критичних належать роботи 1 – 2, 2 – 4, 4 – 5, 4 – 7, 5 – 7, для яких повні резерви часу рівні нулю. Ми бачимо (див. рис. 7.4), що для даного циклу робіт існує два критичних шляхи: 1 – 2 – 4 – 5 – 7 та 1 – 2 – 4 – 7, а роботи 1 – 4 та 2 – 5 слід оптимізувати в першу чергу.

*Відповідь.* Даний сітьовий графік має два критичні шляхи: 1 – 2 – 4 – 5 – 7 та 1 – 2 – 4 – 7. Найменший термін виконання всього циклу робіт дорівнює 19 часовим одиницям. В першу чергу потрібно вжити заходів для оптимізації робіт 1 – 4, 2 – 5 та 3 – 6.

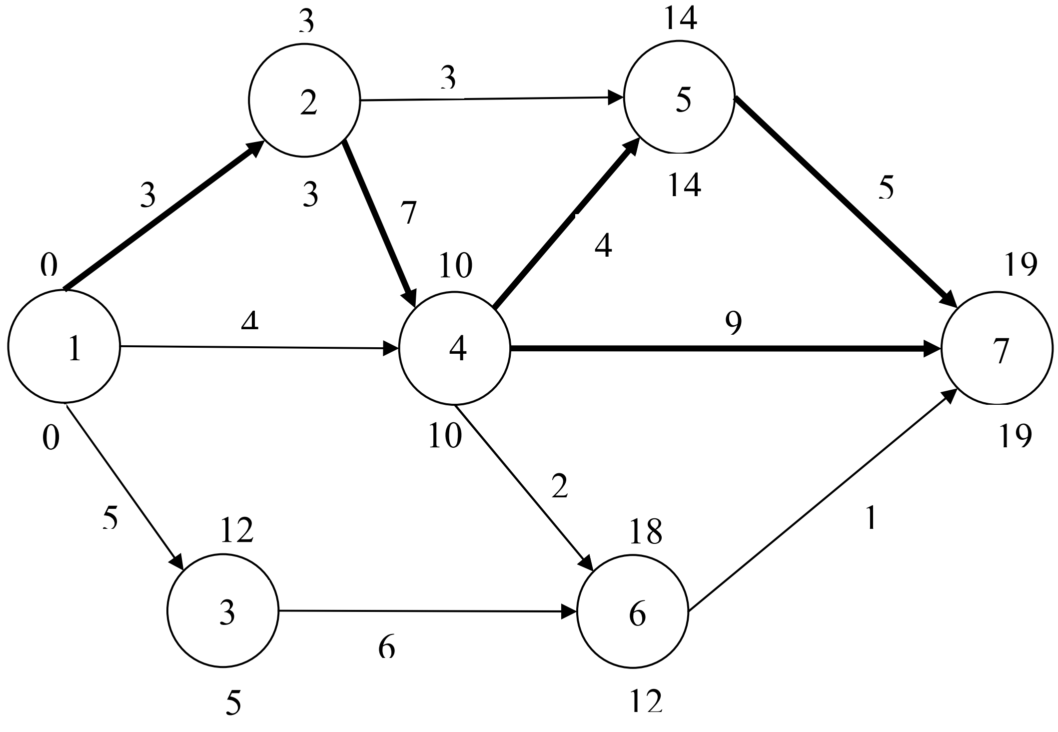
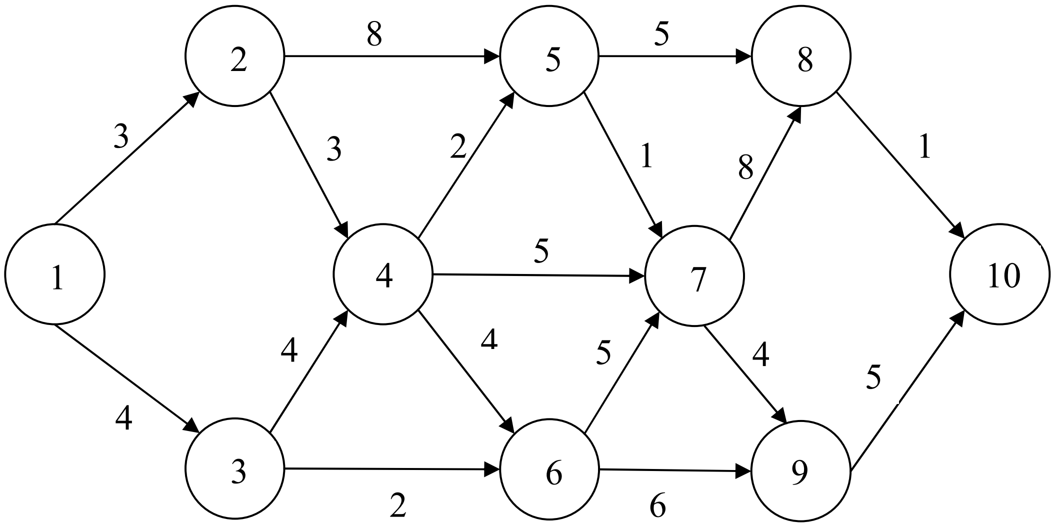


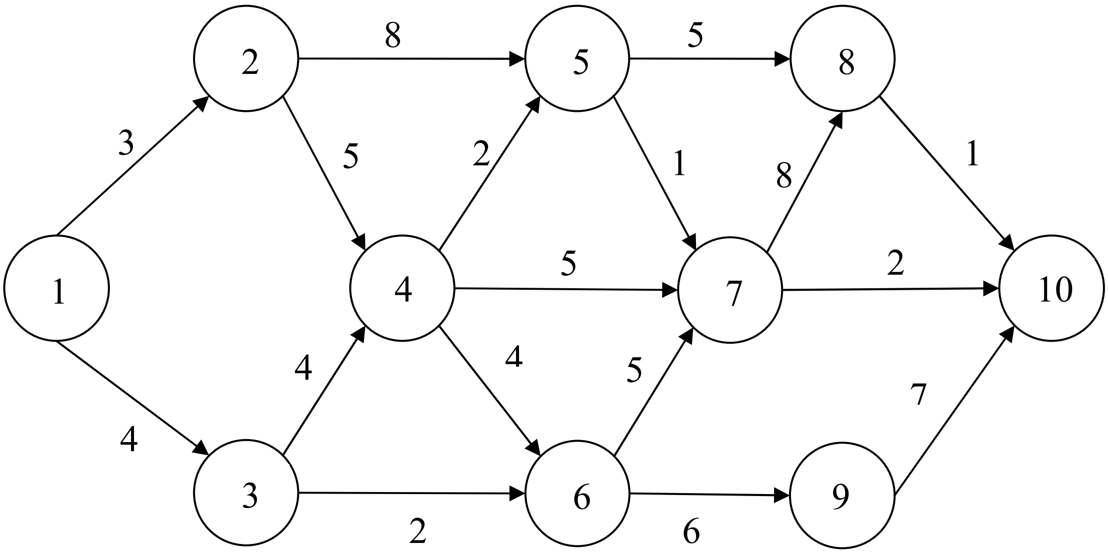

*Рис. 7.4*

**Завдання 7.** Провести аналіз сітьового графіка.

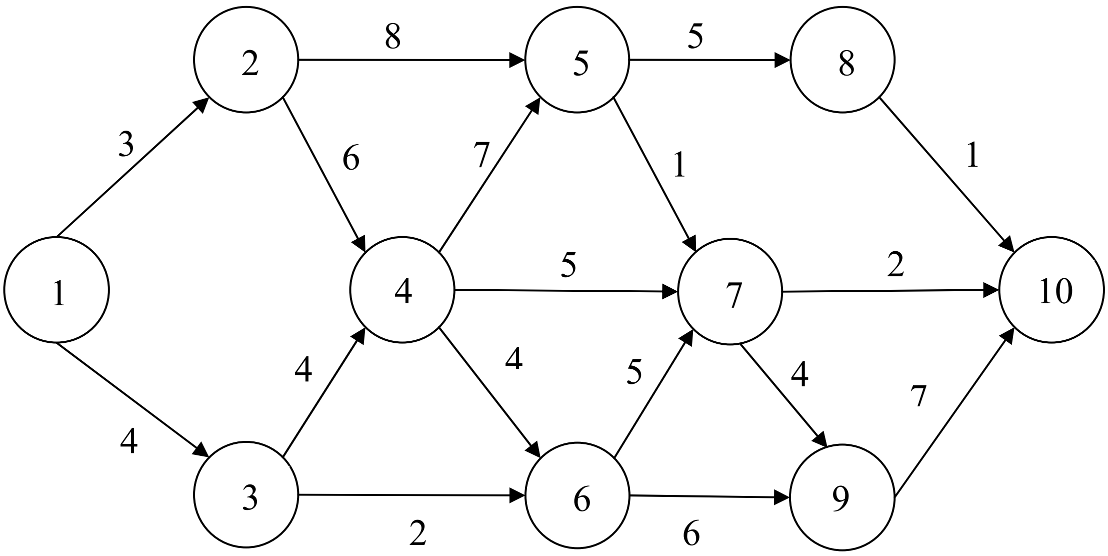
**Варіант 1**



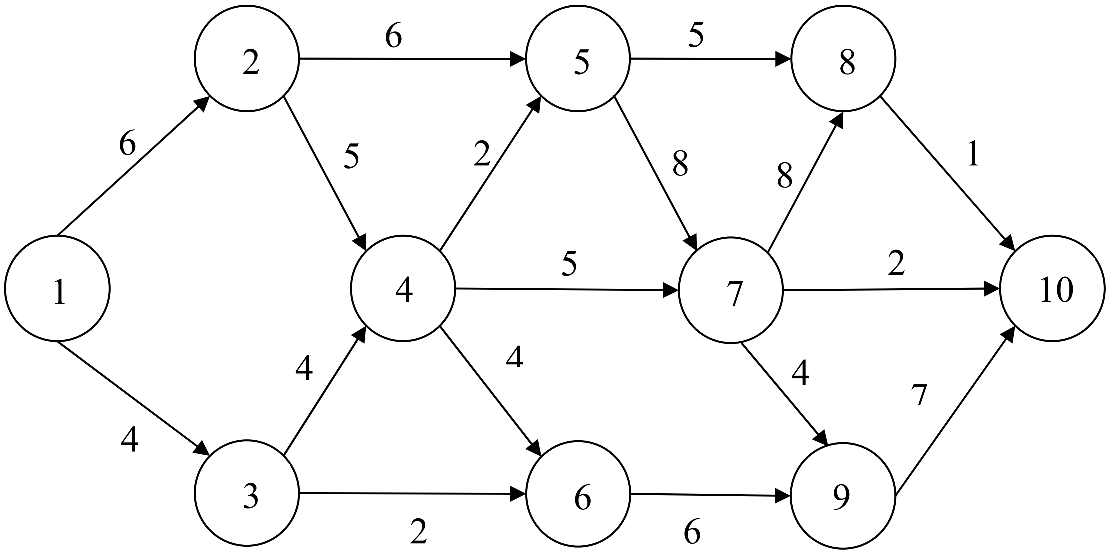
**Варіант 2**



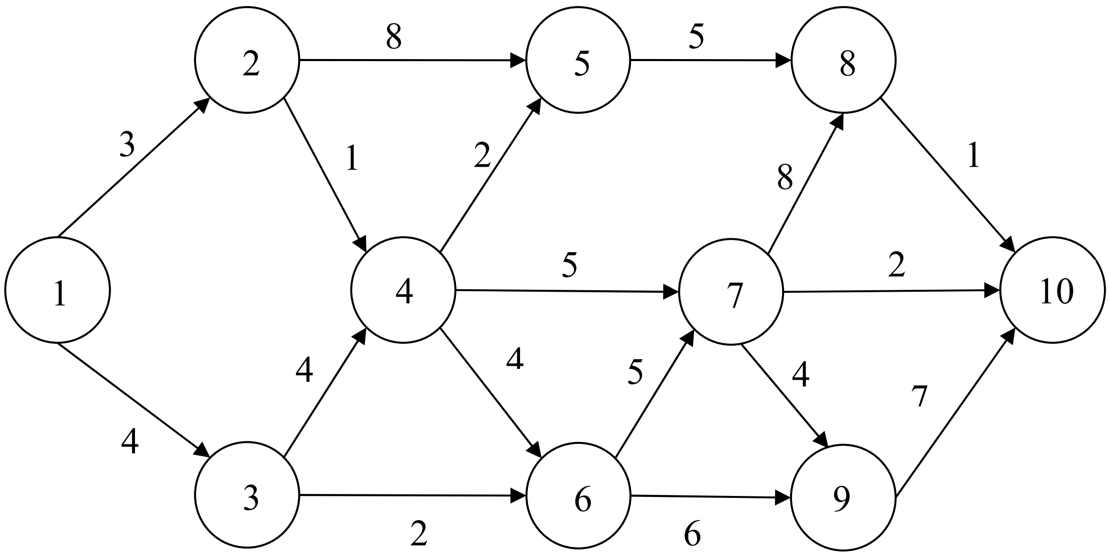
**Варіант 3**



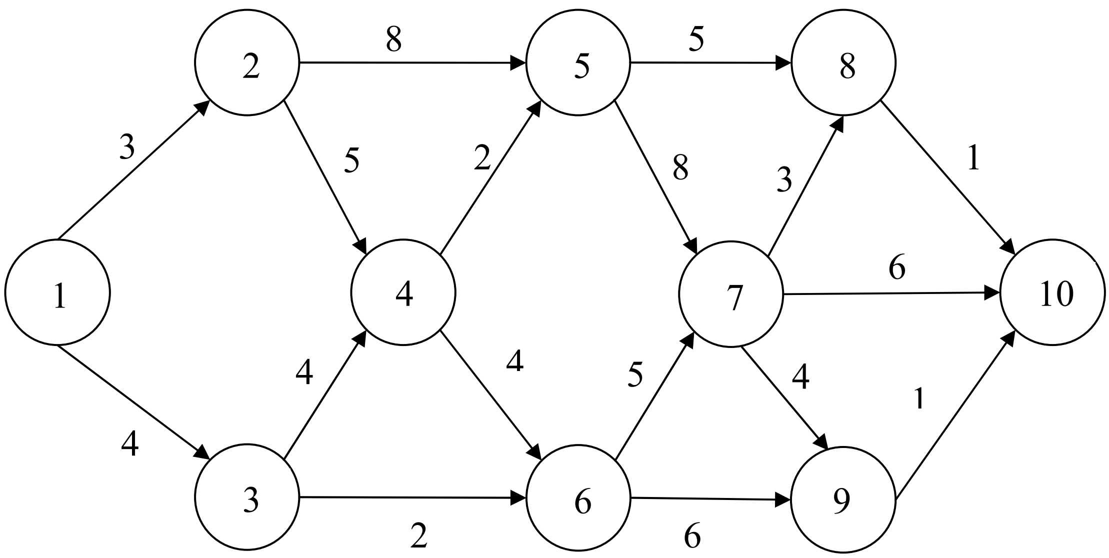
**Варіант 4**



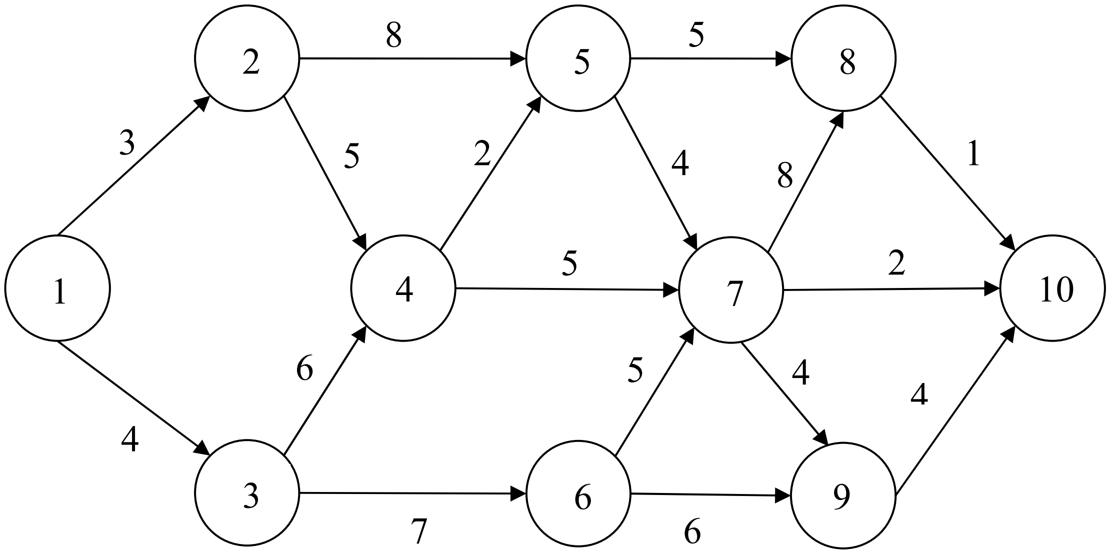

**Варіант 5**



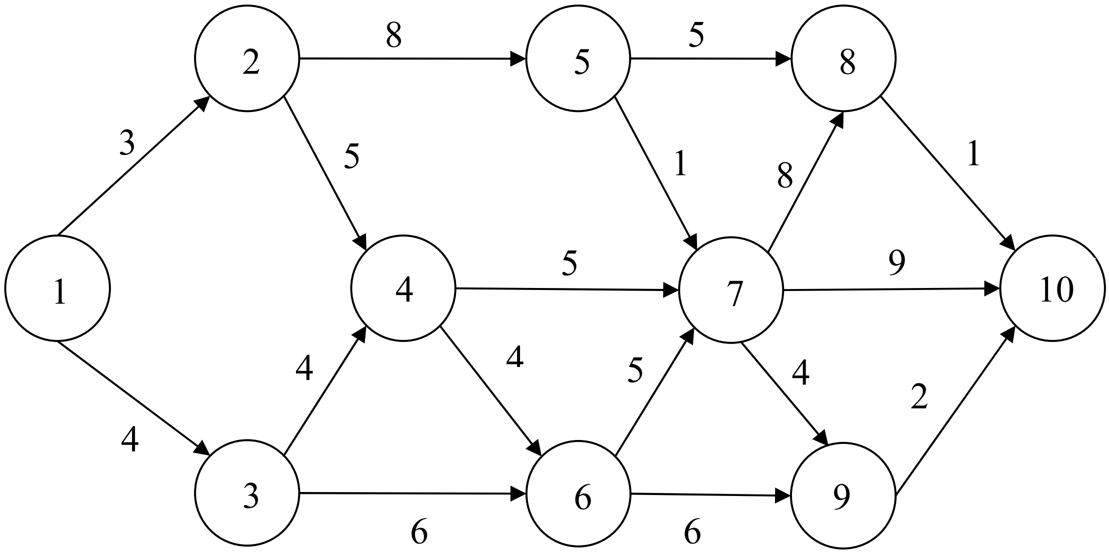

**Варіант 6**



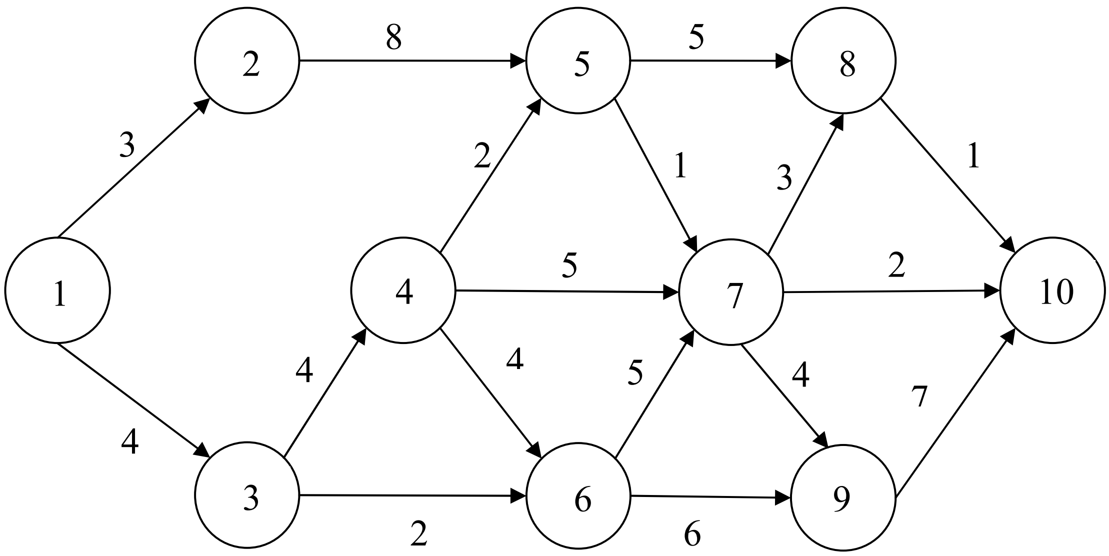
**Варіант 7**



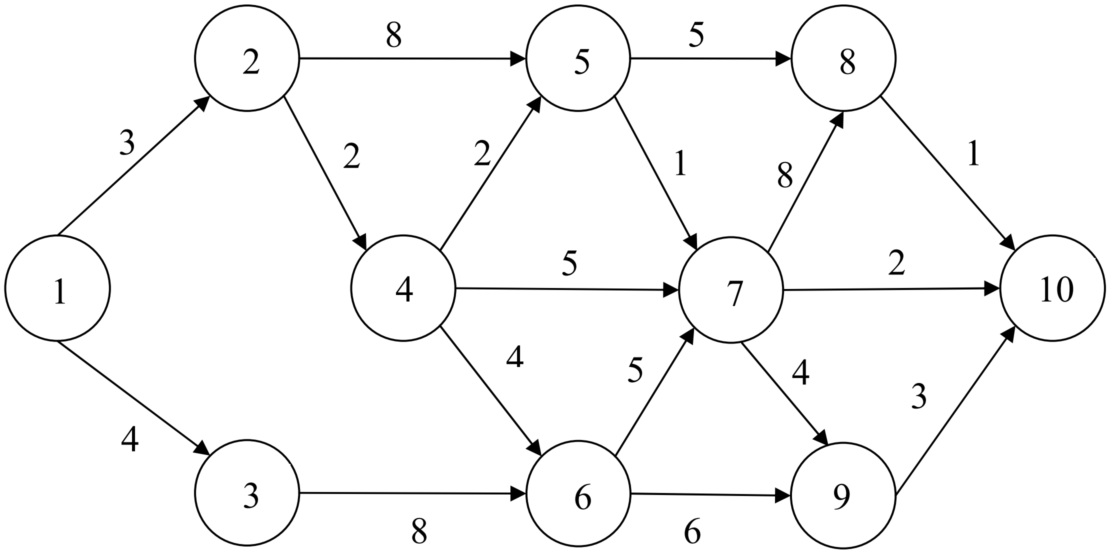

**Варіант 8**



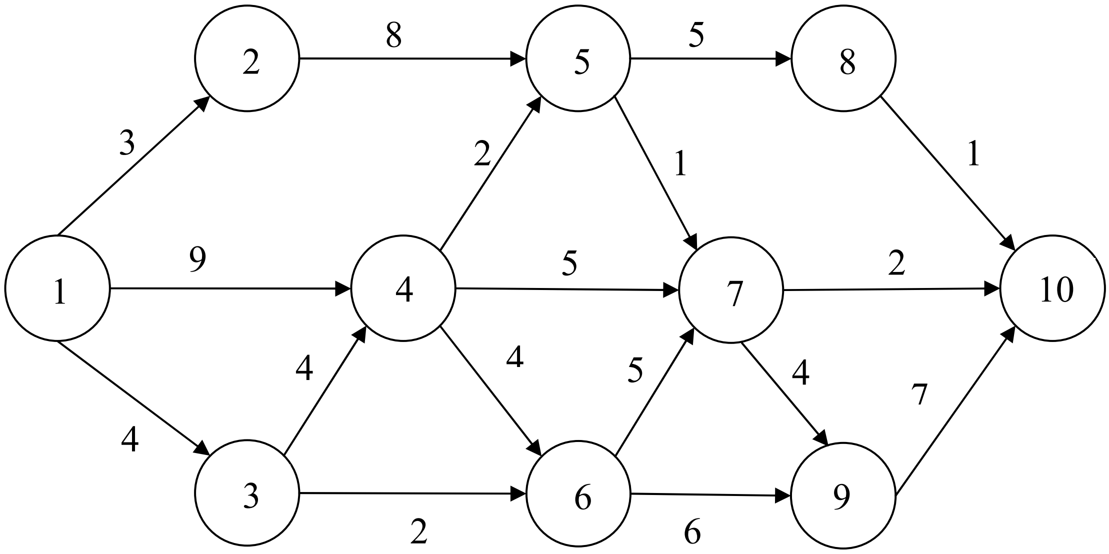

**Варіант 9**



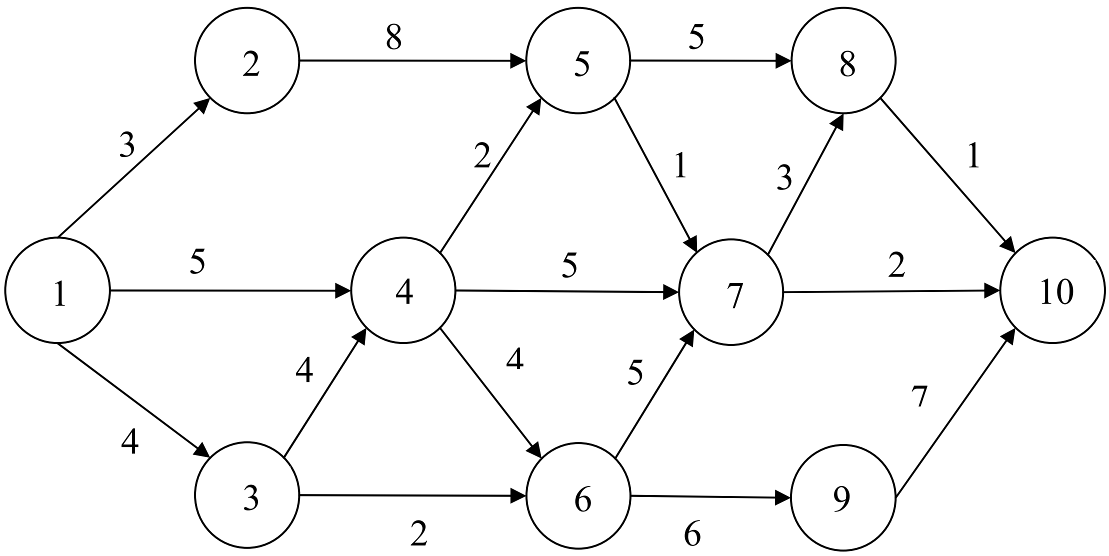
**Варіант 10**



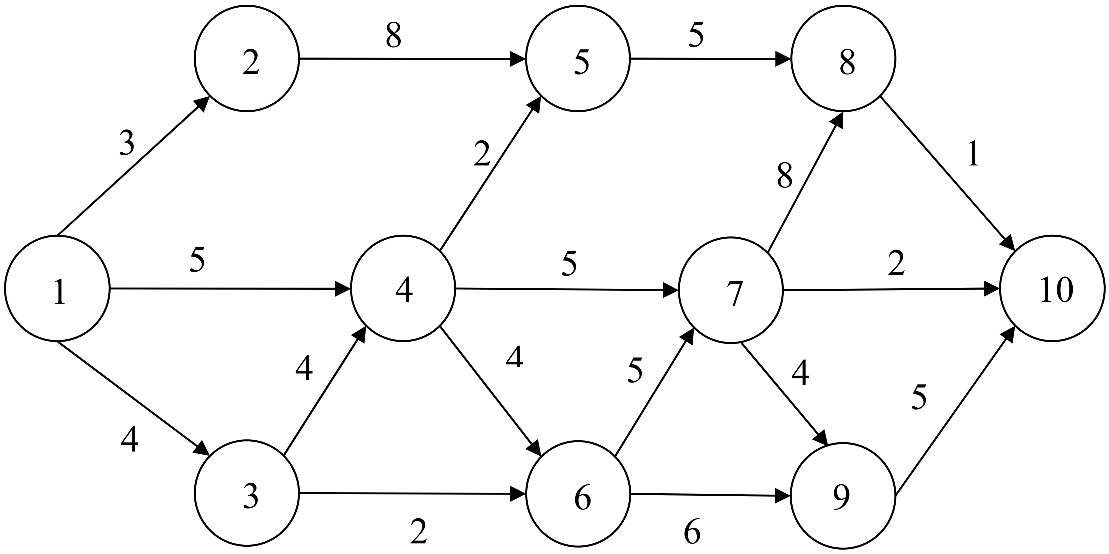

**Варіант 11**



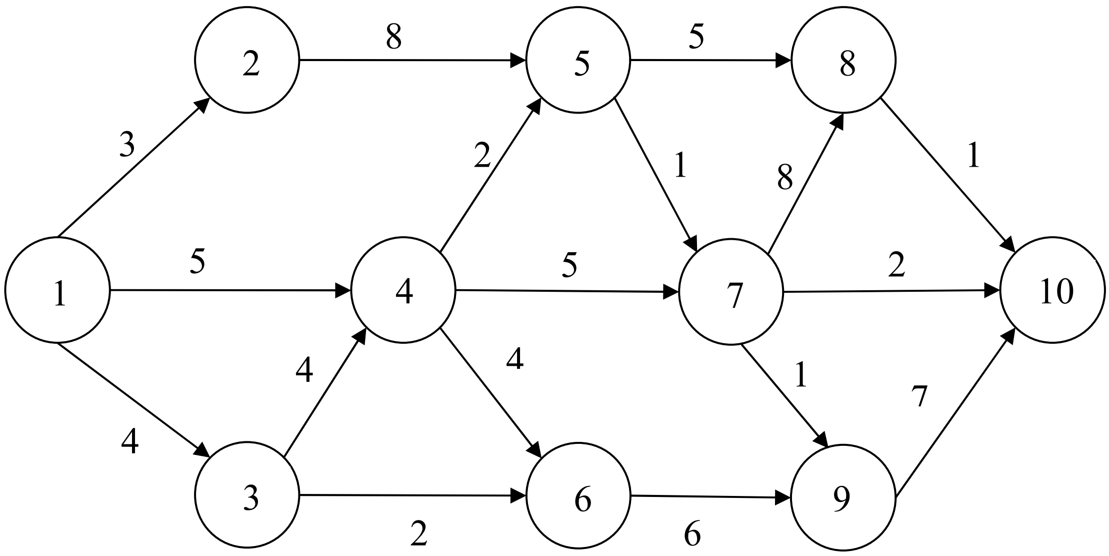

**Варіант 12**



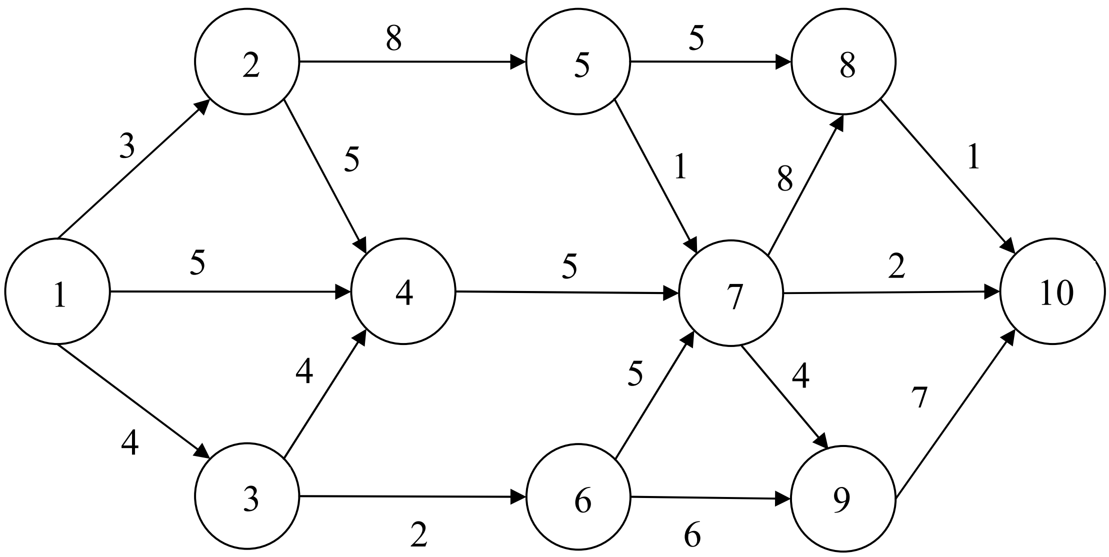
**Варіант 13**



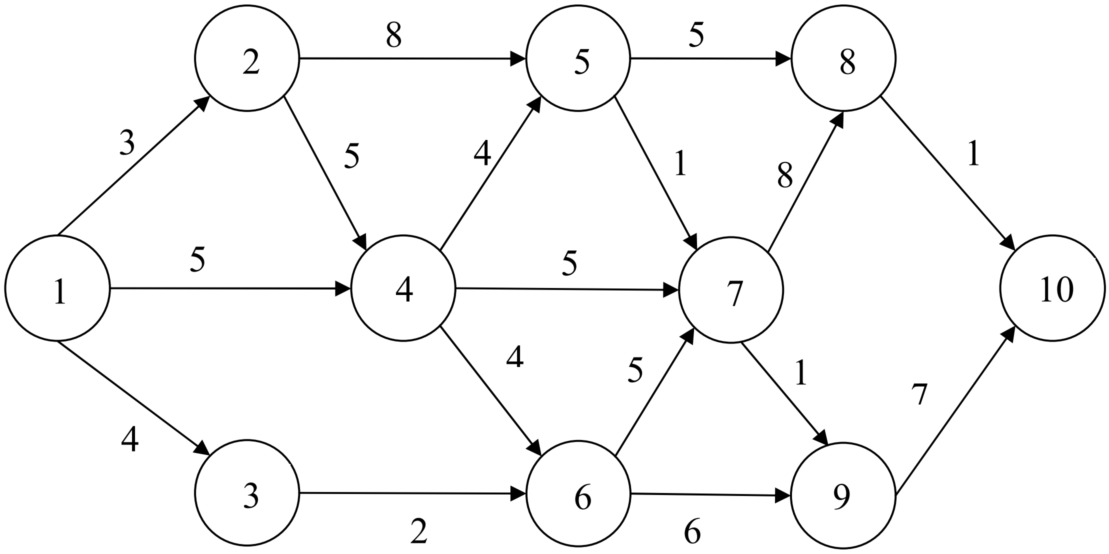

**Варіант 14**



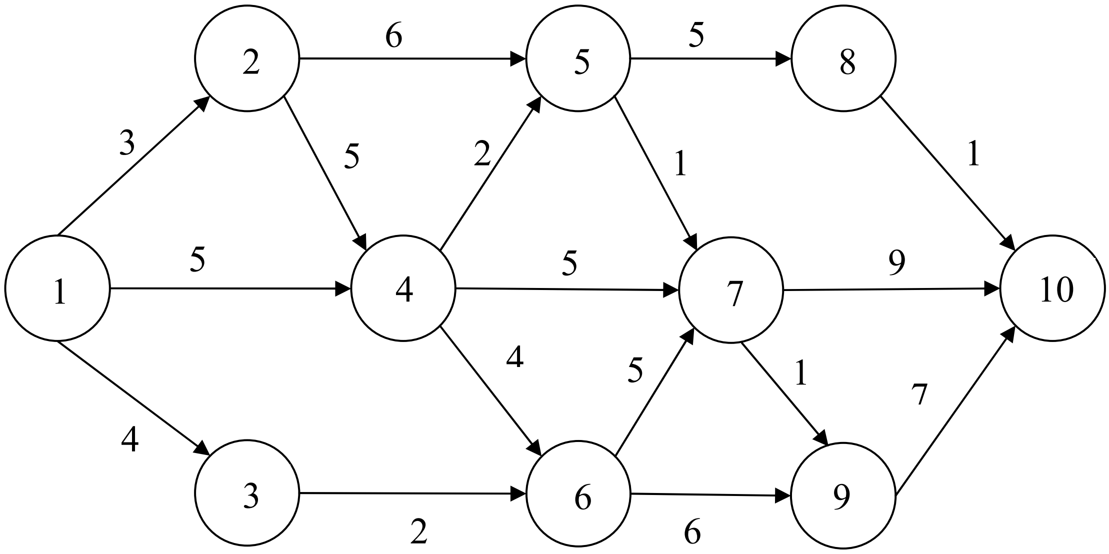

**Варіант 15**



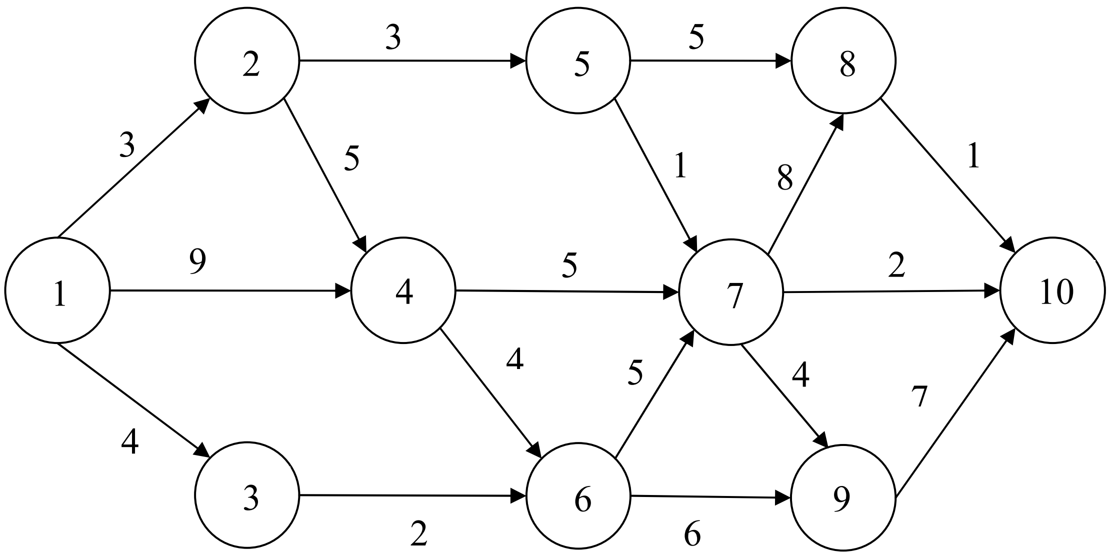
**Варіант 16**



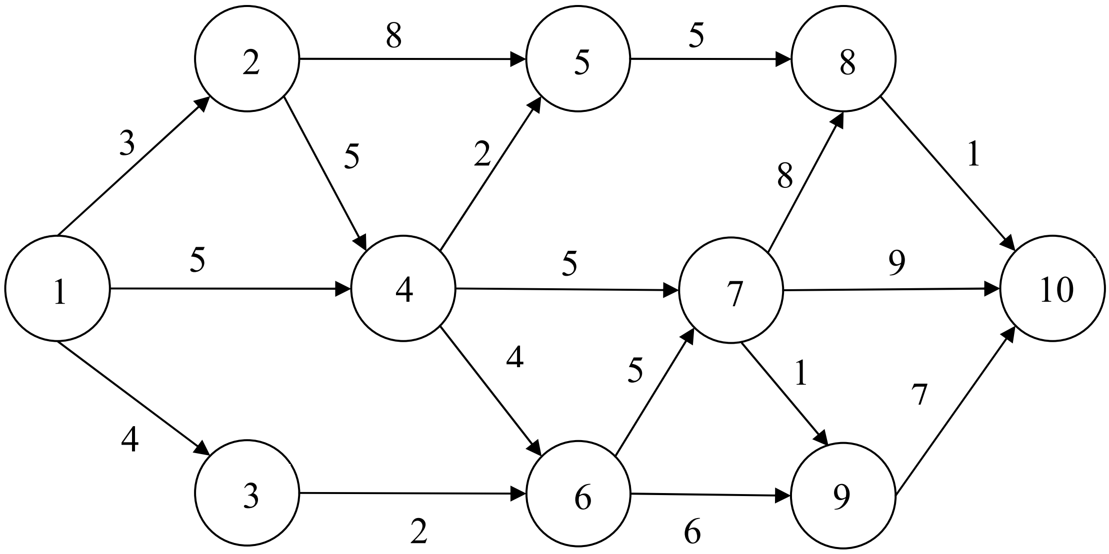

**Варіант 17**



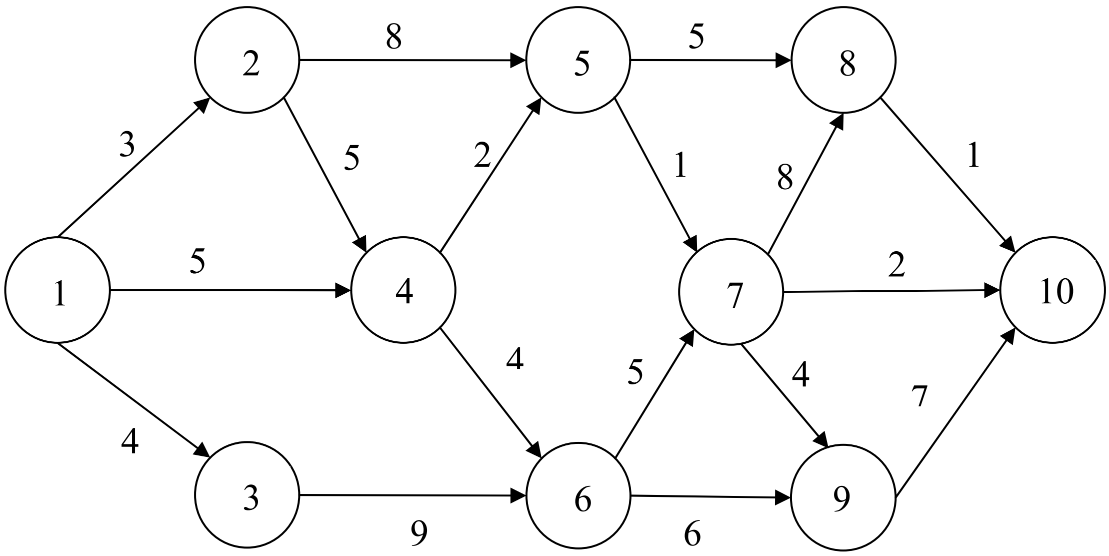

**Варіант 18**



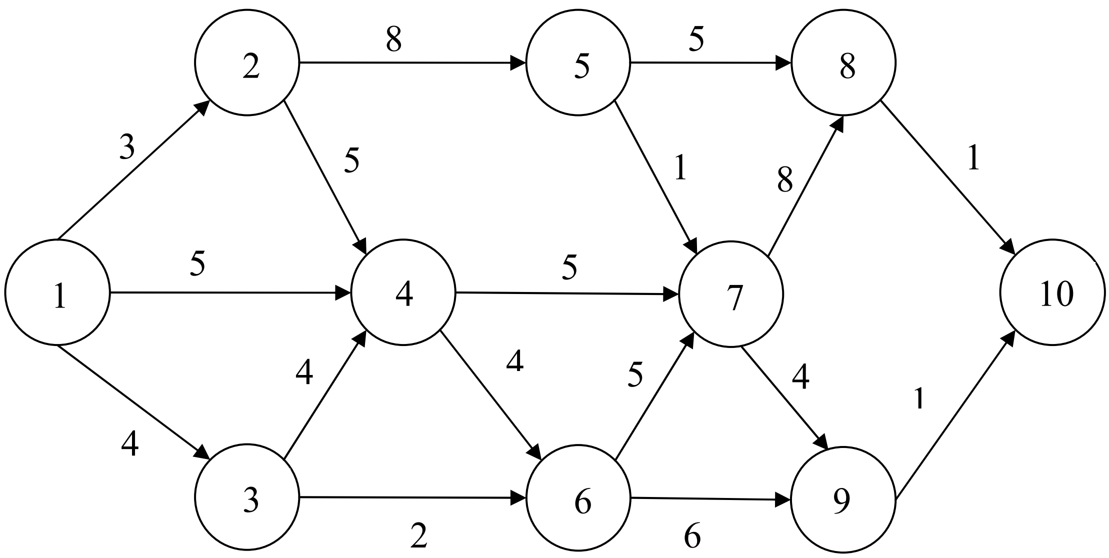
## Варіант 19



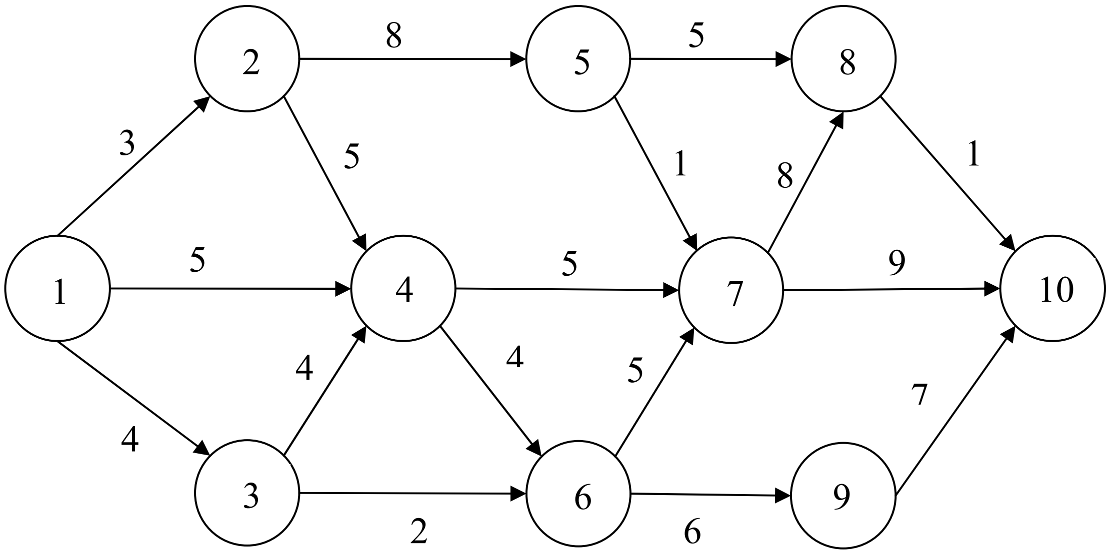

## Варіант 20



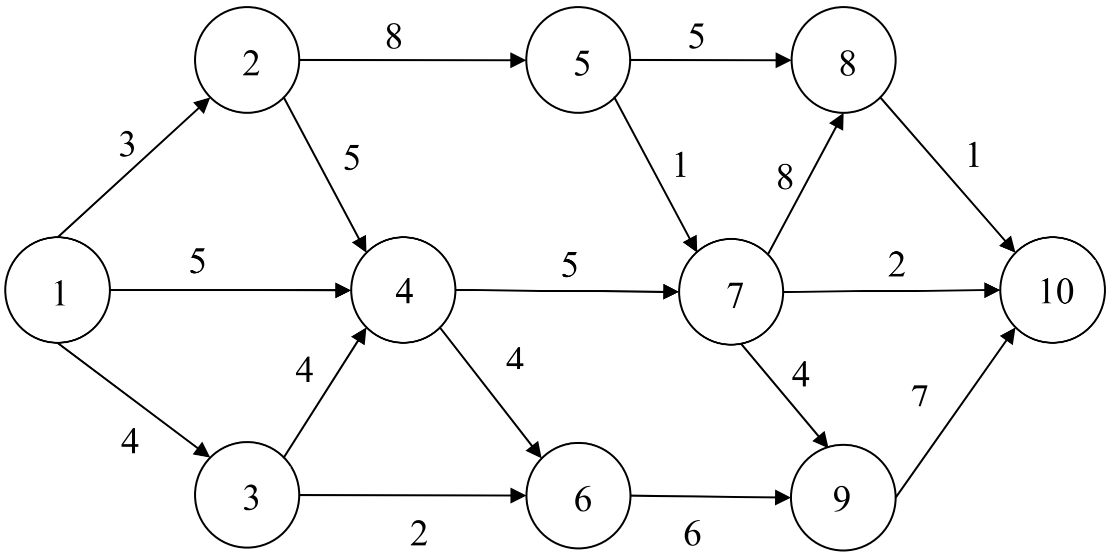

## Варіант 21



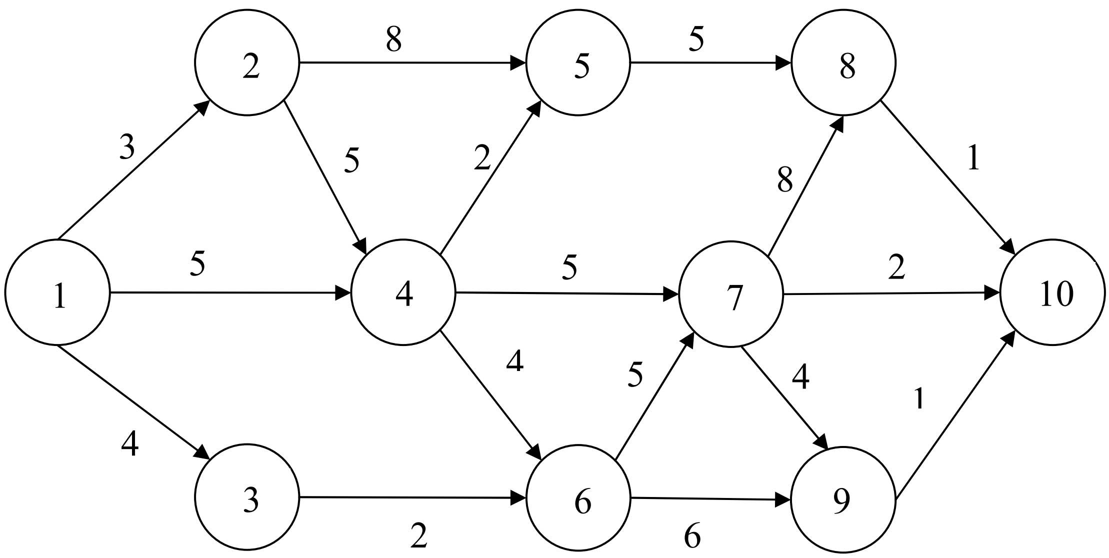
**Варіант 22**



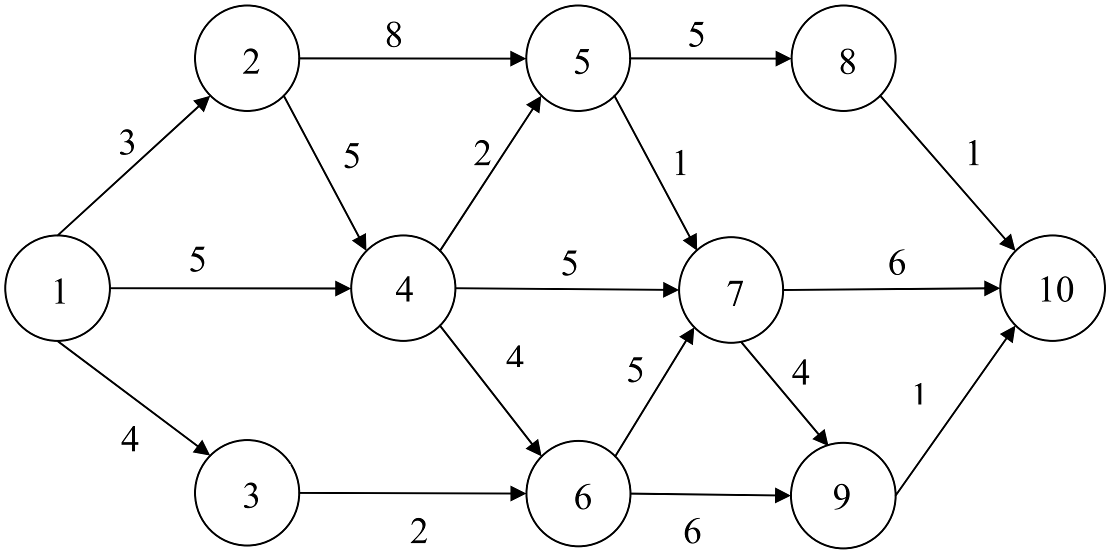

**Варіант 23**



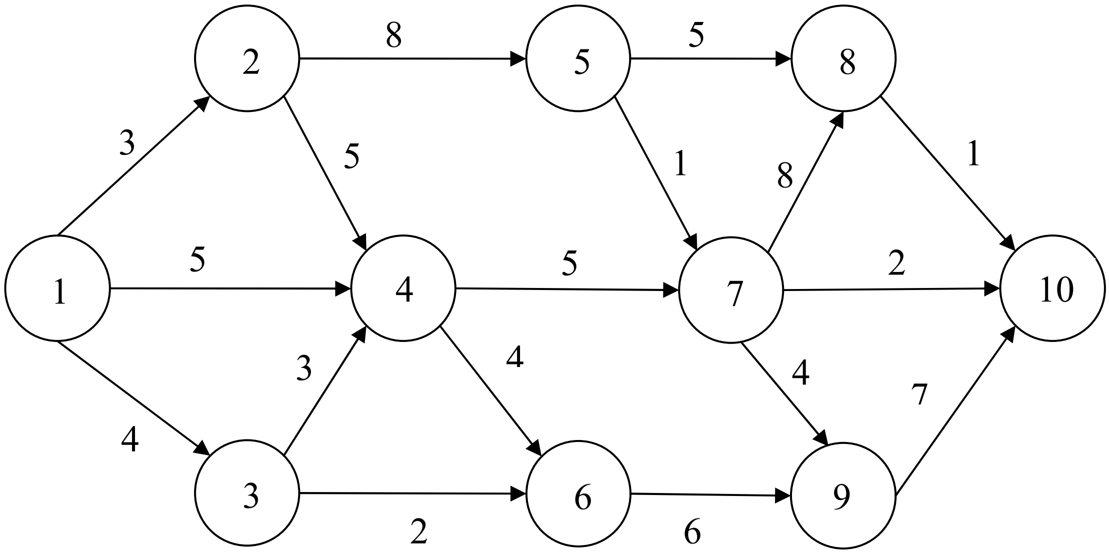

**Варіант 24**



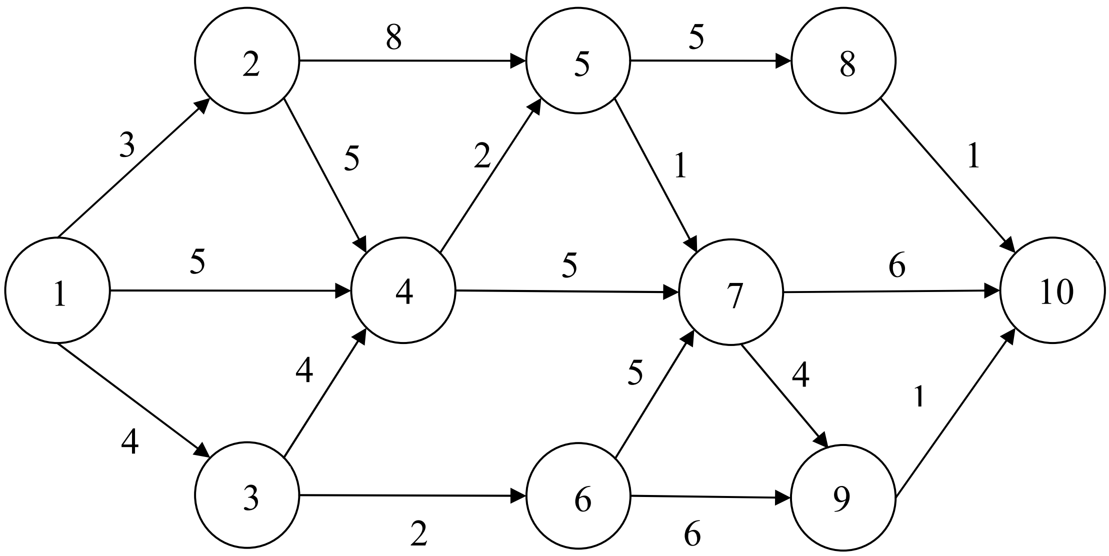
**Варіант 25**



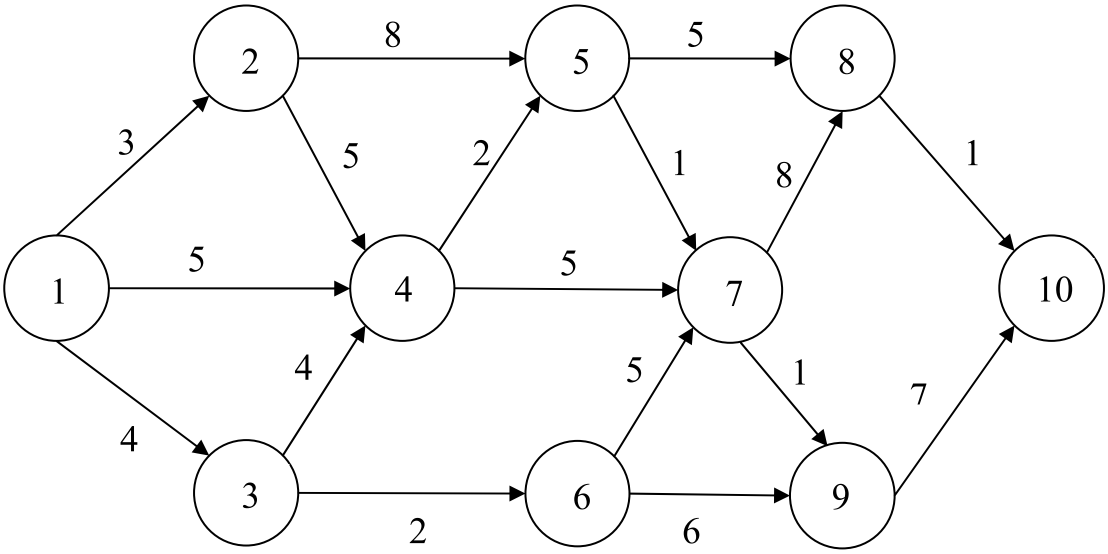
**Варіант 26**



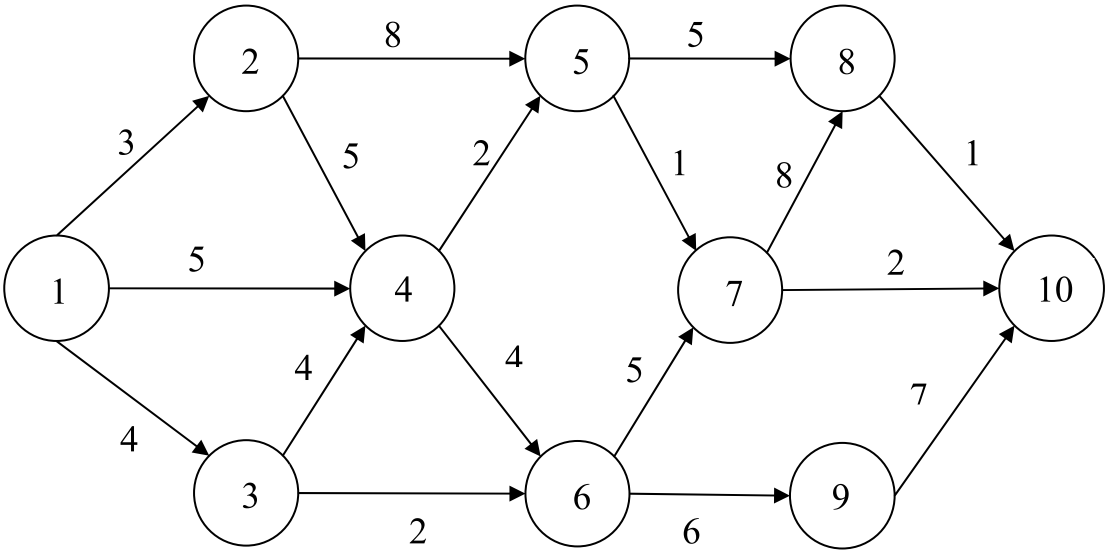
**Варіант 27**



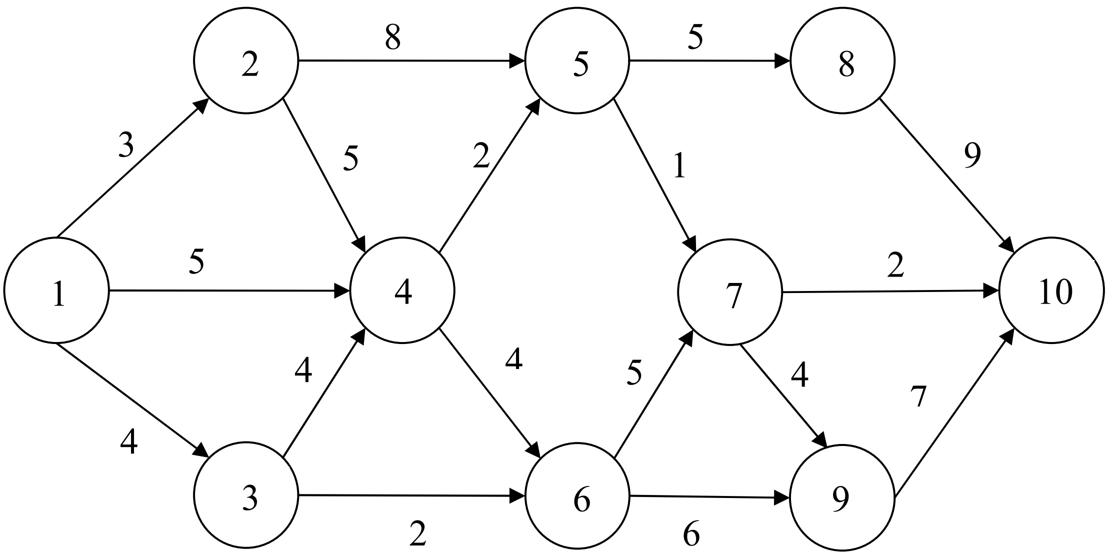
**Варіант 28**




**Варіант 29**




**Варіант 30**



# Тема 8. Елементи теорії стратегічних ігор

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

Нехай ми маємо декілька суб'єктів (гравців), кожен з яких має вибір з певної кількості можливостей, які називаються стратегіями. Одноразове використання стратегії називають ходом. У результаті використання кожним з учасників певної стратегії, вони отримують виграш (програш будемо вважати виграшем зі знаком мінус). Гра називається антагоністичною, якщо в її результаті хтось виграє, а хтось програє. Ігри, в яких виграш одних учасників дорівнює програшу інших, називають іграми з нульовою сумою.

Розглянемо гру двох учасників з нульовою сумою. Така гра однозначно задається платіжною матрицею (матрицею виграшів першого гравця).

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & B_1 & B_2 & & B_n & \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \alpha_m \\
\hline
 & \beta_1 & \beta_2 & & \beta_n & \alpha \backslash \beta
\end{array}
$$

$A_i$ – стратегії першого гравця; $B_j$ – стратегії другого гравця; $a_{ij}$ – виграш першого гравця, при умові, що він застосовує стратегію $A_i$, а другий гравець – стратегію $B_j$.

*Зауваження 8.1.* Матриця виграшів другого гравця – це транспонована матриця виграшів першого гравця помножена на $-1$.

Перший гравець оцінює, який мінімальний виграш він отримає при застосуванні кожної стратегії, а потім обирає ту, при якій це число буде найбільшим:

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}, \quad \alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}.$$

Відповідна стратегія називається максимінною, а число $\alpha$ – нижньою ціною гри.

Аналогічно, другий гравець для кожної своєї стратегії знаходить число, що є максимальним виграшем першого гравця, а потім з цих виграшів обирає найменший:

$$\beta_i = \max_{1 \le i \le m} a_{ij}, \quad \beta = \min_{1 \le j \le n} \beta_i = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij}.$$

Ця стратегія називається мінімаксною, а число $\beta$ – верхньою ціною гри.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то відповідне $a_{ij} = v$ називають ціною гри, клітину (*i,j*) називають сідловою точкою. Якщо сідлова точка – єдина, то кажуть, що гра може бути розв'язана в чистих стратегіях, тобто перший гравець завжди буде застосовувати стратегію $A_i$, а другий $B_j$.

Мішаною стратегією першого гравця називають

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ P_1 & P_2 & \dots & P_m \end{matrix}, \qquad P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1,$$

де $P_i$ – ймовірність використання відповідної стратегії $i$. Аналогічно записуються мішані стратегії другого гравця:

$$\begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{matrix}, \qquad Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m = 1.$$

*Зауваження 8.2.* Чиста стратегія є частковим випадком мішаної, при цьому, ймовірність її застосування дорівнює 1, а ймовірності застосування інших стратегій – 0.

***Будь-яка скінченна гра двох гравців з нульовою сумою має розв'язок у мішаних стратегіях.***

**Спрощення платіжної матриці гри**

Кажуть, що певний рядок або стовпчик є домінуючим над іншим, якщо кожен з його елементів не менший за відповідний елемент цього іншого. Оскільки для першого гравця домінуючі стратегії за будь-яких умов вигідніші за ті, над якими вони домінують, то з платіжної матриці викреслюємо рядки для яких є домінуючі. Потім викреслюємо домінуючі стовпчики, оскільки для другого гравця вони менш вигідні ніж ті, над якими вони домінують. Дану процедуру повторюємо доти, доки не отримаємо матрицю, в якій не має домінуючих рядків і стовпчиків.

**Приклад 8.1.** Перевірити гру з платіжною матрицею

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 8 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

на наявність сідлової точки та провести її спрощення.

*Розв'язання.* Спочатку перевіримо гру на наявність сідлової точки, для чого знайдемо нижню та верхню ціни гри.

При застосуванні першим гравцем стратегій $A_1$, $A_3$, $A_5$ його найменший виграш складе 2 одиниці (найменші елементи відповідних рядків). При використанні другої стратегії, найменший виграш – 3, а четвертої – 1. Найбільше з цих чисел $\alpha_2 = 3$ і є нижньою ціною гри (отже $\alpha = 3$).

Для визначення верхньої ціни гри, знаходимо найбільший виграш першого гравця в кожному стовпчику, що відповідає певній стратегії другого гравця. Із цих чисел обираємо найменше $\beta_1 = 4$. Це число і буде верхньою ціною гри ($\beta = 4$)

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 3 | 2 |
| $A_2$ | 3 | 6 | 7 | 5 | 8 | 4 | 3 |
| $A_3$ | 2 | 6 | 5 | 6 | 7 | 4 | 2 |
| $A_4$ | 1 | 3 | 8 | 2 | 5 | 6 | 1 |
| $A_5$ | 4 | 2 | 5 | 6 | 8 | 5 | 2 |
| $\beta_j$ | 4 | 6 | 8 | 6 | 8 | 6 | 3 / 4 |

Гра сідлової  точки не має, тому перейдемо до спрощення платіжної матриці. Другий  рядок домінує над першим, тобто друга стратегія є більш вигідною за першу, незалежно від того, яку стратегію обере другий гравець, а значить першу стратегію першого гравця викреслюємо. Більше домінуючих рядків немає. Переходимо до стратегій другого  гравця. Третій, четвертий, п’ятий та шостий стовпчики домінують над першим, тому їх викреслюємо

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 3 |
| $A_2$ | 3 | 6 | 7 | 5 | 8 | 4 |
| $A_3$ | 2 | 6 | 5 | 6 | 7 | 4 |
| $A_4$ | 1 | 3 | 8 | 2 | 5 | 6 |
| $A_5$ | 4 | 2 | 5 | 6 | 8 | 5 |

Тепер ми бачимо, що другий рядок домінує над третім та четвертим, які і викреслюємо

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_2$ | 3 | 6 |
| $A_3$ | 2 | 6 |
| $A_4$ | 1 | 3 |
| $A_5$ | 4 | 2 |

Подальше спрощення неможливе, оскільки немає домінуючих рядків і стовпчиків.

*Відповідь.* Нижня ціна гри – 3, верхня ціна гри – 4. Гра сідлової  точки не має. Спрощена матриця гри

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_2$ | 3 | 6 |
| $A_5$ | 4 | 2 |

### Розв’язування ігор 2×2

Розглянемо гру двох учасників, кожен з яких має дві стратегії. Метод її розв’язання базується на твердженні:

***якщо один з гравців застосовує свою оптимальну стратегію, то ціна гри не залежить від того, яку стратегію застосовує  інший гравець.***

$$\begin{array}{c|c|c|c} & B_1 & B_2 & \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & P_1 \\ \hline A_2 & a_{21} & a_{22} & P_2 \\ \hline & Q_1 & Q_2 & \end{array}$$

Нехай перший гравець використовує свою оптимальну стратегію, а другий гравець весь час використовує стратегію $B_1$, тоді виграш першого гравця дорівнює

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = v.$$

Тепер нехай другий гравець завжди використовує стратегію $B_2$, тоді виграш першого гравця дорівнює

$$a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = v,$$

крім того сума ймовірностей

$$P_1 + P_2 = 1.$$

Отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}P_1 + a_{21}P_2 = v \\ a_{12}P_1 + a_{22}P_2 = v. \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \tag{8.1}$$

Аналогічно, для визначення оптимальної стратегії другого гравця отримаємо систему

$$\begin{cases} a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 = v \\ a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 = v. \\ Q_1 + Q_2 = 1 \end{cases} \tag{8.2}$$

**Приклад 8.2.** Знайти розв'язок у мішаних стратегіях гри з прикладу 8.1.

*Розв'язання*. Розв'язуючи приклад 8.1 ми спростили платіжну матрицю до такої:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_2$ | 3 | 6 |
| $A_5$ | 4 | 2 |

Для знаходження оптимальної стратегії першого гравця розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 3P_2 + 4P_5 = v \\ 6P_2 + 3P_5 = v \\ P_2 + P_5 = 1 \end{cases}$$

Оскільки праві частини перших двох рівнянь рівні, то прирівняємо їх ліві частини:

$$3P_2 + 4P_5 = 6P_2 + 2P_5.$$

Звідки маємо $P_5 = \frac{3}{2}P_2$. Враховуючи це, із третього рівняння отримуємо $P_2 = \frac{2}{5}$. Тоді $P_5 = \frac{3}{5}$. Для знаходження $v$ підставимо значення $P_2$ та $P_5$ в перше або друге рівняння. $v = \frac{18}{5} = 3{,}6$ одиниць.

Перший гравець повинен застосовувати стратегію $A_2$ з імовірністю $P_2 = \frac{2}{5}$, стратегію $A_5$ з імовірністю $P_5 = \frac{3}{5}$, при цьому його середній виграш складе 3,6 умовних одиниць.

Для знаходження оптимальної стратегії другого гравця маємо систему

$$\begin{cases} 3Q_1 + 6Q_2 = v \\ 4Q_1 + 2Q_2 = v \\ Q_1 + Q_2 = 1 \end{cases}$$

розв'язавши яку, отримаємо $Q_1 = \frac{4}{5}, Q_2 = \frac{1}{5}$. Другий гравець повинен застосовувати стратегію $B_1$ з імовірністю $Q_1 = \frac{4}{5}$, а стратегію $B_2$ з імовірністю $Q_2 = \frac{1}{5}$. Зазначимо, що знаходити ціну гри $v$ не має сенсу, оскільки вона була знайдена при розв'язанні попередньої системи.

*Відповідь.* Перший гравець повинен застосовувати стратегію $A_2$ з імовірністю $P_2 = \frac{2}{5}$, стратегію $A_5$ з імовірністю $P_5 = \frac{3}{5}$. Другий гравець повинен застосовувати стратегію $B_1$ з імовірністю $Q_1 = \frac{4}{5}$, а стратегію $B_2$ з імовірністю $Q_2 = \frac{1}{5}$. Перший гравець в середньому виграє 3,6 умовних одиниць.

## Графічне розв'язування ігор 2×*n* та *m*×2

У випадках, коли один з гравців має в своєму розпорядженні лише дві стратегії, розв'язок гри можна знайти графічно.

Припустимо, що це перший гравець.

*Алгоритм методу*

*Крок 1*

На осі ординат відкладемо виграші першого гравця при застосуванні першої стратегії, а на прямій $P = 1$ – другої.

*Крок 2*

З’єднуємо точки, що відповідають кожній стратегії другого гравця відрізками.

*Крок 3*

На ламаній лінії, що відображає мінімальні виграші першого гравця знаходимо точку $M$ з найбільшою ординатою. Ордината цієї точки і є ціна гри, а абсциса ділить відрізок $[0;1]$ у відношенні $P_2 : P_1$. Ціна гри знаходиться за формулою:

$$v = a_{1i} + P_2(a_{2i} - a_{1i}), \qquad (8.3)$$

де і номер однієї із стратегій другого гравця, якій відповідає відрізок, що проходить через точку $M$.

*Крок 4*

Оптимальну стратегію другого гравця знаходимо з умови, що він використовує лише ті дві стратегії, для яких відповідні відрізки перетинаються в точці $M$, тобто його оптимальна стратегія є розв’язком гри 2×2.

Графічне розв’язання гри 2×$n$ зображено на рис.8.1.

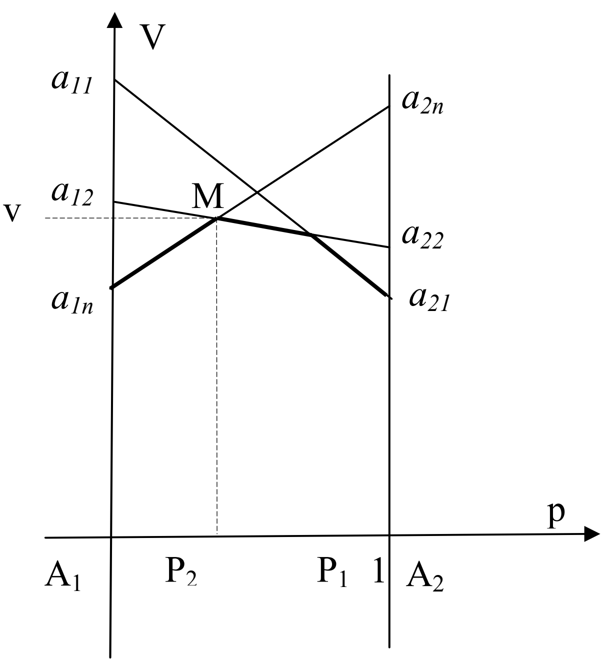



*Рис. 8.1.* Графічне розв’язання гри 2×$n$.

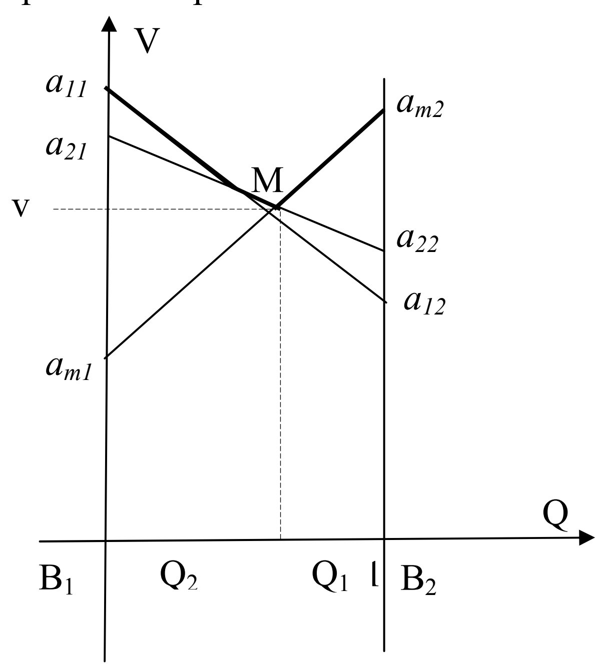



*Рис. 8.2.* Графічне розв’язання гри $m$×2.

У випадку, коли дві стратегії має другий гравець, розв’язання проводиться аналогічно, за винятком кроку 3. Точка $M$ – це точка з найменшою ординатою на ламаній, що відображає максимальні виграші першого гравця (див. рис. 8.2).

**Приклад 8.3.** Спростити платіжну матрицю гри та розв’язати її графічно.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Розв'язання.* Знайдемо нижню та верхню ціни гри.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 2 | 4 | 5 | 2 |
| $A_2$ | 5 | 2 | 4 | 6 | 2 |
| $A_3$ | 3 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| $A_4$ | 4 | 1 | 3 | 4 | 1 |
| $\beta_j$ | 5 | 6 | 5 | 6 | 3<br>5 |

Оскільки $\alpha = 3 \neq \beta = 5$, то гра сідлової точки не має. Переходимо до спрощення платіжної матриці. Другий рядок домінує над першим та четвертим, тому стратегії $A_1$ та $A_4$ відкидаємо. Четвертий стовпчик домінує над першим, а значить відкидаємо стратегію $B_4$

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | ~~$B_4$~~ |
|---|---|---|---|---|
| ~~$A_1$~~ | ~~3~~ | ~~2~~ | ~~4~~ | ~~5~~ |
| $A_2$ | 5 | 2 | 4 | ~~6~~ |
| $A_3$ | 3 | 6 | 5 | ~~4~~ |
| ~~$A_4$~~ | ~~4~~ | ~~1~~ | ~~3~~ | ~~4~~ |

Спрощена платіжна матриця не має домінуючих рядків і стовпчиків. Отримали гру 2×3.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_2$ | 5 | 2 | 4 |
| $A_3$ | 3 | 6 | 5 |

Після побудови (див. рис. 8.3,а), знаходимо на виділеній жирним ламаній мінімальних виграшів першого гравця точку $M$ з найбільшою ординатою. В цій точці перетинаються відрізки, що відповідають стратегіям $B_1$ та $B_2$. З рис.8.3,а видно, що при будь-яких імовірностях застосування першим гравцем своїх стратегій, для другого гравця стратегія $B_3$ є менш вигідною, оскільки його програш буде більшим, ніж при застосуванні інших стратегій. Тому стратегію $B_3$ відкидаємо. Трикутники, виділені на рис. 8.3,б, є подібними, а значить $\frac{P_3}{P_2} = \frac{5-2}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$, тобто $P_3 = P_2$. Оскільки $P_2 + P_3 = 1$, то $P_2 = P_3 = \frac{1}{2}$.

За формулою (8.3) $v = 2 + \frac{1}{2}(6-2) = 4$.

Знайдемо оптимальну стратегію другого гравця. В точці $M$ перетнулись відрізки, що відповідають стратегіям $B_1$, $B_2$. Отримуємо гру з платіжною матрицею

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_2$ | 5 | 2 |
| $A_3$ | 3 | 6 |

Запишемо систему (8.2)

$$\begin{cases} 5Q_1 + 2Q_2 = 4 \\ 3Q_1 + 6Q_2 = 4 \\ Q_1 + Q_2 = 1 \end{cases}$$

розв’язавши яку, одержуємо $Q_1 = \frac{2}{3}, Q_2 = \frac{1}{3}$.

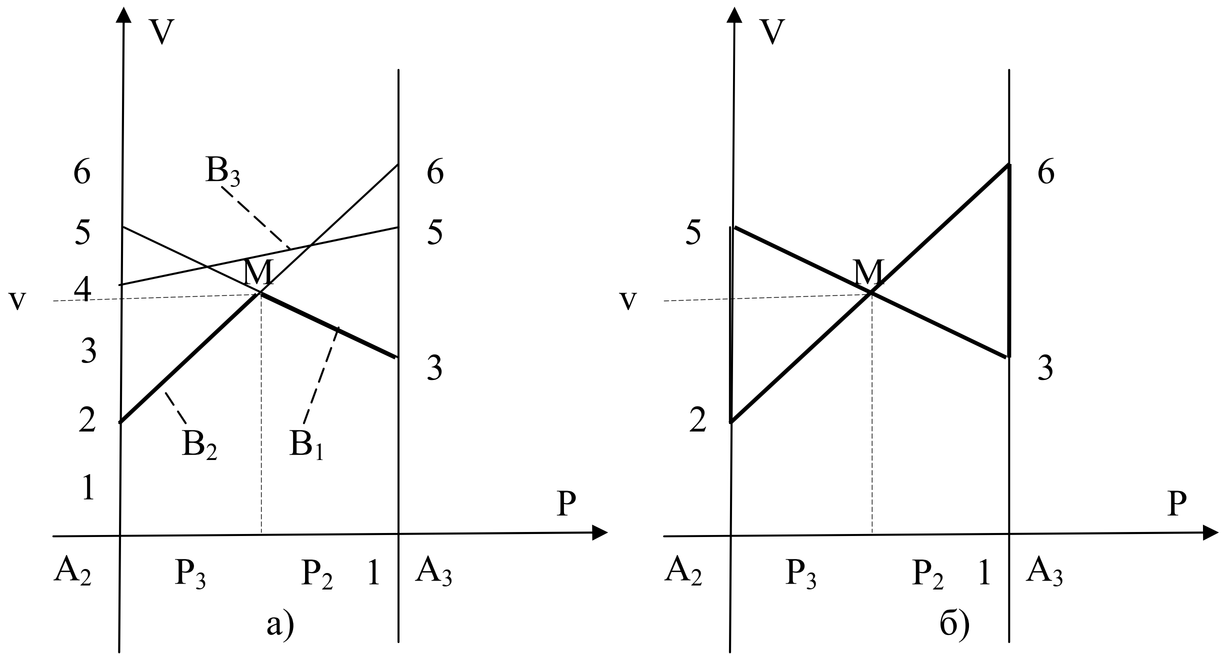



*Рис. 8.3.* Графічне розв’язання гри 2×3 (приклад 8.3)

*Відповідь.* Перший гравець повинен застосовувати стратегії $A_2$ та $A_3$ з однаковими ймовірностями $P_2 = P_3 = \frac{1}{2}$. Другий гравець повинен застосовувати стратегію $B_1$ з імовірністю $Q_1 = \frac{2}{3}$, а стратегію $B_2$ з імовірністю $Q_2 = \frac{1}{3}$. Перший гравець в середньому виграє 4 умовні одиниці.

*Зауваження 8.3.* Після визначення двох відрізків, що перетинаються в точці $M$ і відповідних їм стратегій, ми отримали гру 2×2. Тому $P_2, P_3$ ми можемо знайти, як розв’язки системи (8.1), не використовуючи властивості подібних трикутників.

**Приклад 8.4.** Спростити платіжну матрицю гри та розв’язати її графічно.

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

*Розв'язання.* Знайдемо нижню та верхню ціни гри.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 6 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| $A_2$ | 3 | 4 | 8 | 7 | 7 | 3 |
| $A_3$ | 4 | 5 | 6 | 6 | 8 | 4 |
| $A_4$ | 3 | 5 | 6 | 5 | 7 | 3 |
| $\beta_j$ | 6 | 6 | 8 | 7 | 8 | 4 / 6 |

Гра сідлової точки не має ($\alpha = 4 \neq \beta = 6$), тому перейдемо до спрощення платіжної матриці. Третій рядок домінує над четвертим, тому стратегію $A_4$ відкидаємо. Другий стовпчик домінує над першим, а третій та п'ятий над четвертим, тому відкидаємо стратегії $B_2, B_3, B_5$.

| | $B_1$ | ~~$B_2$~~ | ~~$B_3$~~ | $B_4$ | ~~$B_5$~~ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | ~~6~~ | ~~2~~ | 1 | ~~2~~ |
| $A_2$ | 3 | ~~4~~ | ~~8~~ | 7 | ~~7~~ |
| $A_3$ | 4 | ~~5~~ | ~~6~~ | 6 | ~~8~~ |
| ~~$A_4$~~ | ~~3~~ | ~~5~~ | ~~6~~ | ~~5~~ | ~~7~~ |

Спрощена платіжна матриця не має домінуючих рядків і стовпчиків. Отримали гру 3×2.

| | $B_1$ | $B_4$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 1 |
| $A_2$ | 3 | 7 |
| $A_3$ | 4 | 6 |

Побудову ламаної максимальних виграшів першого гравця показано на рис. 8.4,а. Знаходимо на ній точку $M$ з найменшою ординатою. В цій точці перетинаються відрізки, що відповідають стратегіям $A_1$ та $A_3$. Стратегію $A_2$ відкидаємо. Із подібності виділених на рис. 8.4,б трикутників маємо $\frac{Q_4}{Q_1} = \frac{6-4}{6-1} = \frac{2}{5}$, тобто $2Q_1 = 5Q_4$. З урахуванням того, що $Q_1 + Q_4 = 1$, маємо $Q_1 = \frac{5}{7}, Q_4 = \frac{2}{7}$ .

За формулою (8.3) $v = 4 + \frac{2}{7}(6-4) = 4\frac{4}{7}$.

Знайдемо оптимальну стратегію першого гравця. В точці $M$ перетнулись відрізки, що відповідають стратегіям $A_1$, $A_3$. Отримуємо гру з платіжною матрицею

|  | $B_1$ | $B_4$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 1 |
| $A_3$ | 4 | 6 |

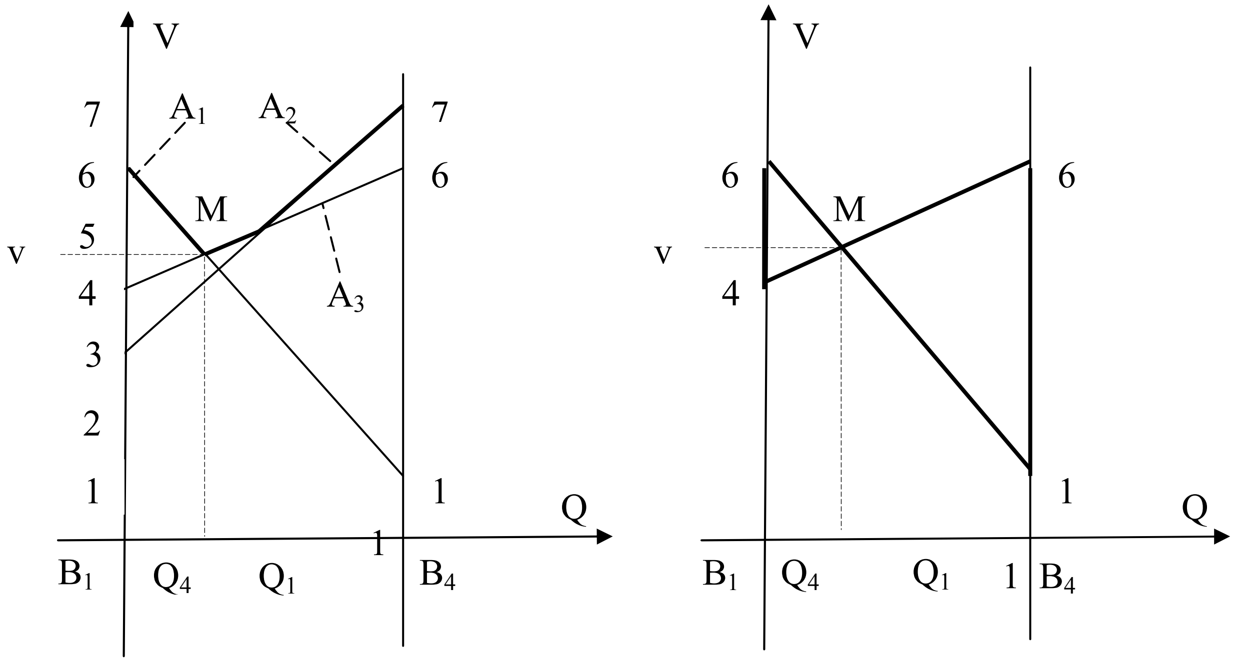



*Рис. 8.4.* Графічне розв'язання гри 3×2 (приклад 8.4)

Запишемо систему (8.1)

$$\begin{cases} 6P_1 + 4P_3 = 4\frac{4}{7} \\ P_1 + 6P_3 = 4\frac{4}{7} \\ P_1 + P_3 = 1 \end{cases},$$

розв'язавши яку, одержуємо $P_1 = \frac{2}{7}, P_3 = \frac{5}{7}$.

*Відповідь.* Перший гравець повинен застосовувати стратегію $A_1$ з імовірністю $P_1 = \frac{2}{7}$, стратегію $A_3$ з імовірністю $P_3 = \frac{5}{7}$. Другий гравець повинен застосовувати стратегію $B_1$ з імовірністю $Q_1 = \frac{5}{7}$, а стратегію $B_4$ з імовірністю $Q_4 = \frac{2}{7}$. Перший гравець в середньому виграє $4\frac{4}{7}$ умовних одиниць.

**Завдання 8.** Спростити платіжну матрицю гри і розв'язати її графічно.

**Варіант 1**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 2**

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

**Варіант 3**

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

**Варіант 4**

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**Варіант 5**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

**Варіант 6**

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 7**

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 8**

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 9**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Варіант 10**

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 11**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Варіант 12**

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Варіант 13**

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

**Варіант 14**

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

**Варіант 15**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

**Варіант 16**

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 17**

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 18**

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

**Варіант 19**

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 20**

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 21**

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**Варіант 22**

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**Варіант 23**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 24**

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 25**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіан 26**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Варіант 27**

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

**Варіант 28**

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 29**

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

**Варіант 30**

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

## Тема 9. Методи прийняття рішень в умовах невизначеності

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

У процесі управління транспортними системами часто виникають задачі пов'язані з прийняттям рішень в умові повної або часткової невизначеності. Невизначеність обумовлюється стохастичними процесами (пасажиропотоки та вантажні перевезення не є детермінованими), а також непередбачуваністю деяких факторів, таких як, наприклад, погодні умови, що суттєво впливають на терміни та якість вирішення поставлених задач.

Але невизначеність не означає, що в задачі взагалі нічого не відомо. Повинна існувати і бути сформульована проблема, що вимагає розв'язання. Припускається, що визначені також можливі варіанти розв'язання проблеми, які ми називатимемо стратегіями. Застосування кожної із стратегій, як і в теорії стратегічних ігор, дає відповідний ефект (виграш), який залежить від зовнішніх умов.

Виділимо декілька можливих у нашій задачі зовнішніх умов, і назвемо їх станами (стратегіями) середовища. Тип задачі залежить від інформації про стан середовища: у задачах з повною невизначеністю нічого не відомо про те, який з можливих станів слід очікувати. У результаті одержують матрицю оптимальних значень цільової функції $f(x)$, яка має $m$ рядків та $n$ стовпчиків. Елемент платіжної матриці $f_{ij}$ вказує оптимальне значення цільової функції для $i$-го варіанта, який здійснюється при $j$-му поєднанні умов .

| | $П_1$ | $П_2$ | … | $П_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | | $f_{1n}$ |
| $A_2$ | $f_{21}$ | $f_{22}$ | | $f_{2n}$ |
| … | | | | |
| $A_m$ | $f_{m1}$ | $f_{m2}$ | | $f_{mn}$ |

Важливе значення для вибору планових рішень має порівняння втрат ефекту, пов'язаних з реалізацією певного варіанта в інших умовах порівняно з тими, за яких він є оптимальним (економічний ризик). Величини економічного ризику $r_{ij} \geq 0$, які показують зменшення значень цільової функції при реалізації $i$-го варіанта у ситуації $j$, обчислюють за формулою

$$r_{ij} = f_j^0 - f_{ij},$$

де $f_j^0$ – максимальне значення $f(x)$ при $j$-му поєднанні початкових даних (максимальний елемент стовпчика $j$). Таким чином, отримуємо матрицю ризиків:

| | $П_1$ | $П_2$ | … | $П_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $r_{11}$ | $r_{12}$ | | $r_{1n}$ |
| $A_2$ | $r_{21}$ | $r_{22}$ | | $r_{2n}$ |
| … | | | | |
| $A_m$ | $r_{m1}$ | $r_{m2}$ | | $r_{mn}$ |

Для вибору кращих варіантів, які входять у зону невизначеності та реалізуються за різних поєднань початкових даних, використовують ряд формальних критеріїв з теорії ігор і статистичних рішень.

*1. Критерій максимального виграшу (крайнього оптимізму).* У платіжній матриці знаходять найбільший елемент $f_{ij}$ і обирають стратегію, яка йому відповідає.

$$K_1 = \max_i \max_j f_{ij}.$$

*2. Критерій максимального середнього виграшу (критерій Лапласа).* Знаходимо середні виграші для всіх стратегій і обираємо ту, для якої він найбільший

$$K_2 = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}.$$

*3. Критерій рангів.* Для кожного $j$-го варіанта поєднань умов найбільшому значенню $f_{ij}$ присвоюється ранг 1, наступному за величиною – 2 і т. д. Для кожної стратегії визначають середнє значення рангу. Найкращою вважається стратегія з мінімальним середнім рангом.

*4. Критерій Вальда* передбачає вибір такої стратегії, для якої в найгірших умовах досягається найбільший ефект

$$K_4 = \max_i \min_j f_{ij}.$$

*5. Критерій Севіджа* Для кожної стратегії в матриці ризиків знаходимо максимальний ризик і обираємо ту, для якої величина цього ризику є найменшою:

$$K_5 = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Критерії Вальда та Севіджа належать до критеріїв крайнього песимізму, оскільки обирається кращий варіант з найгірших.

*6. Критерій Гурвіца* має вигляд:

$$K_6 = \max_i \left[ \alpha \min_j f_{ij} + (1-\alpha) \max_j f_{ij} \right]; \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

або

$$K_6 = \min_i \left[ \beta \max_j r_{ij} + (1-\beta) \min_j r_{ij} \right], \quad 0 \le \beta \le 1.$$

Цей критерій допускає деякий компроміс між вибором рішень на основі крайнього оптимізму і крайнього песимізму. Для компромісу максимальні і мінімальні виграші зважуємо за допомогою коефіцієнта $\alpha$. Це довільний коефіцієнт, значення якого вибирається між нулем і одиницею. Чим ближче його значення до одиниці, тим сильніше на прийняття рішення впливають максимальні значення виграшів і тим з більшою впевненістю суб’єкта можна вважати оптимістом. До речі, при $\alpha = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в критерій крайнього оптимізму.

При великій схильності до обережності, коефіцієнт $\alpha$ наближається до 0, посилюється орієнтація на мінімальні виграші. При $\alpha = 0$ критерій Гурвіца перетворюється в критерій крайнього песимізму.

*7. Критерій максимуму математичного сподівання на ефект* або мінімуму середнього значення економічного ризику:

$$K_7 = \max_i \sum_{j=1}^{n} f_{ij} p_j ; \quad K_7 = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j , \tag{9.1}$$

де $p_n$ – ймовірність $n$-го поєднання умов.

Усі ці критерії не гарантують однозначного вибору планових рішень в умовах невизначеності. Але вони дозволяють звузити множину потенційних оптимальних варіантів. Варіанти, що залишилися, вважають рівноефективними. Остаточний вибір планового рішення здійснюється неформальним чином. Кінцевим результатом є обгрунтування пропозицій про стратегію і тактику планової роботи в умовах невизначеності.

**Приклад 9.1.** Нехай в прогнозованному періоді можуть спостерігатись чотири стани зовнішнього середовища $П_1$ – $П_4$, і розглядаються п’ять альтернативних стратегій $А_1$ – $А_5$. Виграші від використання стратегій при відповідних станах середовища наведено в таблиці

| . | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $А_1$ | 16 | 13 | 9 | 10 |
| $А_2$ | 12 | 15 | 11 | 8 |
| $А_3$ | 11 | 14 | 10 | 9 |
| $А_4$ | 7 | 10 | 18 | 11 |
| $А_5$ | 12 | 8 | 15 | 12 |

Визначити оптимальну стратегію за критеріями крайнього оптимізму, Лапласа, Вальда, Севіджа, рангів, Гурвіца (графічно) та максимуму математичного сподівання за умови, що другий стан середовища прогнозується з імовірністю 0,7.

*Розв’язання.* За критерієм максимального виграшу, найвигіднішою є стратегія $А_4$ (максимальний елемент таблиці 18 од., розташований в четвертому рядку). Це можливо, за умови, що буде спостерігатися стан середовища $П_3$. Треба, однак, зазначити, що у випадку, коли спостерігатиметься стан середовища $П_1$, вибір цієї стратегії призведе до найменшого виграшу: 7 од.(не забуваємо, що яким буде стан середовища нам не відомо).

Розглянемо критерій максимального середнього виграшу. Для цього знайдемо середні виграші для кожної з стратегій (по рядках):

$$A_1 : \quad \frac{1}{4}(16 + 13 + 9 + 10) = 12$$

$$A_2 : \quad \frac{1}{4}(12 + 15 + 11 + 8) = 11{,}5$$

$$A_3: \quad \frac{1}{4}(11+14+10+9)=11$$

$$A_4: \quad \frac{1}{4}(7+10+18+11)=11{,}5$$

$$A_5 \quad \frac{1}{4}(12+8+15+12)=11{,}75$$

Найбільше з цих чисел – 12 – відповідає стратегії $A_1$, яка і буде оптимальною за критерієм Лапласа.

Щоб застосувати критерій ранжування, побудуємо таблицю рангів. Для стану середовища $П_1$ найбільший виграш (16 од.) відповідає стратегії $A_1$, йому присвоїмо ранг 1. Оскільки наступний за величиною виграш (12 од.) забезпечують дві стратегії: $A_2$ та $A_5$, то їх ранг покладемо рівним 2,5; бо ми не можемо надати перевагу жодній з них. Тепер ранги 2 і 3 вважаються використаними, тому стратегії $A_3$ (виграш – 11 од.) присвоюємо ранг 4, а стратегії $A_4$ (виграш – 7 од.) – ранг 5. Вносимо одержані результати в перший стовпчик таблиці. Аналогічно знаходимо ранги для інших станів середовища. В останній стовпчик вносимо сумарні ранги для кожної із стратегій (суми чисел у відповідних рядках).

| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | Сумарний ранг |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 3 | 5 | 3 | 12 |
| $A_2$ | 2,5 | 1 | 3 | 5 | 11,5 |
| $A_3$ | 4 | 2 | 4 | 4 | 14 |
| $A_4$ | 5 | 4 | 1 | 2 | 12 |
| $A_5$ | 2,5 | 5 | 2 | 1 | 10,5 |

За критерієм рангів оптимальною виявилась стратегія $A_5$, для якої сумарний ранг є найменшим.

Щоб скористатися критерієм Вальда знайдемо мінімальні виграші для кожної стратегії (мінімальні числа кожного рядка таблиці). Це числа: 9, 8, 9, 7, 8. Найбільше з них (9 од.) відповідає стратегії $A_1$ та $A_3$. Таким чином, за найнесприятливіших умов, використання стратегій $A_1$ та $A_3$ дасть найбільший виграш.

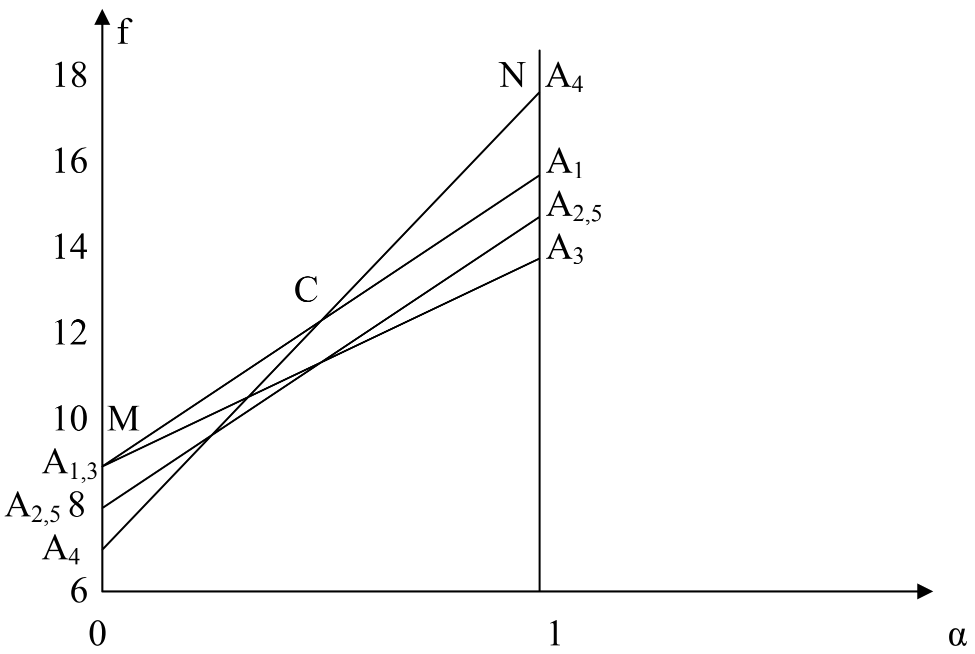
Визначимо ризики, виходячи з таких міркувань. Для стану $П_1$ ми отримаємо максимальний виграш, якщо виберемо стратегію $A_1$ (16 од). Якщо ж ми вибрали іншу стратегію, то виграш буде меншим. Ризик для стратегії $A_1$ в цьому випадку вважаємо рівним нулю, а для інших стратегій ризики дорівнюють різниці між максимальним виграшем та виграшем при застосуванні відповідної стратегії. Ризик для стратегії $A_2$ – 16 - 12 = 4, для $A_3$ – 16 - 11 = 5, для $A_4$ – 16 – 7 = 9, для $A_5$ – 16 – 12 = 4. Вносимо одержані дані в перший стовпчик матриці ризиків.

Аналогічно, за стану середовища $П_2$ найвигіднішою є стратегія $A_2$. Обчислимо ризики для інших стратегій для цього стану середовища ($A_1$ – 15 – 13 = 2, $A_3$ – 15 – 14 = 1, $A_4$ – 15 – 10 = 5, $A_5$ – 15 – 8 =7 ), одержимо другий стовпчик таблиці. Далі, в такий самий спосіб заповнюємо інші стовпчики таблиці.

У випадку другого критерія крайнього песимізму, критерія Свіджа, спочатку знаходимо максимальні ризики (максимальні числа кожного рядка таблиці ризиків): 9, 7, 8, 9, 7, а потім найменше з них – 7. За цим критерієм стратегії $A_2$ та $A_5$ – забезпечують найменший ризик за найбільш несприятливих умов.

| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 2 | 9 | 2 |
| $A_2$ | 4 | 0 | 7 | 4 |
| $A_3$ | 5 | 1 | 8 | 3 |
| $A_4$ | 9 | 5 | 0 | 1 |
| $A_5$ | 4 | 7 | 3 | 0 |

Щоб скористатися критерієм Гурвіца для аналізу стратегій будують допоміжний графік. Покажемо це для матриці виграшів. По осі абсцис відкладаємо значення $\alpha$. Нагадаємо, що $0 \le \alpha \le 1, \alpha = 0$ відповідає крайньому песимізму, а $\alpha = 1$ – крайньому оптимізму. Проведемо прямі $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ і відкладемо на першій з них мінімальні виграші для кожної із стратегій, а на другій – максимальні. З’єднаємо відповідні точки відрізками.




З графіка видно, що при зміні позиції від крайнього песимізму до крайнього оптимізму пріоритети змінюються: від надання переваги стратегії $A_1$ до – $A_4$ . При $\alpha = 0{,}5$ ці стратегії будуть за критерієм Гурвіца рівноцінними. Стратегія $A_3$ може бути вибрана лише за критерієм крайнього песимізму ($\alpha = 0$), бо в інших випадках вона є менш вигідною за $A_1$. Інші стратегії за критерієм Гурвіца не можуть бути вибрані як оптимальні, тому що відрізки, які відповідають цим стратегіям лежать нижче ламаної MCN, тобто в будь-якому випадку є менш вигідними ніж $A_1$ або $A_4$.

Аналогічно, можна провести графічний аналіз використання критерію Гурвіца для ризиків.

Нехай ми можемо оцінити ймовірність того, що з'явиться певний стан середовища, виходячи з минулого досвіду. Це, наприклад, можливо для прогнозування погоди (ми можемо розглядати досить великий проміжок часу). Припустимо, що протягом п'ятдесяти років стан $П_1$ спостерігався десять років, $П_2$ – двадцять п'ять, $П_3$ – п'ять і $П_4$ – десять. Тоді в умовах критерію 7 : $P_1$ = 10/50 = 0,2,

$P_2$ =25/50 = 0,5; $P_3$ = 5/50 = 0,1; $P_4$ = 10/50 = 0,2. За формулою (9.1) знайдемо:

для $A_1$: $0{,}2{\cdot}16+0{,}5{\cdot}13+0{,}1{\cdot}9+0{,}2{\cdot}10 = 11{,}6$;

для $A_2$: $0{,}2{\cdot}12+0{,}5{\cdot}15+0{,}1{\cdot}11+0{,}2{\cdot}8 = 12{,}6$;

для $A_3$: $0{,}2{\cdot}11+0{,}5{\cdot}14+0{,}1{\cdot}10+0{,}2{\cdot}9 = 12$;

для $A_4$: $0{,}2{\cdot}7+0{,}5{\cdot}10+0{,}1{\cdot}18+0{,}2{\cdot}11 = 10{,}4$;

для $A_5$: $0{,}2{\cdot}12+0{,}5{\cdot}8+0{,}1{\cdot}15+0{,}2{\cdot}12 = 9{,}3$.

Отже за критерієм 7 буде обрана стратегія $A_2$.

На оцінку ймовірностей станів середовища можуть вплинути прогнози експертів. Нехай експерти прогнозують, що буде спостерігатися стан $П_4$ і відомо, що їх прогнози справджуються на 70%. Тоді покладемо $P_4$ = 0,7, а залишок 0,3 поділимо порівну між станами $П_1$, $П_2$ та $П_3$. Тоді:

для $A_1$: $0{,}1{\cdot}16+0{,}1{\cdot}13+0{,}1{\cdot}9+07{\cdot}10 = 10{,}8$;

для $A_2$: $0{,}1{\cdot}12+0{,}1{\cdot}15+0{,}1{\cdot}11+0{,}7{\cdot}8 = 9{,}4$;

для $A_3$: $0{,}1{\cdot}11+0{,}1{\cdot}14+0{,}1{\cdot}10+0{,}7{\cdot}9 = 9{,}8$;

для $A_4$: $0{,}1{\cdot}7+0{,}1{\cdot}10+0{,}1{\cdot}18+0{,}7{\cdot}11 = 11{,}2$;

для $A_5$: $0{,}1{\cdot}12+0{,}1{\cdot}8+0{,}1{\cdot}15+0{,}7{\cdot}12 = 11{,}9$

Розглянемо одержані результати

| Критерій | $К_1$ | $К_2$ | $К_3$ | $К_4$ | $К_5$ | $К_6$ | $К_7$ | $К_7'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Краща стратегія | $A_4$ | $A_1$ | $A_5$ | $A_1$,$A_3$ | $A_2$,$A_5$ | $A_1$,$A_4$ | $A_2$ | $A_5$ |

Ми бачимо, що в умовах невизначеності можливий вибір будь-якої із стратегій. Цей вибір належить зробити особі, що приймає рішення, якщо ця особа оптиміст і довіряє прогнозам експертів, то вона обере стратегію $A_4$ або $A_5$, виходячи з критеріїв $К_1$ та $К_7'$. Песиміст, який покладається на минулий досвід, швидше за все обере стратегію $A_2$, яка є кращою за критеріями $К_5$ та $К_7$. Спеціаліст, не схильний до ризику, який дотримується «золотої середини», обере стратегію $A_1$ або $A_5$, що найчастіше зустрічається серед кращих.

Таким чином, остаточне рішення в умовах невизначеності приймає керівник. Математичний апарат використовується для аналізу ситуації і порівняння різних варіантів залежно від впливу зовнішніх факторів.

*Відповідь:*

| Критерій | $К_1$ | $К_2$ | $К_3$ | $К_4$ | $К_5$ | $К_6$ | $К_7$ | $К_7'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Краща стратегія | $A_4$ | $A_1$ | $A_5$ | $A_1$,$A_3$ | $A_2$,$A_5$ | $A_1$,$A_4$ | $A_2$ | $A_5$ |

**Завдання 9.** Визначити оптимальну стратегію за критеріями крайнього оптимізму, Лапласа, Вальда, Севіджа, рангів, Гурвіца (графічно) та максимуму математичного сподівання за умови, що другий стан середовища прогнозується з імовірністю 0,8.

**Варіант 1**

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 8 \\ 8 & 11 & 6 \\ 10 & 8 & 7 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

**Варіант 2**

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 8 & 11 & 6 \\ 10 & 8 & 7 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

**Варіант 3**

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

**Варіант 4**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 5**

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 10 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 6**

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 7 \\ 9 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 7**

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 9 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 8**

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 9**

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 8 & 11 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

**Варіант 10**

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 10 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 11**

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 8 & 11 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

**Варіант 12**

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 8 \\ 8 & 10 & 6 \\ 10 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

**Варіант 13**

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 8 & 11 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

**Варіант 14**

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 10 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 15**

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 8 \\ 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 16**

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

**Варіант 17**

$$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

**Варіант 18**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 19**

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 12 \\ 8 & 11 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

**Варіант 20**

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 8 \\ 5 & 10 & 9 \\ 10 & 9 & 7 \\ 10 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

**Варіант 21**

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 11 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

**Варіант 22**

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 9 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 23**

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

**Варіант 24**

$$\begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

**Варіант 25**

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

**Варіант 26**

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 8 & 11 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

**Варіант 27**

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 8 & 11 & 6 \\ 10 & 8 & 7 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

**Варіант 28**

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 8 \\ 8 & 11 & 9 \\ 10 & 8 & 7 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

**Варіант 29**

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 5 \\ 7 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

**Варіант 30**

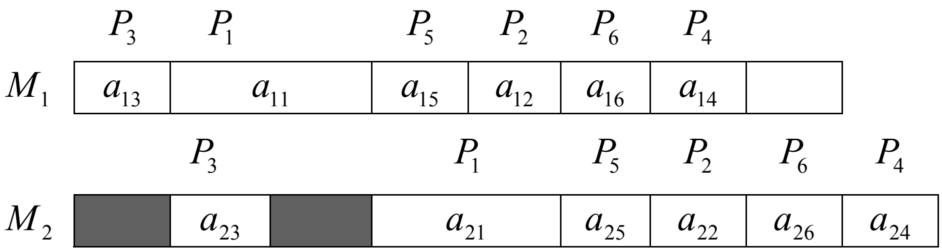
$$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 6 \\ 11 & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 10 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

# Тема 10. Задача про впорядкування обслуговування

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

Нехай $n$ заявок $P_1,\ P_2,\ ...,\ P_n$ мають послідовно проходити обслуговування двома каналами $M_1$ і $M_2$. Одним каналом в кожний момент часу обслуговується лише одна заявка. Час обслуговування заявки $P_i$ каналом $M_k$ задається матрицею $A=\{a_{ki}\}_{2\times n}$. Потрібно мінімізувати час, коли другий канал не зайнятий. Задача такого типу має комбінаторний характер. Її розв'язок можна знайти звичайним методом перебору. Для цього потрібно перебрати $n!$ перестановок.

Нижче схематично показано план-графік обслуговування шести заявок двома каналами




Час обслуговування кожної із шести заявок показано білими прямокутниками, а чорними прямокутниками показано інтервали часу простою другого каналу.

Будемо шукати розв'язок задачі за схемою

1. Обираємо в матриці $A$ найменший елемент $a_{ki}$.
2. Якщо цей елемент у першому рядку, то обслуговування починаємо з заявки $P_i$, якщо в другому, то обслуговування закінчуємо заявкою $P_i$.
3. Викреслюємо $i$-й стовпчик із матриці $A$ і повертаємося до кроку 1. Виконуємо ці дії, поки не розглянемо всі $P_i\ (i=1,\ 2,\ ...,\ n)$.
4. Обчислюємо час вимушеного простою другого каналу між обслуговуванням заявок $i$ та $i+1$ за формулою

$$\Pr(i,i+1)=\begin{cases} t_{1i}-t_{2,i+1}, & t_{2,i+1}<t_{1i} \\ 0, & t_{2,i+1}\ge t_{1i} \end{cases},$$

де $t_{ki}$ – час виконання всіх попередніх заявок, включаючи $P_i$, каналом $M_k$.

5. У процесі обслуговування заявок першим каналом можуть виникнути резерви часу перед обслуговуванням заявки $P_i$ (допустимий простій першого каналу, що не призводить до збільшення загального часу обслуговування). Для заявки, що обслуговується останньою

$$R_n=\begin{cases} t_{2,n-1}-t_{1n} & t_{2,n-1}<t_{1n} \\ 0, & t_{2,n-1}\ge t_{1n} \end{cases}.$$

Для інших заявок резерви обчислюються за рекурентною формулою

$$R_i = \begin{cases} \min\left(R_{i+1}, t_{2,i-1} - t_{1i}\right), & t_{2,i-1} < t_{1i} \\ 0, & t_{2,i-1} \geq t_{1i} \end{cases}.$$

**Приклад 10 1.** Задана матриця $A$ обслуговування 8 заявок $P_i$ двома каналами $M_1$ і $M_2$.

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | 10 | 14 | 12 | 12 | 18 | 25 | 15 |
| $M_2$ | 25 | 8 | 11 | 10 | 15 | 12 | 20 | 20 |

Потрібно мінімізувати загальний час обслуговування заявок, враховуючи час роботи і час простою другого каналу.

*Розв'язання.* Вимога мінімізувати загальний час обслуговування заявок еквівалентна вимозі мінімізувати час простою другого каналу. Найменшим елементом повної матриці $A$ є $a_{22} = 8$. Він знаходиться в другому рядку, тому процес обслуговування треба закінчувати обслуговуванням заявки $P_2$. Маємо

$$\{..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., P_2\}.$$

Викреслимо в матриці $A$ другий стовпчик. Отримаємо:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | | 14 | 12 | 12 | 18 | 25 | 15 |
| $M_2$ | 25 | | 11 | 10 | 15 | 12 | 20 | 20 |

Тепер найменшим елементом є $a_{24} = 10$. Отже, передостанньою потрібно обслуговувати заявку $P_4$. Маємо

$$\{..., ..., ..., ..., ..., ..., P_4, P_2\}.$$

Викреслимо в усіченій матриці $A$ стовпчик 4. Отримаємо:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | | 14 | | 12 | 18 | 25 | 15 |
| $M_2$ | 25 | | 11 | | 15 | 12 | 20 | 20 |

Тепер найменшим елементом є $a_{23} = 11$. Тому перед $P_4$ має обслуговуватися заявка $P_3$. Маємо

$$\{..., ..., ..., ..., ..., P_3, P_4, P_2\}.$$

Викреслимо в усіченій матриці $A$ стовпчик 3. Отримаємо:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | | | | 12 | 18 | 25 | 15 |
| $M_2$ | 25 | | | | 15 | 12 | 20 | 20 |

Тепер найменшими елементами є $a_{15} = a_{26} = 12$. Тому починати процес обслуговування потрібно з $P_5$, а $P_6$ обслуговувати перед $P_3$. Маємо

$$\{P_5, ..., ..., ..., P_6, P_3, P_4, P_2\}.$$

Викреслимо в усіченій матриці $A$ стовпчики 5 і 6. Отримаємо:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | | | | | | 25 | 15 |
| $M_2$ | 25 | | | | | | 20 | 20 |

Тепер найменшим елементом є $a_{18} = 15$. Тому після $P_5$ повинна обслуговуватися заявка $P_8$. Маємо

$$\{P_5, P_8, \ ..., \ ..., \ P_6, \ P_3, \ P_4, \ P_2\}.$$

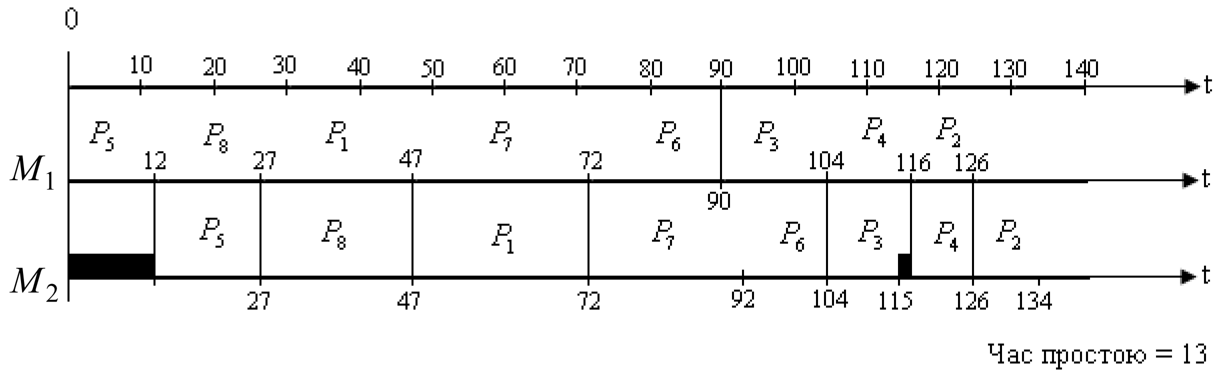
Викреслимо в усіченій матриці $A$ стовпчик 8. Отримаємо:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 20 | | | | | | 25 | |
| $M_2$ | 25 | | | | | | 20 | |

Тепер найменшими елементами є $a_{11} = a_{27} = 20$. Тому після $P_8$ потрібно обслуговувати $P_1$,а перед $P_6$ – $P_7$. Маємо таку послідовність обслуговування заявок

$$\{P_5, \ P_8, \ P_1, \ P_7, \ P_6, \ P_3, \ P_4, \ P_2\}.$$

Побудуємо план-графік обробки восьми заявок двома каналами, з якого видно, що до початку обслуговування заявки $P_5$ на $M_2$ виникає простій $a_{12} = 12$ одиниць часу,а між обслуговуванням $P_3$ і $P_4$ на $M_2$ виникає простій в одиницю часу.




*Відповідь.* Послідовний порядок проходження заявок через канали $\{P_5, \ P_8, \ P_1, \ P_7, \ P_6, \ P_3, \ P_4, \ P_2\}$. Мінімальний загальний час обслуговування дорівнює 134 одиницям. Простій складає $12 + 1 = 13$ одиниць часу.

*Зауваження.* Якщо в умовах задачі час обслуговування третьої заявки $a_{13}$ зменшиться з 14 до 12 одиниць, то послідовність обслуговування не зміниться, але перед виконанням заявки $P_6$ з'явиться резерв часу в одну одиницю для першого каналу і зникне простій другого каналу між виконанням заявок $P_3$ та $P_4$. При цьому мінімальний загальний час обслуговування дорівнюватиме 135 одиницям.

**Завдання 10.** Задана матриця $A$ обслуговування n заявок $P_i$ двома каналами $M_1$ і $M_2$. Потрібно мінімізувати загальний час обслуговування заявок, враховуючи час роботи і час простою другого каналу.

**Варіант 1**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 4 | 19 | 3 | 22 | 5 |
| $M_2$ | 17 | 11 | 2 | 8 | 7 | 13 |

**Варіант 2**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 3 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 5 | 4 | 12 | 10 | 2 | 17 | 3 |

**Варіант 3**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 15 | 13 | 5 | 11 | 8 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 6 | 8 | 5 | 7 | 3 | 9 |

**Варіант 4**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 3 | 22 | 13 |
| $M_2$ | 17 | 4 | 2 | 18 | 7 | 3 |

**Варіант 5**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 6 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 12 | 10 | 5 | 17 | 3 |

**Варіант 6**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 10 | 13 | 12 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 5 | 8 | 5 | 17 | 4 | 3 |

**Варіант 7**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 19 | 3 | 22 | 4 |
| $M_2$ | 17 | 4 | 5 | 18 | 7 | 13 |

**Варіант 8**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 2 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 1 | 10 | 2 | 17 | 3 |

**Варіант 9**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 10 | 3 | 3 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 3 | 8 | 5 | 1 | 3 | 3 |

**Варіант 10**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 21 | 9 | 3 | 22 | 4 |
| $M_2$ | 17 | 4 | 12 | 8 | 7 | 13 |

**Варіант 11**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 12 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 2 | 3 | 4 | 12 | 10 | 12 | 17 | 3 |

**Варіант 12**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 10 | 12 | 3 | 8 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 3 | 8 | 5 | 10 | 3 | 3 |

**Варіант 13**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 3 | 22 | 14 |
| $M_2$ | 1 | 4 | 21 | 18 | 7 | 13 |

**Варіант 14**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 5 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 12 | 10 | 12 | 17 | 3 |

**Варіант 15**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 1 | 8 | 7 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 3 | 8 | 5 | 1 | 3 | 3 |

**Варіант 16**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 3 | 12 | 14 |
| $M_2$ | 17 | 4 | 1 | 18 | 7 | 13 |

**Варіант 17**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 12 | 14 | 7 | 4 | 19 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 13 | 4 | 12 | 10 | 12 | 17 | 3 |

**Варіант 18**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 10 | 6 | 3 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 7 | 9 | 3 | 8 | 5 | 17 | 3 | 2 |

**Варіант 19**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 13 | 22 | 4 |
| $M_2$ | 17 | 14 | 1 | 8 | 7 | 13 |

**Варіант 20**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 12 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 2 | 10 | 12 | 17 | 3 |

**Варіант 21**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 9 | 11 | 4 | 10 | 3 | 5 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 6 | 9 | 3 | 8 | 5 | 17 | 7 | 4 |

**Варіант 22**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 5 | 22 | 14 |
| $M_2$ | 17 | 4 | 12 | 8 | 7 | 13 |

**Варіант 23**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 21 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 12 | 10 | 12 | 17 | 3 |

**Варіант 24**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 10 | 6 | 8 | 11 | 19 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 3 | 8 | 2 | 17 | 5 | 9 |

**Варіант 25**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 3 | 2 | 4 |
| $M_2$ | 17 | 14 | 12 | 18 | 7 | 3 |

**Варіант 26**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 12 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 2 | 10 | 21 | 17 | 3 |

**Варіант 27**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 3 | 9 | 11 | 4 | 10 | 14 | 12 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 17 | 9 | 3 | 8 | 5 | 17 | 13 | 7 |

**Варіант 28**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 11 | 9 | 6 | 22 | 14 |
| $M_2$ | 17 | 4 | 21 | 18 | 7 | 3 |

**Варіант 29**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 13 | 2 | 14 | 7 | 4 | 9 | 8 | 21 |
| $M_2$ | 20 | 3 | 4 | 12 | 10 | 2 | 17 | 3 |

**Варіант 30**

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 9 | 11 | 4 | 10 | 6 | 3 | 11 | 9 |
| $M_2$ | 11 | 12 | 9 | 3 | 8 | 5 | 17 | 2 | 3 |

# Тема 11. Задача про заміну обладнання

*Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки*

Дана задача належить до класу задач динамічного програмування. Динамічне програмування – це математичний апарат, в основу якого покладено можливість поділу певної управлінської задачі на більш прості частини. При цьому характерною його особливістю є поетапне (покрокове) розв'язання отриманої сукупності підзадач, при цьому загальний критерій оптимальності є сумою частинних критеріїв на кожному кроці.

Нехай на кожному кроці система може знаходитись в одному з дискретних станів $S_i(k-1)$. На кожному кроці до неї застосовується певне управлінське рішення $u_j$ із скінченного набору, що переводить її в стан $S_l(k)$ на наступному кроці. [ Необхідно знайти такий план дій (прийняття рішень на кожному кроці), який забезпечить оптимальний перехід із деякого початкового стану $S_i(0)$ в кінцевий стан $S_l(n)$.]

При цьому застосування цього управлінського рішення приносить деякий результат. Доцільно обрати таке рішення $u_j$, щоб результат, що досягається за кроки з $k$ по $n$, був оптимальним. Числова характеристика даного результату $F_k(S(k-1), u(k))$ називається функцією Белмана.

Основні особливості даної моделі такі:

1) задача оптимізації – це скінченний багатокроковий процес управління;
2) цільова функція є сумою цільових функцій на кожному кроці;
3) вибір управління на кожному кроці залежить тільки від стану системи на момент його прийняття і не залежить від попередніх кроків;
4) стан системи $S_l(k)$ залежить лише від її попереднього стану $S_i(k-1)$ і управління $u_j(k)$ на даному кроці (відсутність післядії).

**Принцип оптимальності Белмана**

Оптимальне рішення, починаючи з будь-якого кроку, залежить лише від її стану на даному кроці та подальшого рішення.

Задачі динамічного програмування розв'язуються в два етапи, першим з яких є умовна оптимізація.

На цьому етапі визначаються функції Белмана та оптимальні управління для всіх можливих станів системи на кожному кроці, починаючи з останнього.

Дані обчислення проводяться згідно з рекурентними співвідношеннями, що розв'язують функцію Белмана на кожному кроці з нею ж обчисленого на попередньому кроці.

Другий етап – безумовна оптимізація. Оскільки в початковий момент стани системи $S_i(0)$ відомі, то для кожного з них можна знайти оптимальне рішення на першому кроці, потім на другому і т.д. У результаті, для кожного з цих станів ми отримаємо вектор оптимального управління $u_j = (u_j(1); u_j(2); \ldots; u_j(n))$ і сукупності можливих станів на кожному кроці.

Однією із задач такого типу є задача заміни обладнання. Розглянемо, наприклад, транспортні засоби (вагони, автомобілі тощо). Фізичне та моральне зношування призводить до зменшення прибутків від його використання. При фіксованій вартості перевезень такі засоби вимагають більших витрат на поточні та капітальні ремонти. Моральне старіння транспортних засобів призводить до необхідності зменшення вартості перевезень. Оскільки усі транспортні засоби не можуть бути замінені одночасно, то потрібно виробити оптимальну стратегію їх заміни залежно від віку протягом певного часового періоду. Критерієм оптимальності будемо вважати сумарний прибуток від експлуатації відповідних транспортних засобів.

Нехай плановий період складає $n$ років, а рішення щодо заміни чи збереження транспортного засобу приймається на початку кожного року. Введемо позначення

$t$ – вік транспортного засобу на початок певного року $t = 0,1,2,\ldots,n$;

$k$ – номер року в плановому періоді $k = 1,2,\ldots,n$;

$\Pr(t)$ – прибуток від експлуатації транспортного засобу віку $t$;

$S(t)$ – залишкова (ліквідаційна) вартість транспортного засобу відповідного віку;

$p$ – ціна нового транспортного засобу.

Щодо управлінських рішень, то їх може бути прийнято два: збереження транспортного засобу або його заміна.

Щоб прийняти рішення на початку останнього року порівняємо прибуток від експлуатації транспортних засобів різного віку за рік $\Pr(t)$ з прибутком новопридбаного обладнання: $\Pr(0) - p \pm S(t)$.

Пояснимо останній вираз. Від прибутку нової машини потрібно відняти її ціну. При цьому машину віку $t$, яку вона замінить, можна продати (знак «+») або витратити гроші на її ліквідацію (знак «–»). Таким чином, функція Белмана на останньому кроці:

$$F_n(t) = \max\begin{cases}\Pr(t)\\ \Pr(0) - p \pm S(t)\end{cases} \tag{11.1}$$

В першому випадку обладнання віку $t$ продовжує експлуатацію, а в другому замінюється на нове. В передостанньому році порівнюємо прибутки за два останніх роки. Обладнання віку $t$ за передостанній рік принесе прибуток $\Pr(t)$, а за останній $F_n(t+1)$, оскільки через рік його вік збільшиться на 1. Значення прибутку за останній рік залежить від того, яке буде прийнято рішення щодо даної машини.

Нове обладнання принесе за передостанній рік прибуток $\Pr(0) - p \pm S(t)$, а за останній – $F_n(1)$, оскільки його вік на той час буде становити 1 рік. Таким чином,

$$F_{n-1}(t) = \max\begin{cases}\Pr(t) + F_n(t+1) & \text{збереження}\\ \Pr(0) - p + F_n(1) \pm S(t) & \text{заміна}\end{cases} \tag{11.2}$$

Розмірковуючи аналогічно, отримаємо для кроку $k$

$$F_k(t)=\max\begin{cases}\Pr(t)+F_{k+1}(t+1) & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_{k+1}(1)\pm S(t) & \text{заміна}\end{cases} \qquad (11.3)$$

*Зауваження 11.1.* Якщо $\Pr(t)+F_{k+1}(t+1)=\Pr(0)-p+F_{k+1}(1)\pm S(t)$, то більш доцільним є збереження обладнання.

*Зауваження 11.2.* Якщо $S(t)$ – залишкова вартість обладнання, то логічно припустити, що $S(0)=p$. Тоді

$$\Pr(0)+F_{k+1}(1)=\Pr(0)-p+F_{k+1}(1)+S(t),$$

але щойно придбане обладнання недоцільно замінювати. Отже обладнання віку нуль років завжди зберігається, тобто

$$F_k(0)=\Pr(0)+F_{k+1}(1),\quad F_n(0)=\Pr(0). \qquad (11.4)$$

Після завершення побудови функції Белмана $F_1(t)$ переходимо до безумовної оптимізації. Маючи на початок першого року розподіл $K(t)$ кількості транспортних засобів за віком, приймаємо рішення щодо їх заміни або збереження і переходимо до наступного року планового періоду. В результаті отримуємо стратегію заміни обладнання на найближчі $n$ років.

Загальний прибуток від експлуатації обладнання, за умов обрання оптимальної стратегії заміни:

$$G\Pr=\sum_{t=0}^{n}F_1(t)K_1(t). \qquad (11.5)$$

**Приклад 11.1.** Розробити оптимальну стратегію заміни обладнання в плановому періоді тривалістю 9 років. Прибуток $\Pr(t)$ та залишкова вартість $S(t)$ обладнання відповідного віку наведені в таблиці і вважаються сталими протягом планового періоду. Відомий також розподіл $K(t)$ кількості обладнання за віком на початок першого року планового періоду. Ціна одиниці нового обладнання $p=S(0)$.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |
| $S(t)$ | 24 | 17 | 13 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 9 | 9 |
| $K(t)$ | | 100 | 90 | 80 | 70 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

*Розв'язання.*

**Умовна оптимізація**

Побудову функції Белмана починаємо з останнього (дев'ятого) року. За формулами (11.4), (11.1) маємо:

$F_9(0)=\Pr(0)=36$ збереження

$$F_9(1)=\max\begin{cases}\Pr(1)=34 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(1)=36-24+17=29\end{cases}$$

$$F_9(2)=\max\begin{cases}\Pr(2)=33 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(2)=36-24+13=25\end{cases}$$

$$F_9(3)=\max\begin{cases}\Pr(3)=33 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(3)=36-24+10=22\end{cases}$$

$$F_9(4)=\max\begin{cases}\Pr(4)=33 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(4)=36-24+10=22\end{cases}$$

$$F_9(5)=\max\begin{cases}\Pr(5)=30 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(5)=36-24+10=22\end{cases}$$

$$F_9(6)=\max\begin{cases}\Pr(6)=29 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(6)=36-24+10=22\end{cases}$$

$$F_9(7)=\max\begin{cases}\Pr(7)=28 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(7)=36-24+9=21\end{cases}$$

$$F_9(8)=\max\begin{cases}\Pr(8)=27 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(8)=36-24+9=21\end{cases}$$

$$F_9(9)=\max\begin{cases}\Pr(9)=26 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+S(9)=36-24+9=21\end{cases}$$

Таким чином, обладнання будь-якого віку зберігається, а функція Белмана на останньому кроці:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |

Далі переходимо до передостаннього (восьмого) року планового періоду. За формулами (11.4), (11.2):

$F_8(0)=\Pr(0)+F_9(1)=36+34=70$ збереження

$$F_8(1)=\max\begin{cases}\Pr(1)+F_9(2)=34+33=67 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(1)=36-24+34+17=46+17=63\end{cases}$$

$$F_8(2)=\max\begin{cases}\Pr(2)+F_9(3)=33+33=66 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(2)=36-24+34+13=46+13=59\end{cases}$$

$$F_8(3)=\max\begin{cases}\Pr(3)+F_9(4)=33+33=66 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(3)=36-24+34+10=46+10=56\end{cases}$$

$$F_8(4)=\max\begin{cases}\Pr(4)+F_9(5)=33+30=63 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(4)=36-24+34+10=46+10=56\end{cases}$$

$$F_8(5)=\max\begin{cases}\Pr(5)+F_9(6)=30+29=59 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(5)=36-24+34+10=46+10=56\end{cases}$$

$$F_8(6)=\max\begin{cases}\Pr(6)+F_9(7)=29+28=57 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(6)=36-24+34+10=46+10=56\end{cases}$$

$$F_8(7)=\max\begin{cases}\Pr(7)+F_9(8)=28+27=55 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(1)=36-24+34+9=46+9=55 & \text{заміна}\end{cases}$$

Оскільки значення співпадають, то більш доцільним є збереження обладнання. Далі

$$F_8(8)=\max\begin{cases}\Pr(8)+F_9(9)=27+26=53\\ \Pr(0)-p+F_9(1)+S(8)=36-24+34+9=46+9=55 & \text{заміна}\end{cases}$$

Таким чином, обладнання , вік якого становить 8 років, замінюється на нове і логічно замінити обладнання більшого віку, тобто

$$F_8(9)=\Pr(0)-p+F_9(1)+S(9)=36-24+34+9=46+9=55 \quad \text{заміна}$$

Функція Белмана на передостанньому кроці:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | 57 | 55 | 55 | 55 |

Звернемо увагу на те, що для кожного року величина $\Pr(0)-p+F_{k+1}(1)$ є сталою. Тому можна обчислити її перед побудовою $F_k(t)$ і не розписувати для кожного значення $t$.

$\Pr(0)-p+F_8(1)=36-24+67=79$ збереження

Тоді за формулами (11.4), (11.3) при $k=7$, отримуємо

$F_7(0)=\Pr(0)+F_8(1)=36+67=103$ збереження

$$F_7(1)=\max\begin{cases}\Pr(1)+F_8(2)=34+66=100 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_8(1)+S(1)=79+17=96\end{cases}$$

$$F_7(2)=\max\begin{cases}\Pr(2)+F_8(3)=33+66=99 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_8(1)+S(2)=79+13=92\end{cases}$$

$$F_7(3)=\max\begin{cases}\Pr(3)+F_8(4)=33+63=96 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_8(1)+S(3)=79+10=89\end{cases}$$

$$F_7(4)=\max\begin{cases}\Pr(4)+F_8(5)=33+59=92 & \text{збереження}\\ \Pr(0)-p+F_8(1)+S(4)=79+10=89\end{cases}$$

$$F_7(5)=\max\begin{cases}\Pr(5)+F_8(6)=30+57=87\\ \Pr(0)-p+F_8(1)+S(5)=79+10=89 & \text{заміна.}\end{cases}$$

Отже, заміні підлягає обладнання віком від п'яти років.

$F_7(6)=\Pr(0)-p+F_8(1)+S(6)=79+10=89$ заміна

$F_7(7)=\Pr(0)-p+F_8(1)+S(7)=79+9=88$ заміна

$F_7(8)=\Pr(0)-p+F_8(1)+S(8)=79+9=88$ заміна

$F_7(9)=\Pr(0)-p+F_8(1)+S(9)=79+9=88$ заміна.

Таким чином, отримуємо

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | 89 | 89 | 88 | 88 | 88 |

Аналогічно проводяться розрахунки для $k = 6,5,4,3,2,1$. Результати заносимо в таблицю. Зліва від жирної лінії знаходиться зона збереження обладнання, а справа – заміни.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | 277 | 277 | 276 | 276 | 276 |
| $F_2(t)$ | 258 | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | 244 | 243 | 243 | 243 |
| $F_3(t)$ | 228 | 222 | 221 | 221 | 218 | 215 | 214 | 213 | 213 | 213 |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | 188 | 188 | 188 | 185 | 185 | 184 | 184 | 184 |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | 155 | 155 | 155 | 155 | 154 | 154 | 154 |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | 122 | 122 | 122 | 121 | 121 | 121 |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | 89 | 89 | 88 | 88 | 88 |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | 57 | 55 | 55 | 55 |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |

*Зауваження 11.1.* Нехай на деякому кроці

$$F_k(n-1) = \Pr(n-1) + F_{k+1}(n),$$

тобто обладнання віком $n-1$ рік зберігається, то $F_k(n)$ не може бути обчисленою, оскільки $F_{k+1}(n+1)$ – невідоме. Наприклад, в умовах нашої задачі

$$F_k(9) = \max\begin{cases} \Pr(9) + F_{k+1}(10) \\ \Pr(0) - p + F_{k+1}(1) + S(9) \end{cases},$$

але $F_{k+1}(10)$ визначити неможливо, тому що в плановому періоді 9 років і інформація відносно обладнання десятирічного віку відсутня.

В цьому випадку маємо три можливості:

1) вважати, що в будь-якому разі обладнання, віком $n$ років замінюється, тобто покладаємо

$$F_k(9) = \Pr(0) - p + F_{k+1}(1) + S(9);$$

2) не обчислювати $F_k(n)$ і залишати відповідну клітину таблиці пустою (в цьому випадку на одному з наступних кроків може виявитись, що неможливо обчислити $F_m(n-1)$);

3) збільшити тривалість планового періоду, вносячи відповідні дані в початкову таблицю.

Перше рішення є найпростішим, а останнє – найдоцільнішим.

**Безумовна оптимізація**

З побудованої таблиці видно, що на початку першого року планового періоду слід замінити обладнання віком більше чотирьох років. Тоді на початку другого року в експлуатації не буде обладнання віком більше ніж п’ять, на початку третього – більш ніж шість років і т.д. Тому ці клітинки звільняються (див. таблицю)

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | 258 | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | 222 | 221 | 221 | 218 | 215 | 214 | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | 188 | 188 | 188 | 185 | 185 | 184 | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | 155 | 155 | 155 | 155 | 154 | **154** | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | 122 | 122 | 122 | 121 | 121 | 121 |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | 89 | 89 | 88 | 88 | 88 |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | 57 | 55 | 55 | 55 |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 |

На початку другого року треба замінити обладнання віком від шести років. Але таке обладнання відсутнє, тому нове обладнання закуповуватись не буде. Отже на початку третього року відсутнє обладнання віком один, на початку четвертого – два роки і т. д. Відповідні клітинки є пустими у поданій нижче таблиці.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | 214 | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | 185 | 184 | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | 155 | 155 | 154 | 154 | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | 122 | 122 | 121 | 121 | 121 |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | | 89 | 88 | 88 | 88 |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | | 55 | 55 | 55 |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | | 27 | 26 |

Аналогічно чинимо для третього та четвертого років.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | 185 | | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | 155 | 155 | 154 | | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | 122 | 122 | 121 | 121 | |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | | 89 | 88 | 88 | 88 |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | | 55 | 55 | 55 |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | | 27 | 26 |

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | | | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | 155 | 155 | | | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | 122 | 122 | 121 | | |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | | 89 | 88 | 88 | |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | | 55 | 55 | 55 |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | | 27 | 26 |

На початку п’ятого року треба замінити одразу обладнання віком п’ять та шість років. На початок шостого року вік цього обладнання становитиме один, на початку сьомого – два роки і т.д. Відповідні клітинки виділимо сірим коліром.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | | | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | | | | | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | 122 | | | | |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | | 89 | | | |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | | 55 | | |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | | 27 | |

На початку шостого року потрібно замінити обладнання віком п’ять років.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | | | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | | | | | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | | | | | |
| $F_7(t)$ | 103 | 100 | 99 | 96 | 92 | | | | | |
| $F_8(t)$ | 70 | 67 | 66 | 66 | 63 | 59 | | | | |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | 33 | 33 | 33 | 30 | 29 | | | |

В сьомому та восьмому роках обладнання замінюватись не буде.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | | | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | | | | | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | | | | | |
| $F_7(t)$ | | 100 | 99 | 96 | 92 | | | | | |
| $F_8(t)$ | 70 | | 66 | 66 | 63 | 59 | | | | |
| $F_9(t)$ | 36 | 34 | | 33 | 33 | 30 | 29 | | | |

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1(t)$ | 291 | 288 | 284 | 281 | 277 | | | | | |
| $F_2(t)$ | | 255 | 254 | 251 | 248 | 244 | | | | |
| $F_3(t)$ | 228 | | 221 | 221 | 218 | 215 | | | | |
| $F_4(t)$ | 199 | 192 | | 188 | 188 | 185 | | | | |
| $F_5(t)$ | 169 | 163 | 158 | | 155 | | | | | |
| $F_6(t)$ | 136 | 133 | 129 | 125 | | | | | | |
| $F_7(t)$ | | 100 | 99 | 96 | 92 | | | | | |
| $F_8(t)$ | | | 66 | 66 | 63 | 59 | | | | |
| $F_9(t)$ | 36 | | | 33 | 33 | 30 | 29 | | | |

З останньої таблиці видно, що і в дев'ятому році планового періоду нове обладнання закуповуватись не буде.

Після цього заповнюємо таблицю наявності обладнання відповідного віку в плановому періоді. Придбанню нового обладнання відповідає стовпчик $t = 0$ .

| $t$ / $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | |

– відсутність обладнання відповідного віку,

– наявність обладнання,

– обладнання, що замінило обладнання віком одразу п'яти та шести років (в п'ятому році планового періоду).

На початок планового періоду нам відома кількість одиниць обладнання певного віку. Тому, якщо в таблицю занести відповідну інформацію, то отримаємо план заміни обладнання в плановому періоді (кількості обладнання, що має бути придбане у кожному році відповідають числа в стовпчику $t = 0$).

Нехай на початок першого року планового періоду, до прийняття рішення щодо заміни, кількість обладнання відповідного віку $K(t)$ :

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K(t)$ | | 100 | 90 | 80 | 70 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

Тоді слід одразу замінити обладнання віком від п'яти років, тобто 40+30+20+10+10=110. Після прийняття цього рішення в першому році матимемо такий розподіл кількості обладнання за віком:

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1(t)$ | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | | | | | |

В другому році замін не відбувається, тому нове обладнання відсутнє, а вік наявного зріс на один рік.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_2(t)$ | | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | | | | |

В третьому та четвертому треба придбати відповідно 70 та 80 одиниць обладнання. На початку п'ятого року слід замінити одразу обладнання віком п'ять та шість років, тобто 100+90=190 одиниць. У шостому році – 110. В останні три роки планового періоду замін не буде.

Отримані результати заносимо в таблицю

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1(t)$ | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | | |
| $K_2(t)$ | | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | |
| $K_3(t)$ | 70 | | 110 | 100 | 90 | 80 | |
| $K_4(t)$ | 80 | 70 | | 110 | 100 | 90 | |
| $K_5(t)$ | 190 | 80 | 70 | | 110 | | |
| $K_6(t)$ | 110 | 190 | 80 | 70 | | | |
| $K_7(t)$ | | 110 | 190 | 80 | 70 | | |
| $K_8(t)$ | | | 110 | 190 | 80 | 70 | |
| $K_9(t)$ | | | | 110 | 190 | 80 | 70 |

Загальний прибуток від експлуатації обладнання, за умов обрання оптимальної стратегії заміни, за формулою (11.5) дорівнює:

$$G\,\mathrm{Pr} = \sum_{t=0}^{4} F_1(t)K_1(t) = 291\cdot 110 + 288\cdot 100 + 284\cdot 90 + 281\cdot 80 + 277\cdot 70 = 128240,$$

тобто скалярному добутку перших векторів-рядків таблиць 11.1 та 11.2

*Відповідь.* На початку першого року планового періоду слід замінити 110 одиниць обладнання, третього – 80, четвертого – 70, шостого – 190. Загальний прибуток від експлуатації обладнання складе 128240 грошових одиниць.

**Завдання 11.** Розробити оптимальну стратегію заміни обладнання в плановому періоді тривалістю 9 років. Прибуток $\mathrm{Pr}(t)$ та залишкова вартість $S(t)$ обладнання відповідного віку наведені в таблиці і вважаються сталими протягом планового періоду. Відомий також розподіл $K(t)$ кількості обладнання за віком на початок першого року планового періоду. Ціна одиниці нового обладнання $p = S(0)$.

**Варіант 1**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Pr}(t)$ | 50 | 50 | 50 | 49 | 49 | 48 | 47 | 46 | 44 | 42 |
| $S(t)$ | 40 | 36 | 33 | 31 | 30 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 |
| $K(t)$ | | 100 | 80 | 80 | 60 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 2**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Pr}(t)$ | 20 | 19 | 19 | 19 | 18 | 18 | 17 | 16 | 14 | 12 |
| $S(t)$ | 10 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| $K(t)$ | | 90 | 90 | 80 | 70 | 40 | 30 | 10 | 10 | 10 |

**Варіант 3**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Pr}(t)$ | 45 | 40 | 40 | 39 | 39 | 38 | 37 | 35 | 33 | 30 |
| $S(t)$ | 25 | 16 | 12 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| $K(t)$ | | 120 | 90 | 80 | 70 | 50 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 4**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Pr}(t)$ | 36 | 34 | 33 | 32 | 31 | 31 | 30 | 28 | 27 | 26 |
| $S(t)$ | 24 | 19 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 9 | 9 |
| $K(t)$ | | 110 | 90 | 80 | 60 | 40 | 30 | 20 | 20 | 10 |

**Варіант 5**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Pr}(t)$ | 32 | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 |
| $S(t)$ | 24 | 20 | 18 | 17 | 17 | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 |
| $K(t)$ | | 100 | 90 | 80 | 70 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 6**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Pr}(t)$ | 20 | 19 | 19 | 19 | 19 | 18 | 18 | 18 | 17 | 15 |
| $S(t)$ | 10 | 7 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| $K(t)$ | | 100 | 80 | 80 | 60 | 40 | 30 | 30 | 10 | 10 |

**Варіант 7**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 | 24 |
| $S(t)$ | 20 | 16 | 14 | 13 | 12 | 12 | 11 | 11 | 11 | 10 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 8**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 54 | 52 | 50 | 47 | 43 |
| $S(t)$ | 50 | 40 | 32 | 27 | 24 | 24 | 22 | 22 | 22 | 21 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 9**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 50 | 50 | 49 | 49 | 48 | 47 | 46 | 42 | 35 | 25 |
| $S(t)$ | 40 | 20 | 10 | 5 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | -2 |
| $K(t)$ | | 80 | 80 | 60 | 60 | 40 | 30 | 20 | 20 | 10 |

**Варіант 10**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 30 | 29 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 21 | 14 | 12 |
| $S(t)$ | 40 | 24 | 17 | 12 | 10 | 10 | 9 | 9 | 8 | 7 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 70 | 50 | 50 | 40 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 11**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 26 | 25 | 25 | 25 | 24 | 24 | 23 | 22 | 20 | 16 |
| $S(t)$ | 16 | 10 | 8 | 5 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 12**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 13 | 12 | 10 | 8 | 6 |
| $S(t)$ | 20 | 12 | 8 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 60 | 50 | 30 | 30 | 20 | 20 | 10 |

**Варіант 13**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 36 | 35 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 |
| $S(t)$ | 16 | 12 | 10 | 8 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| $K(t)$ | | 90 | 70 | 60 | 50 | 30 | 30 | 20 | 20 | 10 |

**Варіант 14**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 54 | 52 | 50 | 47 | 43 |
| $S(t)$ | 50 | 40 | 32 | 28 | 25 | 24 | 23 | 22 | 22 | 21 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 15**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 50 | 50 | 49 | 49 | 46 | 43 | 40 | 35 | 30 | 20 |
| $S(t)$ | 60 | 30 | 15 | 8 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 70 | 60 | 50 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 16**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 | 24 |
| $S(t)$ | 20 | 17 | 14 | 13 | 12 | 12 | 12 | 12 | 11 | 10 |
| $K(t)$ | | 180 | 160 | 150 | 120 | 100 | 50 | 40 | 30 | 10 |

**Варіант 17**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 36 | 35 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 |
| $S(t)$ | 16 | 12 | 9 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| $K(t)$ | | 160 | 160 | 140 | 120 | 100 | 80 | 40 | 30 | 10 |

**Варіант 18**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 30 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 | 25 | 23 | 20 |
| $S(t)$ | 15 | 10 | 7 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| $K(t)$ | | 180 | 170 | 150 | 140 | 100 | 90 | 40 | 30 | 10 |

**Варіант 19**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 26 | 25 | 25 | 24 | 24 | 23 | 22 | 21 | 19 | 17 |
| $S(t)$ | 16 | 11 | 7 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| $K(t)$ | | 180 | 160 | 150 | 120 | 100 | 50 | 40 | 30 | 10 |

**Варіант 20**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 15 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 | 13 | 10 | 7 | 6 |
| $S(t)$ | 20 | 12 | 8 | 6 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |
| $K(t)$ | | 180 | 160 | 150 | 140 | 100 | 50 | 40 | 40 | 20 |

**Варіант21**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 50 | 50 | 49 | 49 | 48 | 46 | 35 | 30 | 25 | 15 |
| $S(t)$ | 60 | 30 | 15 | 8 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| $K(t)$ | | 160 | 150 | 150 | 140 | 100 | 50 | 40 | 20 | 20 |

**Варіант 22**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 | 24 |
| $S(t)$ | 20 | 17 | 14 | 13 | 12 | 11 | 11 | 11 | 11 | 10 |
| $K(t)$ | | 180 | 150 | 140 | 120 | 100 | 80 | 40 | 40 | 10 |

**Варіант 23**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 | 12 | 12 | 11 |
| $S(t)$ | 12 | 9 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 |
| $K(t)$ | | 180 | 160 | 150 | 100 | 100 | 90 | 40 | 30 | 20 |

**Варіант 24**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 50 | 50 | 50 | 49 | 49 | 48 | 47 | 46 | 44 | 42 |
| $S(t)$ | 40 | 36 | 33 | 31 | 30 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 |
| $K(t)$ | | 100 | 80 | 80 | 60 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 25**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 20 | 19 | 19 | 19 | 18 | 18 | 17 | 16 | 14 | 12 |
| $S(t)$ | 10 | 7 | 6 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| $K(t)$ | | 90 | 90 | 80 | 70 | 40 | 30 | 10 | 10 | 10 |

**Варіант 26**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 45 | 40 | 40 | 39 | 39 | 38 | 37 | 35 | 33 | 30 |
| $S(t)$ | 25 | 16 | 12 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 |
| $K(t)$ | | 120 | 90 | 80 | 70 | 50 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 27**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 36 | 34 | 33 | 32 | 31 | 31 | 30 | 28 | 27 | 26 |
| $S(t)$ | 24 | 19 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 9 | 9 |
| $K(t)$ | | 110 | 90 | 80 | 60 | 40 | 30 | 20 | 20 | 10 |

**Варіант 28**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 32 | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 |
| $S(t)$ | 24 | 20 | 18 | 17 | 17 | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 |
| $K(t)$ | | 100 | 90 | 80 | 70 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

**Варіант 29**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 20 | 19 | 19 | 19 | 19 | 18 | 18 | 18 | 17 | 15 |
| $S(t)$ | 10 | 7 | 6 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| $K(t)$ | | 100 | 80 | 80 | 60 | 40 | 30 | 30 | 10 | 10 |

**Варіант 30**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pr(t)$ | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 26 | 24 |
| $S(t)$ | 20 | 16 | 14 | 13 | 12 | 12 | 11 | 11 | 11 | 10 |
| $K(t)$ | | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 10 |

## Питання для підготовки до іспиту

1. Принципи побудови економічно-математичних моделей.
2. Форми запису задач лінійного програмування.
3. Загальна задача лінійного програмування та зведення її до канонічного виду.
4. Опуклі множини та опуклі функції.
5. Графічний метод розв’язування ЗЛП.
6. Алгоритм застосовування графічного методу розв’язування ЗЛП.
7. Побудова многокутника обмежень при графічному методі розв’язування ЗЛП.
8. Побудова лінії нульового рівня.
9. Алгоритм застосовування симплексного методу.
10. Основні принципи симплексного методу розв’язування ЗЛП.
11. Побудова опорного плану при симплексному розв’язуванні ЗЛП.
12. Умови оптимальності отриманого плану при симплексному розв’язуванні ЗЛП. .
13. Симплекперетворення.
14. Постановка та математична модель транспортної задачі.
15. Алгоритм методу потенціалів розв’язання транспортної задачі.
16. Метод північно-західного кута.
17. Метод мінімальної вартості.
18. Вироджений та невироджений опорні плани.
19. Метод потенціалів (перевірка опорного плану на оптимальність).
20. Умова оптимальності розв’язку транспортної задачі.
21. Побудова циклів.
22. Однорідні та неоднорідні ланцюги Маркова.
23. Марковські процеси з неперервним часом.
24. Рівняння Колмогорова.
25. Фінальні імовірності.
26. Багатоканальна СМО з відмовами.
27. Багатоканальна СМО з обмеженою чергою та без обмежень на чергу.
28. Сітьове планування. Поняття роботи та події.
29. Терміни настання подій. Критичний шлях.
30. Резерви часу при виконанні робіт.
31. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор.
32. Матричні ігри двох осіб. Платіжна матриця та ціна ігри.
33. Сідлова точка гри. Чисті та мішані стратегії.
34. Спрощення платіжної матриці гри.
35. Розв’язання ігор 2х2.
36. Геометричне розвязання ігор 2 х n та m х 2.
37. Прийняття рішень в умовах невизначеності. Критерії Лапласа та Севіджа, Вальда та Гурвіца. Ймовірносний критерій та критерій рангів.

# ЛІТЕРАТУРА

## Основна література

1. Крюков М.М., Кравець Т.В. Методи і моделі дослідження операцій. – К.: КУЕТТ, 2006. – 218 с.
2. Крюков М.М., Кравець Т.В., Крижановська Т.В.,Коновалюк В. С., Семененко Т. В. Дослідження операцій у транспортних системах у прикладах і задачах. – К.: ДЕТУТ, 2010. – 200 с.
3. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. – М: Высшая школа, 1967. – 233 с.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие для экономических специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. - 4-е видання, перероблене і доповнене. – К., 2001. – 688 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1971. –551 с.
7. Шарапов О. Д., Терехов Л. Л., Сіднев С. П. Системний аналіз. – К.: Вища школа, 1993. – 304 с.

### Додаткова література

8. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій. – К., ЕКОМЕН, 2007. – 256 с.
9. Хэмди А Таха. Введение в исследование операций. – М; С.-П.; К: Изд. Дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
10. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
11. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

*Навчально-методичне видання*

Андрейцев Андрій Юрійович

# ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМАХ

**Методичні вказівки та контрольні завдання для студентів заочної форми навчання за напрямком 6.070101 «Транспортні технології»**

Відповідальний за випуск – Андрейцев А.Ю.
Редактор Щербак Н. В.
Макет і верстка Андрієнка В. О.

Підписано до друку 10. 02. 2015р. Формат 60×84/16. Папір – офсетний.
Спосіб друку – ризографія. Замовлення № 6/15. Наклад 40 примірників.

Надруковано в Редакційно-видавничому відділі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.2007 р. Серія ДК № 3079
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19