МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

А. Ю. АНДРЕЙЦЕВ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 2
для студентів денної форми навчання за спеціальністю
073 «Менеджмент»

Київ 2016

УДК 51:517

Андрейцев А. Ю.

Вища та прикладна математика: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №2 для студентів денної форми навчання за спеціальністю 073 «Менеджмент» / Андрейцев А. Ю. – К.: ДЕТУТ, 2016. – 131с.

Методичні вказівки призначені для індивідуальної роботи студентів з вищої та прикладної математики. В них наводяться основні типи задач з вищої та прикладної математики для студентів І курсу 11 семестру за спеціальністю 073 «Менеджмент». На простих прикладах вивчаються найхарактерніші методи розв'язання математичних задач.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 4 від 17. 11. 16) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол № 2 від 28. 11. 16).

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання за спеціальністю 073 «Менеджмент».

Укладач: А. Ю. Андрейцев, к.ф.-м. н., доцент

Рецензенти: Т. В. Крижановська, к.ф.-м. н., доцент
О. О. Безущак, к.ф.-м. н., доцент

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки охоплюють основні розділи курсу «Вища та прикладна математика» для студентів денної форми навчання за спеціальністю 073 «Менеджмент» за 2 семестр І курсу. Послідовність номерів задач відповідає послідовності лекцій курсу «Вища та прикладна математика». Це забезпечує рівномірне завантаження студентів і виконання ними розрахункової роботи протягом семестру, починаючи з першої лекції. Для полегшення орієнтації студентів в курсі вищої та прикладної математики та глибшого засвоєння навчального матеріалу перед переліком умов завдань для самостійної роботи студентів наведено методичні рекомендації для розв'язання відповідних задач, а в кінці методичних вказівок – список контрольних питань з теорії, а також наведено список рекомендованої літератури.

Розрахункова робота повинна виконуватись на аркушах паперу білого кольору формату А4 на одному боці аркуша відповідно до чинних правил оформлення розрахункових і контрольних робіт. Зворотній бік аркуша використовується для виправлення помилок, а також для можливих допоміжних зауважень, вказівок і пояснень викладача. На титульній сторінці обов'язково має бути вказано назву університету, назву предмета, номер розрахункової роботи, прізвище та ініціали студента, групу, в якій він навчається, а також прізвище викладача, який перевіряє роботу.

При підготовці до захисту розрахункової роботи рекомендується розглянути питання, наведені в кінці посібника. Перед виконанням кожної задачі з розрахункової роботи потрібно засвоїти теоретичні відомості з відповідної теми та самостійно розібрати наведені приклади. Розв'язання задач з розрахункової роботи повинно містити детальні пояснення всіх етапів її виконання

Методичні вказівки містять 30 варіантів розрахункової роботи. Номер варіанта визначається порядковим номером прізвища студента в журналі викладача.

Змістовий модуль 3
Інтегральне числення. Диференціальні рівняння та ряди

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ЩОДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Задача 1. Обчислити невизначені інтеграли.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Функція $F(x)$ називається **первісною** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в усіх точках цього відрізка виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна функції $f(x)$, то будь-яка інша первісна $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $C = const$.

Означення 2. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** цієї функції і позначається $\int f(x)dx$.

Таким чином,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла називають **інтегруванням**. Властивості невизначеного інтеграла випливають із його означення за умови, що функція $f(x)$ має первісну.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$; 2. $\int dF(x) = F(x) + C$;

3. $\int (af_1(x) + bf_2(x))dx = a\int f_1(x)dx + b\int f_2(x)dx \quad a, b = const$;

4. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, тоді $\int f(u)du = F(u) + C$, зокрема

$\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a, b = const, a \neq 0.$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \qquad n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

8. $\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Основними методами інтегрування є безсереднє інтегрування, заміна змінної або підстановка та інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування грунтується на загальних властивостях невизначеного інтеграла та таблиці інтегралів. При застосуванні властивості 3 підінтегральна функція розкладається у суму і вихідний інтеграл подається як лінійна комбінація табличних інтегралів.

Зауваження 1. Незалежно від кількості доданків, на які розкладено підінтегральну функцію, структура невизначеного інтеграла залишається незмінною: у кінцевому результаті інтегрування міститься лише одна довільна стала, яка вводиться із завершенням останньої операції інтегрування.

Приклад 1,а. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{(x+2)^2}{x} dx$.

Розв'язання:

Перетворимо спочатку підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x+2)^2}{x}dx = \int \frac{x^2+4x+4}{x}dx = \int \left(\frac{x^2}{x}+\frac{4x}{x}+\frac{4}{x}\right)dx = \int \left(x+4+\frac{4}{x}\right)dx = \int x\,dx +$$

$$+\int 4\,dx + \int \frac{4}{x}dx = \frac{x^2}{2}+4x+4\ln|x|+C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+4x+4\ln|x|+C$.

Приклад 1,б. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2}{x^2-3}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x^2}{x^2-3}dx = \int \frac{(x^2-3)+3}{x^2-3}dx = \int \left(1+\frac{3}{x^2-3}\right)dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= x - 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C = x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

***Відповідь*:** $x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$

Метод заміни змінної або підстановки грунтується на введенні під знак інтеграла такої змінної, після підстановки якої та заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної одержимо табличний інтеграл. В цьому випадку використовуються підстановки двох видів:

1) Нова змінна замінюється функцією від старої змінної (заміна введенням функції під знак диференціала).

Якщо нова змінна u є неперервно диференційованою функцією $u=\varphi(x)$ від старої змінної x і має місце рівність $g(x)=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, то $\int g(x)dx$ можна знайти за формулою:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{matrix} u=\varphi(x), \\ du=\varphi'(x)dx \end{matrix}\right| = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}, \qquad (*)$$

після чого слід повернутись до старої змінної x;

2) стара змінна замінюється функцією від нової змінної (заміна виведенням функції за знак диференціала).

Якщо стара змінна x є неперервно диференційовною функцією $x=\psi(t)$ від нової змінної t, існує обернена функція $t=\psi^{-1}(x)$ і має місце рівність $f(\psi(t))\cdot\psi'(t)=g(t)$, то $\int f(x)dx$ можна знайти за формулою:

$$\int f(x)dx = \left|\begin{matrix} x=\psi(t), \\ dx=\psi'(t)dt \end{matrix}\right| = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)},$$

після чого слід повернутись до старої змінної x .

Приклад 2. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

Розв'язання:
Скористаємось методом заміни змінних (*):

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} = \int (\cos x)^{-\frac{2}{3}} \sin x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array} \right| = -\int u^{-\frac{2}{3}} du = -3u^{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= -3(\cos x)^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$$

Відповідь: $-3\sqrt[3]{\cos x} + C$.

Інтегрування частинами застосовують для спрощення обчислення невизначеного інтеграла $\int f(x)\, dx$ за допомогою формули:

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (**)$$

(формула інтегрування частинами), де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – неперервно диференційовні функції.

Метод інтегрування частинами застосовується у випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна подати у вигляді добутку $u(x)dv(x)$ таким чином, щоб інтеграл $\int v du$ був простішим для обчислення, ніж інтеграл $\int u dv$.

Зауваження 2. За формулою (**) кінцевий результат інтегрування не зміниться, якщо до функції $v(x)$ додати довільну сталу. Тому при знаходженні функції $v(x)$ по її диференціалу з усієї множини первісних $v(x) + C = \int dv(x)$ звичайно вибирають лише одну (покладаючи, наприклад, $C = 0$).

При інтегруванні деяких функцій інтегрування частинами доцільно застосовувати повторно.

Деякі рекомендації до інтегрування частинами

1. При знаходженні інтегралів $\int P_n(x) \begin{bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx$, де $k = const$, $P_n(x)$ – многочлен n – го степеня, слід покласти $u = P_n(x)$, $dv = \begin{bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx$. Формулу інтегрування частинами застосувати n разів (відповідно до степеня многочлена $P_n(x)$).

2. При знаходженні інтегралів $\int P_n(x) \begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctg\, x \end{bmatrix} dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n – го

степеня, слід покласти $u = \begin{bmatrix} \ln x, \\ \arcsin kx \\ arctg\, kx \end{bmatrix}$, $dv = P_n(x)dx$.

Приклад 3,а. Обчислити невизначений інтеграл $\int x\, 3^x\, dx$.

Розв'язання:

$$\int (x-1)3^x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x-1 & du = dx \\ dv = 3^x\, dx & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| = \frac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx =$$

$$= \frac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x\, dx = \frac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C.$$

Відповідь: $\dfrac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \dfrac{3^x}{\ln^2 3} + C$.

Приклад 3,б. Знайти інтеграл $\int (4x-1)\, arctgx\, dx$.

Розв'язання:

$$\int 2x arctgx\, dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = 2xdx & v = x^2 \end{matrix} \right| = arctgx \cdot x^2 = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2\, arctg\, x - \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = x^2\, arctg\, x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$x^2\, arctg\, x - x + arctg\, x + C = \left(x^2+1\right) arctg\, x - x + C.$$

Відповідь: $\left(x^2+1\right) arctg\, x - x + C$.

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Означення 3. **Раціональним дробом** називається дріб виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени. Раціональний дріб називається **правильним**, якщо степінь $P(x)$ менший за степінь $Q(x)$, в протилежному випадку дріб називається **неправильним**.

Неправильний дріб завжди можна подати у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Будь-який правильний дріб однозначно розкладається в суму **елементарних раціональних дробів** чотирьох типів:

$\dfrac{A}{x-a}$; $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, ($m > 1$– ціле число);

$\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$; $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, ($n>1-$ ціле число, $p^2-4q<0$).

Для цього необхідно розкласти знаменник дробу на дійсні множники першого та другого степеня:

$Q(x)=(x-a)^m\times\cdots\times\left(x^2+px+q\right)^n\times\cdots$, де $p^2-4q<0$, тобто тричлен x^2+px+q має комплексно спряжені корені; після чого правильний раціональний дріб записати у вигляді суми елементарних:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\cdots+\frac{A_m}{x-a}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\cdots.$$

Коефіцієнти $A_1,\ldots A_m,B_1,C_1,\ldots,B_m,C_m$ можна знайти **методом невизначених коефіцієнтів:** привести останню рівність до спільного знаменника, а потім порівняти коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах одержаної тотожності та розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

Зауваження 3. Ці невідомі коефіцієнти можна знайти іншим способом: надаючи в одержаній тотожності змінній x певних числових значень. В багатьох випадках, доцільно використовувати обидва способи обчислення невідомих коефіцієнтів.

Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів:

1) $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2) $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^m}=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$;

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, де $p^2-4q<0$ може бути представлений як лінійна комбінація двох інтегралів:

$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}=\ln\left(x^2+px+q\right)+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

4) $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ послідовним інтегруванням частинами $n-1$ раз зводиться до 3). Відповідні формули не наводяться у зв'язку з відсутністю даних інтегралів у завданнях.

Приклад 4,а. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{x-11}{x^2-x-12}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x-11}{x^2-x-12}dx = \int \frac{x-11}{(x+3)(x-4)}dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{x-11}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{x(A+B)-4A+3B}{(x+3)(x-4)}$$

Отже, $x(A+B)-4A+3B = x-11$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -4A+3B=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

Коефіцієнти A, B можна знайти іншим способом: поклавши в рівноті

$A(x-4)+B(x+3)=x-11$

$x=-3$ та $x=4$. В першому випадку отримаємо $-7A=-14 \quad \Rightarrow \quad A=2$, а в другому – $7B=-7 \quad \Rightarrow \quad B=-1$.

Таким чином, підінтегральний дріб розкладається на суму двох елементарних дробів:

$$\frac{x-11}{(x+3)(x-4)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}$$

Знайдемо тепер інтеграл від суми дробів:

$$\int \frac{x-11}{(x+3)(x-4)}dx = \int \frac{2dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-4} = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + C.$$

Відповідь: $2\ln|x+3| - \ln|x-4| + C$.

Приклад 4,б. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3-2x^2}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3-2x^2}dx = \int \frac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-2)+B\left(x^2-2x\right)+Cx^2}{x^2(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2(B+C)+x(A-2B)-2A}{x^2(x-2)},$$

тобто $x^2(B+C)+x(A-2B)-2A=3x^2+2x-4$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} B+C=3 \\ A-2B=2 \\ -2A=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=3 \end{cases}$$

Таким чином, $\dfrac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x-2}$. Звідки маємо:

$$\int\frac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}dx=\int\frac{2dx}{x^2}+\int\frac{3\,dx}{x-2}=-\frac{2}{x}+3\ln|x-2|+C.$$

Відповідь: $-\dfrac{2}{x}+3\ln|x-2|+C.$

Приклад 4,в. Обчислити невизначений інтеграл $\displaystyle\int\frac{4x^2-2x}{x^3+1}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{4x^2-2x}{x^3+1}dx=\int\frac{4x^2-2x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{4x^2-2x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2(A+C)+x(A+B-C)+(B+C)}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}$$

Отже, $x^2(A+C)+x(A+B-C)+(B+C)=4x^2-2x$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ A+B-C=-2 \\ B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$$

Таким чином, підінтегральний дріб розкладається на суму двох елементарних дробів:

$$\frac{4x^2-2x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{2x-2}{x^2-x+1}+\frac{2}{x+1}.$$

Тоді

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-x+1}+\int\frac{2\,dx}{x+1}=\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\int\frac{2\,dx}{x+1}=$$

$$=\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}-\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+2\int\frac{d(x+1)}{x+1}=$$

$$=\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+2\ln|x+1|+C=$$

$$=\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+2\ln|x+1|+C.$$

Відповідь: $\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+2\ln|x+1|+C.$

Задача 2. Обчислити визначений інтеграл.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Нехай на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, задана функція $f(x)$. Розіб'ємо даний відрізок на n довільних частин точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ так, що $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. На кожному з відрізків виберемо довільно точку $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$ і розглянемо суму

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+f(\xi_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\cdot\Delta x_n,\ \text{де } \Delta x_i=x_i-x_{i-1}$$

Ця сума називається **інтегральною**.

Означення 1. Якщо існує границя інтегральної суми:

$$I=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\ \lambda=\max\Delta x_i,$$

що не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то її називають **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$, а саму функцію – інтегровною на цьому відрізку. Числа a і b називаються відповідно **нижньою та верхньою межами інтегрування.**

Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$ і неперервна на ньому за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то вона інтегровна на $[a;b]$.

З означення випливає, що визначений інтеграл суми скінченного числа функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій, а сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

Якщо функція $-f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то має місце формула Ньютона – Лейбніца :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ відображає відрізок $[\alpha;\beta]$ у відрізок $[a;b]$ так, що 1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і для будь-якого $t\in[\alpha;\beta]$ виконується нерівність $a\le\varphi(t)\le b$; 2) функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, то має місце формула заміни змінної:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt \\ x=a \Rightarrow t=\alpha, \\ x=b \Rightarrow t=\beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx \,.$$

Якщо функції $u(x), v(x)$ та $u'(x), v'(x)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)\,.$$

При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{ll} x=t^2 & x=0\Rightarrow t=0 \\ dx=2tdt & x=4\Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1}\right) = .$$

$$= 2\big(t - \ln|t+1|\big)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

Відповідь: $4-2\ln 3$.

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Якщо фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямими $x = a, x = b$, то за умови $f_1(x) \le f_2(x)$, її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

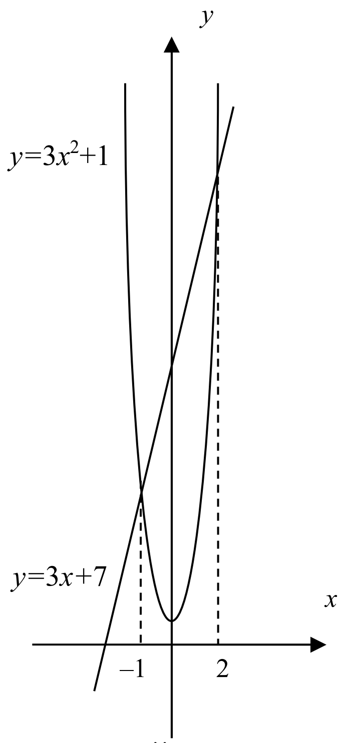
Якщо в умові обмеження $x = a, x = b$ не вказані, то межами інтегрування будуть абсциси точок перетину графіків функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$.

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 3x^2 + 1, \ \ y = 3x + 7$.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 1 \\ y = 3x + 7 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x^2 + 1 = 3x + 7 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Площу заданої області можна знайти за допомогою визначеного інтеграла.

$$S = \int_{-1}^{2} (f_1(x) - f_2(x))dx = \int_{-1}^{2} \left(3x + 7 - 3x^2 - 1\right)dx = \int_{-1}^{2} \left(3x - 3x^2 + 6\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 13\frac{1}{2}(кв.од)$$

Відповідь: $S = 13\frac{1}{2}(кв.\,од.)$.

Задача 4. Розв'язати задачу Коші: $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Рівняння, яке зв'язує шукану функцію, її похідні (або диференціали) і незалежну змінну, називається **звичайним диференціальним рівнянням**.

Символічно диференціальне рівняння можна записати так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0 \text{ або } y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}\right), \qquad (*)$$

де x – незалежна змінна; y – шукана функція; $x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ – похідні шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, яка входить до його складу.

Означення 2. Розв'язком диференціального рівняння називається n раз неперервно диференційовна функція $y(x)$, яка перетворює його в тотожність.

Знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням диференціального рівняння.

Означення 3. **Загальним розв'язком** диференціального рівняння n-го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ або $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ (в цьому випадку його називають **загальним інтегралом**), яка задовольняє це рівняння при будь-яких значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ і інших розв'язків не існує.

Означення 4. **Задачею Коші** для рівняння (*) називається задача знаходження розв'язку рівняння $y(x)$, що задовольняє **початковим умовам**:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (**)$$

де $x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ – задані числа.

Задача Коші для рівняння (*) має розвязок, якщо сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна підібрати так, що функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ буде задовольняти умовам (**).

У випадку диференціального рівнянням першого порядку задача Коші запишеться так:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлювальними змінними будемо називати рівняння, яке можна записати у вигляді:

$y' = \dfrac{N(y)}{M(x)}$ або $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{N(y)}{M(x)}$, яке еквівалентне $\dfrac{dy}{N(y)} = \dfrac{dx}{M(x)}$.

Проінтегрувавши обидві частини цієї рівності за відповідними змінними знаходимо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dy}{N(y)} = \int \frac{dx}{M(x)}.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші: $y' - 2\sqrt{y}\ln x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

Розв'язання:

$y' - 2\sqrt{y}\ln x = 0$ – це рівняння з відокремлюваними змінними.

$\frac{dy}{dx} - 2\sqrt{y}\ln x = 0$, помножимо все рівняння на dx:

$dy - 2\sqrt{y}\ln x\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = 2\sqrt{y}\ln x\,dx$,

поділимо все рівняння на $2\sqrt{y}$ і проінтегруємо:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \ln x\,dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = \int \ln x\,dx$$

Обчислимо окремо другий інтеграл:

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} \int udv = uv - \int vdu \\ u = \ln x \qquad v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\,d(\ln x) = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x -$$

$$-\int dx = x\ln x - x + C$$

Повернемось до рівняння:

$$\sqrt{y} = x\ln x - x + C$$

$y = (x\ln x - x + C)^2$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє умові $y(1) = 9$:

$$\sqrt{9} = 1 \cdot \ln 1 - 1 + C, \text{ тобто } 3 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 4.$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші буде:

$$y = (x\ln x - x + 4)^2$$

Відповідь: $y = (x\ln x - x + 4)^2$.

Задача 5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ називається однорідним.

Однорідне рівняння першого порядку зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни:

$\frac{y}{x} = u$, або $y = xu$. Тоді $y' = xu' + u$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.

Розв'язання:

Скоротимо дане рівняння на x:

$$y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

Це однорідне рівняння, отже розв'язок будемо шукати у вигляді: $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u - \frac{ux}{x} = \operatorname{tg}\frac{ux}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = \operatorname{tg} u .$$

Множимо його на dx, ділимо на $x \operatorname{tg} u$ та інтегруємо:

$$\int \operatorname{ctg} u\, du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad \sin u = Cx \quad \Rightarrow \quad u = \arcsin Cx .$$

Тепер повернемось до змінної $y = ux$ і отримаємо $y = x \arcsin Cx$.

Відповідь: $y = x \arcsin Cx$.

Означення 2. Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо шукана функція та її похідна входять у рівняння в першому степені, тобто лінійно:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{*}$$

Тут $P(x), Q(x)$ – задані неперервні функції від x (або сталі).

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним, а якщо $Q(x) \neq 0$ – лінійним неоднорідним.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Розглянемо однорідне рівняння: $z' + P(x)z = 0$. Перепишемо його у вигляді $\frac{dz}{z} = -P(x)dx$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\ln|z| = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow z = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Розв'язок рівняння (*) будемо шукати у вигляді:

$$y = C(x)z(x). \tag{**}$$

Підставляючи (**) у (*) маємо рівняння для знаходження $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Інтегруючи його маємо:

$$C(x) = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

де C – довільна стала. Підставляючи $C(x)$ в (**), знаходимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (*):

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $y' - \sin x \cdot y = 2x e^{-\cos x}$.

Розв'язання:

Це лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку, отже розв'яжемо спочатку однорідне рівняння:

$$z' - \sin x \cdot z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int \sin x dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|z| = -\cos x + \ln C \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{-\cos x}.$$

Розв'язок вихідного (неоднорідного) рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = C(x)z(x) = C(x)e^{-\cos x}.$$

Підставляючи його у вихідне рівняння, отримуємо:

$$C'(x)e^{-\cos x} + C(x)\sin x e^{-\cos x} - \sin x C(x)e^{-\cos x} = 2xe^{-\cos x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{dx} = 2x.$$

Інтегруючи дане рівняння, маємо:

$$C(x) = x^2 + C,$$

де C – довільна стала. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C(x)z(x) = \left(x^2 + C\right)e^{-\cos x}.$$

Відповідь: $y = \left(x^2 + C\right)e^{-\cos x}$.

Задача 6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – сталі дійсні числа. Рівняння:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (*)$$

($f(x) \equiv 0$) називається однорідним.

Структуру загального розв'язку однорідного рівняння (*) встановлює наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння (*), то загальний розв'язок цього рівняння є їх лінійна комбінація:
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$,
де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Означення 2. **Характеристичним рівнянням** для рівняння (*) називається алгебраїчне рівняння n-го степеня:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 .$$

Щоб скласти характеристичне рівняння для диференціального рівняння (*), необхідно в диференціальному рівнянні замінити невідому функцію у на одиницю, а кожну похідну шуканої функції $y^{(n)}, y^{(n-1)},..., y'$ величиною k в степені, що дорівнює порядку похідної ($k^n, k^{n-1},..., k$ відповідно).

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (**)$$

Характеристичним для нього буде квадратне рівняння:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (**) в залежності від характеру коренів характеристичного рівняння має різний вигляд. Розглянемо окремі випадки:

1) якщо характеристичне рівняння має два різних дійсних корені $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок рівняння (**) має вигляд $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) якщо характеристичне рівняння має два однакових дійсних корені $k_1 = k_2$ (корінь k_1 кратності 2), то загальний розв'язок рівняння (**) має вигляд $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$;

3) якщо характеристичне рівняння має два комплексно спряжені корені $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$, то загальний розв'язок рівняння (**) має вигляд $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

Розглянемо задачу Коші:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad a_1, a_2 = const, \qquad (***)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння (***) визначається такою теоремою.

Теорема 2. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку (***) дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку даного рівняння і загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння.

Для досить, широкого класу правих частин спеціального виду частинний розв'язок рівняння (***) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Нехай права частина рівняння (***) має спеціальний вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x],$$

де α і β – дійсні числа, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n-го та m-го степеня з дійсними коефіцієнтами. В такому випадку частинний розв'язок рівняння (***) потрібно шукати у вигляді:

$$z = x^r e^{\alpha x}[M_s(x)\cos \beta x + N_s(x)\sin \beta x],$$

де $M_s(x)$ і $N_s(x)$ – многочлени s-го степеня з невизначеними коефіцієнтами (s – більший із степеней n і m), r – кратність, з якою комплексне число $\alpha \pm i\beta$ співпадає з коренями характеристичного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

відповідного однорідного диференціального рівняння:

$$Y'' + a_1 Y' + a_2 Y = 0 .$$

Зауваження. Якщо права частина рівняння (***) має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$, або $f(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) \sin \beta x$, то і в цих випадках частинний розв'язок потрібно шукати в "повному вигляді":

$$z = x^r e^{\alpha x} \left[M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x \right].$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + y' = 4 \sin x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$Y'' + Y' = 0 .$$

Його характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$, а корені $k_1 = 0$; $k_2 = -1$.

Корені дійсні і прості $(k_1 \neq k_2)$, тому загальний розв'язок матиме вигляд:

$$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad \Rightarrow \qquad Y = C_1 + C_2 e^{-x} .$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 4 \sin x = P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$, тобто $n = 0$ і $\beta = 1$. Число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не співпадає з жодним з коренів характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$z = A \sin x + B \cos x .$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B знайдемо похідні:

$$z' = A \cos x - B \sin x \qquad\qquad z'' = -A \sin x - B \cos x$$

Підставимо отримані значення z, z' і z'' в початкове рівняння $y'' + y' = 4 \sin x$:

$$-A \sin x - B \cos x + A \cos x - B \sin x = 4 \sin x \Rightarrow (-A - B) \sin x + (A - B) \cos x = 4 \sin x$$

Знайдемо A, B методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \sin x: &\quad -A - B = 4 \\ \cos x: &\quad A - B = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -2 \\ B &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad z = -2 \sin x - 2 \cos x .$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $y = Y + z$, отже

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - 2 \sin x - 2 \cos x$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші знайдемо похідну y':

$$y' = -C_2 e^{-x} - 2 \cos x + 2 \sin x$$

і підставимо y і y' в початкові умови $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - 2 \sin 0 - 2 \cos 0 = -1 \\ y'(0) &= -C_2 - 2 \cos 0 + 2 \sin 0 = 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_2 = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 6 \\ C_2 = -5 \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші буде мати вигляд $y = 6 - 5e^{-x} - 2 \sin x - 2 \cos x$.

Відповідь: $y = 6 - 5e^{-x} - 2 \sin x - 2 \cos x$.

Задача 7. Дослідити на збіжність числові ряди.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Вираз виду

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,, \qquad (*)$$

де $u_n\in R$, називається **числовим рядом**; числа $u_1, u_2, ..., u_n$ – членами ряду, число u_n – **загальним членом ряду**.

Означення 2. Суми: $S_1=u_1$, $S_2=u_1+u_2$, ..., $S_n=u_1+u_2+...+u_n$, ... називається частковими сумами ряду (*).

Означення 3. Якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум S_n, при $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то ряд називають збіжним, а число S – його сумою. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не існує або нескінченна, то ряд називається розбіжним.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо числовий ряд (*) збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Обернене твердження не вірне. Наприклад, для гармонійного ряду

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

виконується необхідна умова збіжності:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, але цей ряд є розбіжним.

Достатні ознаки збіжності рядів з додатніми членами.

Нехай задано два ряди з додатніми членами:

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,,$$

$$v_1+v_2+...+v_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}v_n\,.$$

Перша ознака порівняння. Якщо для всіх $n\ge n_0$ виконується нерівність $0<u_n\le v_n$, то:

1) із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$;

2) із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

Часто досліджувані ряди порівнюють з рядом, членами якого є члени геометричної прогресії $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, $a\ne 0$, яка збігається при $|q|<1$ і розбігається при $|q| \geq 1$, або з узагальненим гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$).

Друга ознака порівняння. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, то обидва ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Радикальна ознака Коші. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то: при $\rho < 1$ числовий ряд збігається, при $\rho > 1$ – розбігається; при $\rho = 1$ питання про збіжність залишається невирішеним.

Ознака Деламбера. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{n_n} = \rho$, то: при $\rho < 1$ ряд збігається; при $\rho > 1$ – розбігається; при $\rho = 1$ питання про збіжність залишається невирішеним.

Приклад 1,а. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 2}{5n^2 + 1}$.

Розв'язання:

Це додатній числовий ряд з n-им членом $u_n = \frac{3n^2 - 2}{5n^2 + 1}$.

Порівіримо, чи виконана необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2}{5n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Отже, ряд розбігається.
Відповідь: ряд розбіжний.

Приклад 1,б. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+2)^4}$.

Розв'язання:

Це додатній числовий ряд з n-м членом $u_n = \frac{2n^2}{(n+2)^4}$, для якого виконана необхідна ознака збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, оскільки степінь чисельника менший за степінь знаменника (2<4).

Порівняємо його зі збіжним узагальненим гармонійним рядом $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

За другою ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+2)^4} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+2)^4}\cdot\frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{n^4+8n^3+24n^2+32n+16} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{8}{n}+\frac{24}{n^2}+\frac{32}{n^3}+\frac{16}{n^4}} = 4 \neq 0.$$

Отже, ряди поводять себе однаково, тобто обидва збігаються.
Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{3^n}$.

Розв'язання:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{3^n}$ – це додатній числовий ряд з n-м членом $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1}{3^n}$.

Для дослідження даного ряду використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-1/n}{1+1/n}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}47 < 1.$$

Отже, ряд збіжний.
Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(2n-1)!}$.

Розв'язання:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(2n-1)!}$ – це додатній числовий ряд з n-м членом $u_n = \dfrac{5^n}{(2n-1)!}$.

Тоді $(n+1)$-й член ряду має вигляд $u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(2n+1)!}$.

Для дослідження даного ряду використаємо ознаку Деламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n+1)!} : \frac{5^n}{(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}5\cdot\frac{1}{2n(2n+1)} = 5\cdot 0 = 0 < 1$$

Отже, ряд збігається.
Відповідь: ряд збіжний.

Задача 8. Знайти область збіжності степеневого ряду.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Числові ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... \qquad (*)$$

з членами довільних знаків називають знакозмінними.

Означення 2. Знакозмінний ряд (*) називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... \qquad (**)$$

Означення 2. Ряд (*) називають умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд (**) розбігається.

Означення 3. Ряд (*) називають знакочергувальним, якщо його члени почергово змінюють знак, а саме:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad \text{де} \quad u_n > 0$$

Теорема Лейбніца. Якщо члени знакочергувального ряду такі, що $u_1 > u_2 > u_3$ ... і $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, то цей ряд збігається, його сума додатня і не перевищує першого члена.

Означення 4. **Степеневим рядом** називається ряд виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + (x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

де $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ – сталі, які називаються коефіцієнтами степеневого ряду. При $x_0 = 0$ отримаємо частковий випадок степеневого ряду:

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Означення 5. **Областю збіжності** степеневого ряду є такий інтервал $(x_0 - R, \ x_0 + R)$, що в будь-якій точці x, що належить цьому інтервалу, ряд збігається абсолютно; в точках $x_0 - R$ та $x_0 + R$ ряд може збігатись абсолютно чи умовно або розбігатись; а в інших точках числової осі ряд розбігається. Число R називається **радіусом збіжності** степеневого ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду визначається формулами:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{або} \quad R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (***)$$

якщо, починаючи з деякого $n \geq n_0$, всі $a_n \neq 0$.

Для визначення області збіжності степеневих рядів спочатку використовують одну з формул (***), а потім окремо досліджують збіжність ряду в граничних точках отриманого інтервалу.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n$.

Розв'язання:

Це степеневий ряд з n-м членом $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$.

Знайдемо його радіус збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2+1} : \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Отже ряд збігається в інтервалі $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Дослідимо збіжність ряду в кінцевих точках:

1) Нехай $x = \frac{1}{2}$. Тоді ряд матиме вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Порівняємо його із збіжним узагальненим гармонійним рядом: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Оскільки $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, то за першою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ збігається і точка $x = \frac{1}{2}$ належить області збіжності.

2) Нехай $x = -\frac{1}{2}$. Тоді ряд матиме вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Це знакозмінний ряд, тому розглянемо ряд, складений з модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Цей ряд збіжний, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ збігається абсолютно і точка $x = -\frac{1}{2}$ належить області збіжності.

Остаточно, область збіжності заданого ряду $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Відповідь: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Задача 9. Розвинути функцію в ряд Маклорена.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Якщо функція $f(x)$ на проміжку $(-R;R)$ має похідні усіх порядків, обмежені деяким числом, то її можна подати у вигляді збіжного ряду:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!},$$

який називається рядом Маклорена. Наведемо розвинення основних елементарних функцій у ряди Маклорена:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\ln(1+\mathrm{x})=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad x\in(-1;1];$$

$$\mathrm{arctg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1;1];$$

$$(1+\mathrm{x})^m=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\times\cdots\times(m-n+1)x^n}{n!},\quad m\notin N,\quad x\in(-1;1).$$

Приклад. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2}$.

Розв'язання:

Використаємо розвинення в ряд Маклорена функції $\mathrm{arctg}\,x$:

$$\mathrm{arctg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad(-1\le x\le 1)$$

Замінюючи в ньому x на $\frac{x^2}{2}$ отримаємо розвинення в ряд заданої функції:

$$\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{24}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{x^{14}}{896}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)},\quad\left(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\right)$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{24}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{x^{14}}{896}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)}.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ВАРІАНТ 1

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}dx$ **2)** $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

3) $\int x\sin 2x\,dx$ **4)** $\int \frac{x\,dx}{x^2+7x+12}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=1-x$ і $y=x^2-1$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y'\sin^2 x+y=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; **2)** $y'\cos x-y\sin x=\cos^2 x$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+4y=2\sin 2x-\cos 2x \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^4+5}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2n!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\ln\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$.

ВАРІАНТ 2

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}dx$ **2)** $\int x^2\cos x^3\,dx$

3) $\int x e^{-x}dx$ **4)** $\int \frac{2x\,dx}{x^2-8x+12}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2+2x+10}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$, $y=-2x$ і $x=1$.

4. Розв'язати задачу Коші: $xy' + y^2 = 0, \quad y(1) = 1.$

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$; **2)** $y' - \frac{y}{x} = x^2.$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n-1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n5^n}}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n.$

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \cdot e^{-x^2}.$

ВАРІАНТ 3

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$ **2)** $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$

3) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ **4)** $\int \frac{4x^2 + 3x - 3}{x^3 - x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - x^2$ і $y = x.$

4. Розв'язати задачу Коші: $(1 + x^2)y' - y = 0, \quad y(0) = e.$

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' - y = x$; **2)** $y' - \frac{y}{x} = x \sin x.$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 4xe^x \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^5+3}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n n!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 x^n.$

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \sin 2x.$

ВАРІАНТ 4

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x + x^2 e^x + 1}{x^2} dx$ **2)** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$

3) $\int x \cos 3x\, dx$ **4)** $\int \frac{4\,dx}{x^2 - 4x}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{2}$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' = (y+1)\operatorname{tg} x$, $y(0) = 4$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$; **2)** $2xy' - 6y = x^2$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 5y' = \sin 5x \qquad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{n^3 - 1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \cos \sqrt{x}$.

ВАРІАНТ 5

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 + 8}{x} dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx$

3) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$ **4)** $\int \frac{x+3}{x^2 + x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 1$ і $y = x + 1$.

4. Розв'язати задачу Коші: $xy' - 2y = 0$, $y(1) = 3$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = x + 2y$; **2)** $y' + y\text{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 4\sin x \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3}{n^2+5}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)2^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 4^n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

ВАРІАНТ 6

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{x^2 - 9}{x+3} dx$ **2)** $\int \dfrac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3) $\int \dfrac{x\,dx}{\cos^2 x}$ **4)** $\int \dfrac{x\,dx}{x^2 - 9x + 20}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2}{x^2+9} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 1 - x^2$ і $y = (x-1)^2$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' + y\ \text{tg}\,x = 0$, $y(0) = 5$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x}{y}$; **2)** $2xy' - 6y = x^5$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n \dfrac{1}{5^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2 2^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \dfrac{1}{x} \text{arctg}\, x^2$.

ВАРІАНТ 7

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}dx$ **2)** $\int \left(1+e^x\right)^5 e^x\,dx$

3) $\int \ln x\,dx$ **4)** $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x^2$ і $y=8-x^2$.

4. Розв’язати задачу Коші: $(1+x^2)y'=\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=0$.

5. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$; **2)** $xy'-y=x^2e^x$.

6. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+y'-2y=3e^x \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=3$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+7}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^{n+1}}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=x\ln\left(1-2x\right)$.

ВАРІАНТ 8

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ **2)** $\int \frac{\left(1+\mathrm{tg}x\right)^3}{\cos^2 x}dx$

3) $\int x\sin 5x\,dx$ **4)** $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=(x-2)^2$ і $y=x$.

4. Розв’язати задачу Коші: $x\sin y\cdot y'=\cos y$, $y\left(2\right)=0$.

5. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$; **2)** $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + y = 2e^x \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+8}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+2)^{n+1}}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = xe^{x^3}$.

ВАРІАНТ 9

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x-2)(x+2)}{x} dx$ **2)** $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

3) $\int x^3 \ln x \, dx$ **4)** $\int \frac{3x+7}{x^2+3x+2} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \sin x \, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y'\sqrt{1-x^2} = y$, $y(0) = e$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $2y' = \frac{2y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$; **2)** $y' + 3x^2 y = e^{-x^3}$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y = 2\sin x + 2\cos x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x\sin\frac{x}{2}$.

ВАРІАНТ 10

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 2^x + x^2 - 2}{x^3} dx$ **2)** $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

3) $\int x e^{2x} dx$ **4)** $\int \frac{dx}{x^2 + x}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $x y' + \sqrt{1 - y^2} = 0$, $y(2) = 0$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = 4\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{y}{x}$**;** **2)** $y' + y\,tgx = \sin x \cos x$**.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 9y' - 10y = 11e^x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 12$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 2}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n \cdot 5^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^3 + 2n}{8n^3 + 1}\right)^{\frac{n}{5}}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \cos 3x$.

ВАРІАНТ 11

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ **2)** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2)}$

3) $\int x \ln x\, dx$ **4)** $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 5x + 6}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 5 - x^2$ і $y = 2 - 2x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' = 2xy + 2x$, $y(1) = 0$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = x + y$ **;** **2)** $y' - 2xy = e^{x^2}$ **.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 2y'' + y' = 6x^2 \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = -7, \quad y''(0) = 11$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{n+1} \right) \right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^{n+1}}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1) \cdot 7^n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{x}{1+x^3}$.

ВАРІАНТ 12

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(5x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{2\ln x - 1}}{x} dx$

3) $\int \arcsin x \, dx$ **4)** $\int \frac{2\,dx}{x^2 - 9x + 20}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x \sin x \, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' = e^{x-y}$, $y(0) = \ln 3$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' + \left(\frac{y}{x} \right)^2 = \frac{y}{x}$ **;** **2)** $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$ **.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 2\cos x \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n^2+3n+2)^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(n+2)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1)^2}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

ВАРІАНТ 13

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+6}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \frac{\arcsin x + 4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3) $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$ **4)** $\int \frac{4\,dx}{x^2-2x-3}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 2 - x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $2yy'\operatorname{ctg} x + 1 = 0$, $y(0) = 2$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'(y-x) = y^2$; **2)** $y' + \frac{3}{x}y = \frac{5}{x^4}$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 6y = e^x(2x^2 - 2x - 7) \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^4-3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2n}{2n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+8)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln(1-x)}{x}$.

ВАРІАНТ 14

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)^2}{x}dx$ **2)** $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx$

3) $\int x^2 e^x\, dx$ **4)** $\int \frac{dx}{x^3+x}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^{5} \frac{dx}{x^2-8x+17}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 3 - x^2$ і $y = 1 - x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y'\operatorname{ctg} x = y + 1$, $y(0) = 2$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $yy' - xy' = \dfrac{y^2}{x}$ **;** **2)** $y' - \dfrac{1}{x^2+1} y = (3x+4)e^{arctgx}$ **.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' - 3y = 4\cos 2x - 7\sin 2x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+6}{n}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n-2}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{(2n+2)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x^2 e^{-2x}$.

ВАРІАНТ 15

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$ **2)** $\int (e^x - 5)^3 e^x \, dx$

3) $\int \arccos x \, dx$ **4)** $\int \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - x^2} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^7 \dfrac{dx}{x^2 - 8x + 25}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = (x+1)^2$ і $y = 4$.

4. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{4 + x^2}\, y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 0$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = \left(1 + \dfrac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$**;** **2)** $xy' - y = x^2 \sin x$**.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = x^3 + 1 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3 - 2}{n^4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n^2+3) \cdot 3^n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x^2 \sin 3x$.

ВАРІАНТ 16

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x-2}}{\cos^2 x}dx$

3) $\int x\, 2^{3x}\, dx$ **4)** $\int \frac{4x^2-8x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=2-x^2$ і $y=x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y'\cos^2 x - y = 0$, $y(0)=e$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = x + y$**;** **2)** $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$**.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y = 4\sin x \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^3+4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-10}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=(1+5x)^{\frac{1}{4}}$.

ВАРІАНТ 17

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \left(x^2+4\right)\sqrt[3]{x}\, dx$ **2)** $\int \frac{(2-\mathrm{arctg}\,x)^2}{1+x^2}dx$

3) $\int x^4 \ln x\, dx$ **4)** $\int \frac{3dx}{x^2-5x+6}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=3-x^2$ і $y=x+1$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' - 2xy = 0$, $y(2)=1$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $x^2 y' + y^2 = x\, y$; **2)** $xy' - y = x^2\cos x$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y' - 2y = (x+2)e^{-x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{2n-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{7^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \operatorname{arctg} 2x$.

ВАРІАНТ 18

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2}{\sqrt[3]{x}} dx$ **2)** $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3) $\int \ln 3x \, dx$ **4)** $\int \dfrac{dx}{x^2 - 9x + 20}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^9 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' = (y-1) ctg\, x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$**;** **2)** $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{3}{x}$**.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y' - 6y = xe^{2x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+9}{n^4 - 1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n-10}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{36^n}{(3n-1)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n + 1} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \dfrac{1}{x^2} \ln\left(1 - x^2\right)$.

ВАРІАНТ 19

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int 2^{x+1} \cdot 3^x \, dx$ **2)** $\int \frac{x^2}{2x^3 - 3} dx$

3) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$ **4)** $\int \frac{8x - 8}{x^3 - 4x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 2$ і $y = -x^2$.

4. Розв'язати задачу Коші: $xy' + 3y = 0$, $y(1) = 2$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = y + x e^{\frac{y}{x}}$ **;** **2)** $y' - \cos x \cdot y = (3x + 2)e^{\sin x}$ **.**

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' = x^3 + x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^4 + 3}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 3}{\sqrt{n} \cdot 5^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x e^{\frac{x}{3}}$.

ВАРІАНТ 20

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2 - 25}{x + 5} dx$ **2)** $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$

3) $\int x \cos 6x \, dx$ **4)** $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x^3 + x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' - y \operatorname{ctg} x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = 1 + \frac{2y}{x}$**;** **2)** $y' + \frac{y}{x} = 21x$**.**

6. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' - 5y = xe^x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{5n}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3n!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\sin\left(x^2\right)}{x}$.

ВАРІАНТ 21

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x}} dx$ **2)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

3) $\int x^2 \ln x \, dx$ **4)** $\int \frac{5x^2 + 6x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 1$ і $y = 1 - x$.

4. Розв’язати задачу Коші: $\sqrt{1-x^2}\, y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 1$.

5. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xyy' = y^2 + 2x^2$**;** **2)** $y' + y = \left(x^2 + 4x - 7\right)e^{-x}$**.**

6. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' = x^2 - x + 3 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{n^4 + 2}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1)^2}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

ВАРІАНТ 22

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x^2+2)^3}{x}dx$ **2)** $\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$

3) $\int \arcsin 2x\,dx$ **4)** $\int \frac{x^2+3x-2}{x^3-x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=(x-1)^2$ і $y=1-x^2$.

4. Розв'язати задачу Коші: $x\cos y \cdot y' = \sin y$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' + e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$; **2)** $y' - \frac{1}{\cos^2 x}y = (2x+3)\cdot e^{tgx}$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+16y=5\sin 2x \qquad y(0)=-3,\quad y'(0)=5.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n^2}{n\cdot 8^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}}x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=(1+3x)^{\frac{1}{6}}$.

ВАРІАНТ 23

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int (9-x)^2\sqrt{x}\,dx$ **2)** $\int \frac{x}{3x^2+4}dx$

3) $\int \mathrm{arcctg}\,x\,dx$ **4)** $\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x^3$, $y=8$ і $x=0$.

4. Розв'язати задачу Коші: $xy' - \sqrt{1-y^2}=0$, $y(3)=0$.

5. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$; **2)** $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = -\sin x \cdot e^{\arcsin x}$.

6. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 25y = 5\cos 3x \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n-2}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n+3)}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n^2-2)\cdot 3^n}$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{x^2}$.

ВАРІАНТ 24

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$ **2)** $\int\frac{e^{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2}dx$

3) $\int\arccos 4x\,dx$ **4)** $\int\frac{4x^2-4}{x^3+2x^2}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^5\frac{dx}{x^2-2x+17}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

4. Розв’язати задачу Коші: $y' + 4xy = 0$, $y(1) = 1$.

5. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'\left(\frac{y}{x}-1\right) = \frac{y^2}{x^2}$; **2)** $y' + \frac{1}{\sin^2 x}y = 2\cos x \cdot e^{ctgx}$.

6. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$3y'' - 4y = x + 1 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{5n+6}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^{n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2^n n!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)2^n}x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln(1+3x)}{x}$.

ВАРІАНТ 25

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin^2 x} dx$ **2)** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$

3) $\int x e^{-5x}\, dx$ **4)** $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+2x^2+x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x$ і $y = (x-2)^2$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y' = xy^2 + x$, $y(1) = 0$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $x^2 y' = 4(x^2 + y^2) + xy$; **2)** $y' + 2xy = -2x^3$.

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x \qquad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3+9}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{7n+1}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x\cos 2x$.

ВАРІАНТ 26

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}\right) dx$ **2)** $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}$

3) $\int (x+2)\sin x\, dx$ **4)** $\int \frac{2x+1}{x^2+5x+6} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-4}^{1} \frac{dx}{x^2+8x+41}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^3$.

4. Розв'язати задачу Коші: $2yy' \operatorname{tg} x - 1 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $2x^3y' + y^3 = 2x^2 y$ 2) $y' - \dfrac{y}{x} = x \cdot \operatorname{tg} x$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 9y = 15\sin 2x \qquad y(0) = -7, \quad y'(0) = 0.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^6 - 2}{3n^3}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{n^n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n}{\sqrt{n3^n}}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+5)} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

ВАРІАНТ 27

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$ 2) $\int \dfrac{x^3}{5x^4 + 1} dx$

3) $\int \operatorname{arcctg} 2x \, dx$ 4) $\int \dfrac{5x}{x^2 + x - 6} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{1}^{e^{\pi/2}} \dfrac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 3x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{9 + x^2}\, y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'(y - x) = \dfrac{y^2}{x}$ 2) $y' - \dfrac{1}{x+5} y = e^{2x}(x+5)$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y = (6x + 5)e^{-2x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{3}{4}.$$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + 9}{n^4 - 1}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n^2 + 1} \right)^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{7^n (3n + 2)}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3n - 1} x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg} 3x$.

ВАРІАНТ 28

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{x}dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x+5}}{1+x^2}dx$

3) $\int x^2 \sin x\, dx$ **4)** $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3-x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=2-2x$ і $y=5-x^2$.

4. Розв'язати задачу Коші: $y'\operatorname{tg}x = y+1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'-y=(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$ **2)** $y'+y\,tgx=\cos^2 x$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y'''-4y''+5y'=12e^{3x}$ $y(0)=4$, $y'(0)=8$, $y''(0)=31$.

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{n^5+2}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{5^n}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+5}x^n$.

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x}$.

ВАРІАНТ 29

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1-x)^2}{x^2}dx$ **2)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

3) $\int (2x-1)2^x\, dx$ **4)** $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x^2$ і $y=x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $(1+x^2)y'-y=0$, $y(0)=e$.

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = y + x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$ **2)** $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$ $y(0) = \dfrac{1}{4}, \quad y'(0) = \dfrac{3}{2}.$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 - 3}{n^3 + 4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(5n+2)}{(n+3)!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n+3}} x^n.$

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x^2 \cos\sqrt{x}.$

ВАРІАНТ 30

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **2)** $\int \sqrt{\sin x - 1}\cos x\,dx$

3) $\int x^2 \cos x\,dx$ **4)** $\int \dfrac{3x + 17}{x^2 + 2x - 3}\,dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{e-2}} \dfrac{3x^2}{x^3 + 2}\,dx.$

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^3$ і $y = x$.

4. Розв'язати задачу Коші: $x\,y' - y\ln y = 0, \quad y(2) = e^6.$

5. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \dfrac{y^2 + 2x^2}{xy}$ **2)** $y' - 12x^{11}y = (x+4)e^{x^{12}}$

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$ $y(0) = -3, \quad y'(0) = 0.$

7. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2 - 1}{n + 3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n^2}}{n!}$

8. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n+2} x^n.$

9. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \dfrac{x}{1 + 2x}.$

Змістовий модуль 4
Теорія ймовірностей. Математична статистика

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ЩОДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Задача 1. Обчислити ймовірності подій за класичним означенням.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. **Випадковим експериментом** називають випробування, результат якого неможливо однозначно визначити умовами його проведення.

Означення 2. **Елементарною подією** називається кожен з найпростіших, тобто неподільних в рамках даного випробування, можливих результатів.

Означення 3. **Простором елементарних подій Ω** називається множина всіх елементарних подій даного випробування.

Означення 4. **Подією** називається будь-яка підмножина простору елементарних подій.

Означення 5. **Випадковою подією A** називається подія, яка в результаті даного випробування може відбутися, а може не відбутися.

Означення 6. **Достовірною подією Ω** називається подія, яка обов'язково відбудеться в умовах даного випробування.

Означення 7. **Неможливою подією Ø** називається подія, яка не може відбутися в умовах даного випробування.

Означення 8. Кажуть, що елементарні події сприяють появі події А, якщо вони є елементами підмножини простору елементарних подій, що задає цю подію.

Означення 9. Елементарні події називають **рівноможливими**, якщо за умов проведення випробування можна вважати, що жодна з них не є більш можливою за іншу.

Класичне означення ймовірності

Означення 10. **Ймовірністю випадкової події A** називається число:

$$P(A)=\frac{M}{N}. \qquad (1)$$

де N – кількість всіх рівноможливих елементарних подій даного випробування, а M – кількість елементарних подій, що сприяють появі події A.

Методичні рекомендації щодо розв'язання задач

При розв'язанні задач цього типу, потрібно:

1. Побудувати простір елементарних подій та знайти кількість всіх елементарних подій даного випробування N.
2. Переконатись в тому, що всі елементарні події є рівноможливими.
3. Чітко визначити подію A та підрахувати кількість елементарних подій M, що сприяють її появі.
4. Підставити N та M в (1).

Приклад 1. У коробці знаходяться картки з буквами розрізної азбуки. Знайти ймовірність того, що на навмання обраній картці зображено голосну літеру.

Розв'язання:

Простір елементарних подій складається з тридцяти двох елементів (в українському алфавіті 32 букви), тому $N=32$. Усі картки є однаковими, тому елементарні події – рівноможливі.

Розглянемо подію A: обрана буква є голосною. Сприятливих для даної події результатів буде десять (всього 10 голосних букв), отже $M=10$.

За класичним означенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}.$$

Відповідь: $P(A)=\dfrac{5}{16}$.

Приклад 2. Кинуто дві гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що на обох випаде непарна кількість очок?

Розв'язання:

Гральна кость має 6 граней, на яких нанесено точки від 1 до 6. Таким чином, простір елементарних подій складається з тридцяти шести різних пар:

$\boxed{1;1}$	1;2	$\boxed{1;3}$	1;4	$\boxed{1;5}$	1;6
2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
$\boxed{3;1}$	3;2	$\boxed{3;3}$	3;4	$\boxed{3;5}$	3;6
4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
$\boxed{5;1}$	5;2	$\boxed{5;3}$	5;4	$\boxed{5;5}$	5;6
6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6

Усі ці елементарні події – рівноможливі.

Є дев'ять випадків, у яких на кожній з костей випаде непарна кількість очок (їх виділено в таблиці). Отже $N=36, M=9$.

За класичним означенням ймовірності

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

Задача 2. Обчислити ймовірності подій за допомогою формул комбінаторики.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Щоб обчислити ймовірність події A за класичним означенням, потрібно вміти знаходити кількість сприятливих елементарних подій та кількість всіх елементарних подій даного випробування. Для цього застосовують правила та формули комбінаторики.

Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B – n способами, то один з об'єктів A або B можна вибрати $m+n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами а об'єкт B – n способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати mn способами.

Основні формули комбінаторики

Нехай ми маємо m множин з кількістю $n_1, n_2, \ldots, n_m$ елементів відповідно. Тоді обрати m елементів по одному з кожної з цих множин можна $N = n_1 \cdot n_2 \times \ldots \times n_m$ способами (**основна формула комбінаторики**).

Результат вибору k елементів з сукупності n елементів називають **вибіркою з n елементів по k**. Якщо після вибору елемент повертається до сукупності і може знову бути обраний, то матимемо **вибірку з поверненням**, у разі відсутності повторного вибору – **вибірку без повернення**.

Вибірку, в якій враховується порядок вибору, називають **розміщеннями**: **з повтореннями**, якщо вибірка з поверненням або **без повторень**, якщо вибірка без повернення.

Перестановками з *n* елементів називають розміщення без повторень із n елементів по n. Кількість перестановок із n елементів обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Кількість розміщень без повторень із n елементів по k обчислюється за формулою:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1}$$

Кількість розміщень з повтореннями із n елементів по k елементів обчислюється за формулою:

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{2}$$

Вибірку, в якій порядок вибору не враховується називають **комбінаціями**, відповідно з повтореннями або без повторень.

Кількість комбінацій без повторень із n елементів по k обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{3}$$

а кількість комбінацій з повтореннями із n елементів по k – за формулою:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \tag{4}$$

Методичні рекомендації щодо розв'язання задач

За умовами задачі потрібно встановити:

а) враховується порядок вибору чи ні;

б) якою є відповідна вибірка: з поверненням, чи без повернення;

після чого скористатись відповідними формулами для обчислення n та m, а потім класичним означенням ймовірності.

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що у навмання обраному семизначному телефонному номері всі цифри різні, вважаючи, що перша цифра може бути будь-якою.

Розв'язання:

В даній вибірці порядок вибору має значення, тому вона є розміщенням.

Оскільки в телефонних номерах цифри можуть повторюватись, то простір елементарних подій – це вибірка з поверненням. Тому, за формулою (2):

$$N = \overline{A}_{10}^{7} = 10^7 = 10000000.$$

Подія A – усі цифри різні, тобто дана підмножина простору елементарних подій є вибіркою без повернення, а тому за формулою (1):

$$M = A_{10}^{7} == \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3} = 4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 604800.$$

І остаточно маємо:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{604800}{10000000} = 0{,}06048,$$

тобто лише у шести відсотках семизначних номерів усі цифри є різними.

Відповідь: $P(A) = 0{,}06048$.

Приклад 2. На книжковій полиці знаходиться 10 підручників, серед яких 4 з математики. Навмання береться 7 книжок. Визначити ймовірність того, що серед відібраних підручників виявиться 3 з математики.

Розв'язання:

Оскільки в даній вибірці порядок вибору значення не має і відібрані книжки на полицю не повертаються, то ми маємо справу з комбінаціями без повторень.

Із загальної кількості (10 підручників) 7 підручників можна вибрати

$$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!\cdot3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot1\cdot2\cdot3} = \frac{8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3} = 120$$

способами, тобто число всіх елементарних подій простору Ω дорівнює $N = 120$.

Далі розглянемо сприятливі для нас результати випробування.

З чотирьох підручників з математики можна вибрати три $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot1!} = 4$ способами, при цьому інші $7-3=4$ книжки мають бути підручниками з інших предметів. Вибрати ці 4 підручника з $10-4=6$ нематематичних книжок на полиці можна $C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot2!} = 15$ способами.

Отже, число сприятливих результатів випробування за правилом добутку дорівнює $M = C_4^3 \cdot C_6^4 = 60$.

Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа результатів випробувань сприятливих для появи події, що розглядається, до числа всіх рівноможливих результатів випробувань:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^{7}} = \frac{60}{120} = 0{,}5.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}5$.

Приклад 3. На чотирьох картках написані літери О, П, С, Т. Яка ймовірність того, що отримають змістовне слово, яке складається з чотирьох літер, за умови:

1) навмання беруть по одній картці і кладуть послідовно поряд;
2) картки навмання беруть по одній, виписують літеру картки і повертають її до загалу?

Розв'язання:

Оскільки порядок літер у слові має значення, то дана вибірка є розміщенням.

1) У даному випадку маємо розміщення без повторень із 4-х елементів по 4, тобто перестановки з 4-х елементів. Отже

$$N = P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24\,.$$

Змістовних слів, які складаються з чотирьох літер є два: «пост» та «стоп», тому $M=2$, і

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}\,.$$

2) Картки після вибору повертають до загалу, тому маємо розміщення з повтореннями із 4-х елементів по 4, а значить

$$N=\overline{A}_4^{\,4}=4^4=256\,.$$

В цьому випадку змістовних слів, які складаються з чотирьох літер є п'ять: «пост», «тост», «осот», «стос» та «стоп», тому $M=5$, Отже

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{5}{256}\,.$$

Відповідь: 1) $P(A)=\dfrac{1}{12}$, 2) $P(A)=\dfrac{5}{256}$.

Задача 3. Обчислити ймовірності подій за допомогою основних теорем теорії ймовірностей

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої у тому ж самому випробуванні.

Означення 2. Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої у тому ж самому випробуванні.

Означення 3. **Сумою** $A+B$ (або об'єднанням $A\bigcup B$) подій A і B називається подія, яка полягає в тому, що настає принаймні одна з подій A,B.

Означення 4. **Добутком** AB (або перетином $A\bigcap B$) подій A і B називається подія, яка настає тоді і тільки тоді, коли одночасно настають обидві події A,B.

Означення 5. Дві події A і $\overline{A}$ називають **протилежними**, якщо вони несумісні і утворюють **повну групу:** подія A настає тоді, коли не настає $\overline{A}$, і навпаки ($A+\overline{A}=\Omega,\ A\cdot\overline{A}=\varnothing$).

Аксіоматичне означення ймовірності

Означення 6. Ймовірністю випадкової події A називається число $P(A)$, що задовольняє таким аксіомам:

Аксіома 1. $P(A) \geq 0$ для будь-якої події A.

Аксіома 2. $P(\Omega) = 1$ для достовірної події Ω.

Аксіома 3. Якщо A_1, A_2, ..., A_n,... будь-яка зліченна послідовність попарно несумісних подій, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема 1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\varnothing) = 0.$$

Теорема 2. $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$.

Теорема 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема 4. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій A або B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Означення 7. **Умовною ймовірністю** $P(A/B)$ називають ймовірність події A, обчислену у припущенні, що подія B вже відбулася.

Означення 8. Події A і B називають **незалежними**, якщо

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

тобто поява події A не змінює ймовірність появи події B. У протилежному випадку події A і B називають **залежними**. Тоді

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Зауваження 1. Для подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, у разі їх незалежності у сукупності, маємо:

$$P(A_1 A_2 A_3 \times \cdots \times A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \times \cdots \times P(A_n), \quad (1)$$

Якщо ж вони залежні, то

$$P(A_1 A_2 A_3 \times \cdots \times A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \times \cdots \times P(A_n / A_1 A_2 \times \cdots \times A_{n-1}). \quad (2)$$

Зауваження 2. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... , $\overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_n}). \quad (3)$$

Методичні рекомендації щодо розв'язання задач

При розв'язанні задач, потрібно вміти:

1. Чітко визначати події.
2. Перевіряти їх на сумісність та залежність.
3. Правильно формулювати обернену подію.

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що у навмання обраному семизначному телефонному номері

1) всі цифри різні або всі цифри однакові;
2) хоча б дві цифри однакові.

Розв'язання:

Позначимо A_1, A_2, A_3,…, A_7 випадкові події: перша, друга, третя і, відповідно, сьома цифри.

Позначимо події A – всі цифри різні;
B – всі цифри однакові;
C – хоча б дві цифри однакові.

1) Події A_1, A_2, A_3,…, A_7 – залежні, тому скористаємось формулою (2), Для цього обчислимо потрібні нам ймовірності. Першою може бути будь-яка цифра, тому $P(A_1)=1$. Тепер окремо розглянемо події A і B. Для того, щоб відбулась подія A необхідно, щоб друга цифра відрізнялась від першої, тобто її появі сприятимуть 9 можливостей з десяти. Тому $P(A_2/A_1)=\frac{9}{10}$. Для вибору третьої цифри маємо 8 сприятливих можливостей з десяти, звідки $P(A_3/A_1A_2)=\frac{8}{10}$. Аналогічно знаходимо й інші умовні ймовірності. За формулою (2) маємо:

$$P(A)=P(A_1A_2A_3\times\cdots\times A_7)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\times\cdots\times P(A_7/A_1A_2\times\cdots\times A_6)=$$
$$=1\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=0{,}06048,$$

що співпадає з результатом, отриманим у прикладі 1 до задачі 2.

Для того, щоб відбулась подія B, необхідно, щоб друга та всі подальші цифри співпадали з першою, тобто усі умовні ймовірності дорівнюють $\frac{1}{10}$ і

$$P(A)==1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=0{,}000001,$$

Оскільки події A і B – несумісні, то
$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}06048+0{,}000001=0{,}060481$.

2) Оберненою до «хоча б дві цифри однакові» є подія «всі цифри різні», тобто $C=\overline{A}$, тому

$$P(C)=1-P(\overline{A})=1-0{,}06048=0{,}93952..$$

Відповідь: 1) $0{,}060481$; 2) $0{,}93952$.

Приклад 2. В урні міститься 9 червоних і 5 синіх кульок. Кульки з неї виймаються по одній без повернення. Таким чином вийняли 4 кульки. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) вийняли 4 кульки одного кольору;
2) вийняли хоча б одну червону кульку.

Розв'язання:

Позначимо A_1, A_2, A_3, A_4 випадкові події, які полягають в тому, що перша, друга, третя та четверта вийняті кульки – червоні. Тоді $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$ – протилежні події – кульки нечервоні (сині).

Позначимо події A – вийняли 4 червоні кульки;
B – вийняли 4 сині кульки;
C – вийняли хоча б одну червону кульку.

Події A_1, A_2, A_3, A_4 – залежні, тому за умовою задачі:

$$P(A_1)=\frac{9}{14},\quad P(A_2/A_1)=\frac{8}{13},\quad P(A_3/A_1A_2)=\frac{7}{12},\quad P(A_4/A_1A_2A_3)=\frac{6}{11},$$

$$P(\overline{A_1})=\frac{5}{14},\quad P(\overline{A_2}/\overline{A_1})=\frac{4}{13},\quad P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{3}{12},\quad P(\overline{A_4}/\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{2}{11}.$$

Тоді

1) 4 кульки одного кольору означає, що всі 4 – червоні **або** всі 4 – сині, тобто необхідно знайти ймовірність події $A+B$. Оскільки ці події – несумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$. За формулою (2)

$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3)=$$
$$=\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{126}{1001};$$
$$P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}/\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\,\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_4}/\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=$$
$$=\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5}{1001};$$
$$P(A+B)=\frac{126}{1001}+\frac{5}{1001}=\frac{131}{1001};$$

2) Оберненою до «вийняли хоча б одну червону кульку» є подія «вийняли 4 сині кульки», тобто $C=\overline{B}$, тому

$$P(C)=1-P(\overline{B})=1-\frac{5}{1001}=\frac{996}{1001}.$$

Відповідь: 1) $\frac{131}{1001}$; 2) $\frac{996}{1001}$.

Зауваження 3. Ймовірність події $A+B$ можна також знайти за формулами комбінаторики:

$$P(A+B)=\frac{C_9^4}{C_{14}^4}+\frac{C_5^4}{C_{14}^7}=\frac{131}{1001}.$$

Приклад 3. Два студенти можуть отримати оцінку «відмінно» з імовірностями 0,6 і 0,3 незалежно один від одного. Знайти ймовірності того, що отримає «відмінно»:

1) тільки один з них;

2) хоча б один.

Розв'язання:

Позначимо через A і B випадкові події, які полягають в тому, що відповідно перший і другий студенти отримають оцінку «відмінно».

Ймовірності цих подій за умовою задачі

$$P(A) = 0{,}6; \quad P(B) = 0{,}3.$$

Тоді $\overline{A}, \overline{B}$ – протилежні події – «відмінно» вони не отримали.

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

1) Ймовірність того, що перший студент отримав «відмінно», а другий – ні, за означенням незалежних подій:

$$P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42.$$

Ймовірність того, що «відмінно» отримав другий, а перший – ні:

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12,$$

а ймовірність того, що «відмінно» отримав тільки один з них за аксіомою 3 дорівнює:

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54,$$

Оскільки події $A\,\overline{B}$ і $\overline{A}B$ – несумісні.

2) Хоча б один із студентів отримав «відмінно» означає, що це перший або другий (подія $A + B$). Але події A і B – сумісні, тому за теоремою 4:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}6 \cdot 0.3 = 0{,}72.$$

Цей результат можна також отримати за формулою (3):

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}72.$$

Відповідь: 1) 0,54; 2) 0,72.

Задача 4. Обчислити ймовірності подій за допомогою формули повної ймовірності або формули Байєса.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Повною групою подій називають сукупність попарно несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, одна з яких обов'язково настає при випробуванні.

Якщо події $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ утворюють повну групу, то

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1 \qquad (1)$$

Події $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n$, які утворюють повну групу, називають **гіпотезами**, оскільки невідомо, яка саме з цих подій відбувається.

Формула повної ймовірності

Теорема 1. Імовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A, тобто

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A/B_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i). \qquad (2)$$

Рівність (2) називають «формулою повної ймовірності».

Формула Байєса

Нехай подія A може настати за умови появи однієї з подій $B_1,\ B_2,...,B_n$, які утворюють повну групу. Імовірність $P(A)$ визначається за формулою (2). Припустимо, що проведено випробування, в якому подія A настала. Як при цьому зміняться ймовірності гіпотез $B_1,B_2,\ldots,B_n$?

Якщо до випробування ймовірності гіпотез були $P(B_1),\ P(B_2),...,\ P(B_n)$, а внаслідок випробування відбулась подія A, тоді з урахуванням цієї події, умовні ймовірності гіпотез обчислюють за формулою Байєса:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \quad (i=1,\ 2,\ ...,\ n), \qquad (3)$$

де $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i)$

Ця формула дозволяє переоцінити ймовірності подій $B_1,\ B_2,...,B_n$ після того, як в результаті випробування подія A настала.

Методичні рекомендації щодо розв'язання задач

При розв'язанні задач, насамперед потрібно правильно визначити гіпотези. Перевіркою є виконання рівності (1).

Приклад. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 30% усіх деталей, від другого 45% і від третього – решта деталей. Перший цех допускає в середньому 0,08 браку, другий – 0,03 і третій – 0,1.

1) Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

2) До складального цеху надійшла стандартна деталь. Яка ймовірність того, що вона виготовлена в другому цеху?

Розв'язання:

Позначимо через A випадкову подію, яка полягає в тому, що до складального цеху надійшла стандартна деталь.

Розглянемо гіпотези:

B_1 – деталь надійшла від першого цеху, $P(B_1)=0{,}3$;

B_2 – деталь надійшла від другого цеху, $P(B_2)=0{,}45$;

B_3 – деталь надійшла від третього цеху, $P(B_3)=0{,}25$.

Умовна ймовірність події А (появи стандартної деталі) при кожній з цих гіпотез:

$$P(A/B_1)=1-0{,}08=0{,}92;$$
$$P(A/B_2)=1-0{,}03=0{,}97;$$
$$P(A/B_3)=1-0{,}1=0{,}9.$$

1) Обчислимо ймовірність того, що до складального цеху надійшла стандартна деталь за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)=$$
$$=0{,}3\cdot 0{,}92+0{,}45\cdot 0{,}97+0{,}25\cdot 0{,}9=0{,}276+0{,}4365+0{,}225=0{,}9375.$$

2) Обчислимо ймовірність того, що отримана стандартна деталь виготовлена в другому цеху за формулою Байєса:

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{0{,}45\cdot 0{,}97}{0{,}9375}=\frac{0{,}4365}{0{,}9375}=0{,}4656.$$

Відповідь: 1) 0,9375; 2) 0,4656.

Задача 5. Знайти ймовірності подій за допомогою формули Бернуллі.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення.1. **Послідовністю незалежних випробувань** відносно події A називається така послідовність випробувань, в яких ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результату інших випробувань.

Формула Бернуллі

Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p. Тоді ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно m разів обчислюється за формулою:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1}$$

де $C_n^m == \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $q=1-p$, $m=1,2,3,\ldots,n$.

Формула (1) називається **формулою Бернуллі**. Позначимо через $P_n(m_1\le m\le m_2)$ ймовірність того, що в n випробуваннях подія A настає не менше ніж m_1 і не більше ніж m_2 разів $(0\le m_1\le m_2\le n)$. Тоді

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \tag{2}$$

Найімовірніше число успіхів

Те значення m, якому відповідає найбільше значення $P_n(m)$, називається **найімовірнішим числом успіхів** і позначається m_0.

У загальному випадку найімовірніше число успіхів m_0 визначається з такої системи нерівностей:

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad (3)$$

Якщо $(np - q)$ неціле, то $m_0 = [np + p]$, де $[np + p]$ – ціла частина числа, якщо $(np - q)$ – ціле, то в цьому випадку буде два найімовірніших числа:

$$m'_0 = np - q, \qquad m''_0 = np + p.$$

Приклад. Прилад складається з чотирьох незалежних вузлів. Надійність кожного (ймовірність безвідмовної роботи) є величиною сталою і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що у приладі працюватиме безвідмовно:

1) два вузли;

2) не більше трьох вузлів;

3) найімовірніше число m_0 вузлів.

Розв'язання:

Ймовірність того, що вузол буде працювати $p = 0{,}8$. Тому ймовірність протилежної події (вузол вийде з ладу) відповідно дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Кількість вузлів – $n = 4$.

1) За формулою Бернуллі (1) знайдемо ймовірність того, що у приладі буде безвідмовно працювати рівно два вузли ($m = 2$):

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 6 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 0{,}1536.$$

2) Нехай у приладі безвідмовно працює не більше трьох вузлів (тобто три або менше). Тоді, за формулою (2),

$$P_4(m \le 3) = P_4(0 \le m \le 3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3)$$

З іншого боку, протилежна подія – працює більше трьох вузлів (тобто чотири). Тому

$$P_4(m \le 3) = 1 - P_4(m > 3) = 1 - P_4(4).$$

Легше знайти ймовірність протилежної події:

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{4-4} = 1 \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}4096.$$

Тоді

$$P_4(m \le 3) = 1 - P_4(4) = 1 - 0{,}4096 = 0{,}5904.$$

3) Найімовірніше число m_0 працюючих вузлів знайдемо з подвійної нерівності $np - q \le m_0 \le np + p$:

$$4 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le m_0 \le 4 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad 3 \le m_0 \le 4 \quad \Rightarrow \quad m_0 = 3 \text{ або } m_0 = 4.$$

Відповідні ймовірності знайдемо за формулою Бернуллі:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 = 4 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096,$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 1 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 1 \cdot 0{,}4096 \cdot 1 = 0{,}4096.$$

Відповідь: 1) 0,1536; 2) 0,5904; 3) 0,4096.

Задача 6. Обчислити ймовірності подій за допомогою асимптотичних формул для схеми Бернуллі.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо число випробувань n у схемі незалежних випробувань досить велике, то обчислення за формулою Бернуллі (1) стають досить громіздкими. Так, наприклад при $n = 50, m = 30, p = 0{,}1$ виникають труднощі обчислювального характеру, оскільки $P_{50}(30) = \dfrac{50!}{30!\cdot 20!}\cdot(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}$, при цьому $50! = 30414093\cdot 10^{57}$; $30! = 25{,}5286\cdot 10^{25}$; $20! = 24329020\cdot 10^{11}$ – дуже великі числа. Тому на практиці використовують наближені асимптотичні формули, які для достатньо великих n дають нескінченно малу відносну похибку обчислювання.

Теорема 1. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні є сталою і відмінною від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно m разів, обчислюється (тим точніше, чим більше n) за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{4}$$

де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функція $\varphi(x)$ парна $(\varphi(-x) = \varphi(x))$ і протабульована. В зв'язку з тим, що при $x \geq 4$ $\varphi(x) < 0{,}0001$, її значення наведені в таблиці на проміжку $[0, 4]$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Іноді потрібно визначити ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів. В цьому випадку використовуємо інтегральну теорему Лапласа.

Теорема 2. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що подія з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів, визначається за формулою:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{5}$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{\frac{t^2}{2}} dt$ називається функцією Лапласа.

Функція $\Phi(x)$ є непарною $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$ і протабульована. У зв'язку з тим, що при $x \geq 4$, $\Phi(x) = 04999...$, таблицю її значень досить мати на проміжку $[0, 4]$.

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність наближених формул (4), (5) для обчислення ймовірностей подій повторних випробувань для великих значень n знижується з наближенням значення p до нуля (тобто p – мале). У цьому випадку використовується асимптотична формула Пуассона.

Теорема 3. Якщо імовірність p появи події A в одному випробуванні мала ($p \to 0$), а кількість випробувань n велика ($n \to \infty$) , то ймовірність $P_n(m)$ появи події A m разів в n випробуваннях обчислюється за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (6)$$

де $\lambda = np$ $\quad (\lambda = const)$

Методичні рекомендації щодо розв'язання задач

Вибираючи формулу розрахунків для схеми Бернулі бажано керуватись такими міркуваннями:

1. Якщо n – велике, а p – не мале, тобто $npq \geq 10$, то для знаходження ймовірностей $P_n(m)$ і $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ використовують формули (4) і (5) відповідно.

2. Якщо n – велике, а p – мале настільки, що $npq \leq 9$, то для знаходження $P_n(m)$ використовують формулу (6).

3. За цих самих умов (n – велике, а p – мале) і невеликі кількості доданків можна використовувати формулу:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Приклад 1. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що при 100 випробуваннях подія A з'явиться:

1) рівно 50 разів;
2) від 60 до 70 разів;
3) не більше 55 разів.

Розв'язання:

1) За умовою $n = 100$; $p = 0{,}65$; $q = 0{,}35$; $m = 50$.

$$np = 100 \cdot 0{,}65 = 65, \quad \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}77;$$

Знайдемо значення аргументу x: $\quad x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{50 - 65}{4{,}77} \approx -3{,}14;$

Значення функції $\varphi(x)$ знайдемо в таблиці, враховуючи її парність:

$$\varphi(x) = \varphi(-3{,}14) = \varphi(3{,}14) \approx 0{,}0029.$$

Тому за локальною теоремою Муавра-Лапласа (формула (1)):

$$P_{100}(50) = \frac{0{,}0029}{4{,}77} \approx 0{,}0006.$$

2) За умовою задачі $m_1 = 60$, $m_2 = 70$.

Обчислимо аргументи функції Лапласа x_1 та x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60 - 65}{4{,}77} \approx -1{,}05; \qquad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 65}{4{,}77} \approx 1{,}05.$$

Таким чином, враховуючи непарність функції Лапласа, маємо:

$$P_{100}(60;70)=\Phi(1{,}05)-\Phi(-1{,}05)=\Phi(1{,}05)+\Phi(1{,}05)=0{,}3531+0{,}3531=0{,}7062.$$

3) $m_1=0$, $m_2=55$, тому

$$x_1=\frac{0-65}{4{,}77}\approx-13{,}63;\qquad x_2=\frac{55-65}{4{,}77}=-2{,}10.$$

За інтегральною теоремою Муавра-Лапласа маємо:

$$P_{100}(0;55)=\Phi(-2{,}10)-\Phi(-13{,}63)=-\Phi(2{,}10)+\Phi(13{,}63)=-0{,}4821+0{,}5=0{,}0179$$

Відповідь: 1) $P_{100}(50)\approx 0{,}0006$; 2) $P_{100}(60\le m\le 70)\approx 0{,}7062$;

3) $P_{100}(0\le m\le 55)\approx 0{,}0179$.

Приклад 2. Радіоапаратура містить 10000 незалежно працюючих мікроелементів. Імовірність того, що мікроелемент відмовить у роботі за добу, стала для кожного елемента і дорівнює 0,0002. Обчислити ймовірність таких подій: за добу відмовили у роботі:

1) три мікроелементи;
2) не більше ніж три;
3) не менше ніж три.

Розв'язання:

З умови задачі відомо, що $p=0{,}0002$, $n=10000$. Обчислимо значення $\lambda=np=10000\cdot 0{,}0002=2$. Імовірності подій, заданих в умові задачі, обчислимо за формулою (6).

1) Ймовірність відмови в роботі трьох елементів ($m=3$):

$$P_{10000}(3)\approx\frac{\lambda^3e^{-2}}{3!}=\frac{8}{6}e^{-2}=\frac{4}{3e^2}\approx 0{,}18$$

2) Ймовірність відмови не більше ніж трьох:

$$P_{1000}(m\le 3)=P_{1000}(0\le m\le 3)=P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)+P_{1000}(3).$$

$$P_{10000}(0)\approx\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=\frac{1}{e^2}=0{,}1353$$

$$P_{10000}(1)\approx\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=\frac{2}{e^2}=0{,}2707$$

$$P_{10000}(2)\approx\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=\frac{4}{2e^2}=\frac{2}{e^2}=0{,}2707$$

$$P_{10000}(3)\approx\frac{2^3\cdot e^{-2}}{3!}=\frac{8}{6e^2}=\frac{4}{3e^2}=0{,}1804$$

$$P_{1000}(m\le 3)=0{,}1353+0{,}2707+0{,}2707+0{,}1804=0{,}857\approx 0{,}86$$

3) Оскільки події «менше ніж три» і «не менше ніж три» – несумісні і утворюють повну групу. Тому

$$P_{10000}(3\le m\le 10000)=1-P_{10000}(m<3)=1-\left(P_{10000}(0)+P_{10000}(1)+P_{10000}(2)\right)=$$

$$=1-e^{-2}(1+2+2)=1-\frac{5}{e^2}=0{,}323.$$

Відповідь: 1) $P_{10000}(3)\approx 0{,}18$; 2) $P_{10000}(0\le m\le 3)\approx 0{,}86$; 3) $P_{10000}(m\ge 3)\approx 0{,}323$.

Задача 7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Нехай задано імовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P)$. Будь-яка дійсна функція $\xi = \xi(\omega)$, визначена на просторі елементарних подій, називається **випадковою величиною (ВВ).**

Означення 2. Якщо множина всіх можливих значень ВВ є зліченною (зокрема, скінченною), то ВВ називається **дискретною (ДВВ).**

Розглянемо дискретну випадкову величину ξ з множиною можливих значень $X = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$.

Означення 3. **Законом розподілу** дискретної випадкової величини називається відповідність між можливими значеннями випадкової величини x_i та їх ймовірностями p_i.

Існує три способи задання закону розподілу ДВВ: табличний, аналітичний, графічний.

Табличний спосіб полягає в складанні таблиці відповідності x_i і p_i у вигляді

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	**...**	p_n

Зауважимо, що x_i – довільні дійсні числа,

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{1}$$

Аналітичний спосіб полягає в написанні функціональної залежності між x_i і p_i в аналітичному вигляді $p_i = f(x_i)$. Прикладом такого способу задання є формула Бернуллі $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В цьому випадку ВВ приймає значення з множини $X = \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n\}$.

Графічний спосіб полягає в побудові **многокутника розподілу**. Многокутником розподілу називають ламану лінію, що послідовно сполучає точки з координатами $(x_i,\ p_i)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$.

Означення 4. **Функцією розподілу** ВВ ξ називається функція

$$F(x) = P\{\xi < x\} \tag{2}$$

Властивості функції розподілу $F(x)$:

1) $F(x)$ – неспадна, неперервна зліва функція.
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0;$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3) $F(x+0) = P\{\xi \leq x\};$ $\qquad P\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x)$
4) $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

Функція розподілу ДВВ ξ має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \,, \qquad (3)$$

де підсумування поширюється на ті індекси i, для яких $x_i < x$.

Графік $F(x)$ являє собою східчасту лінію з інтервалами сталості між сусідніми значеннями ξ.

Числові характеристики ДВВ

Означення 5 . **Математичним сподіванням ДВВ** ξ називається число

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,. \qquad (4)$$

(ряд збігається абсолютно).

Означення 6 . **Дисперсією ДВВ** ξ, називається число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 \,. \qquad (5)$$

Означення 7. **Середнім квадратичним відхиленням ДВВ** ξ, називається число

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} \,. \qquad (6)$$

Математичне сподівання Мξ характеризує центр розсіяння ξ, а дисперсія і середнє квадратичне відхилення є мірою розсіяння значень ВВ ξ навколо її математичного сподівання.

Для обчислення $D\xi$ зручно користуватися формулою

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M\xi)^2 \,. \qquad (7)$$

Зауважимо, що в (4), (7) суми скінченні, якщо ДВВ ξ набуває скінченне число значень.

Приклад. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу:

ξ	5,8	3,5	1,3	–1,4	–3,7
p	0,11		0,27	0,22	0,17

Побудувати графік функції розподілу $F(x)$, многокутник розподілу та знайти числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$.

Розв'язання:

Оскільки нам не задано ймовірність p_2, знайдемо її, зважаючи на те, що сума всіх імовірностей повинна дорівнювати одиниці (див. (1)). Тому

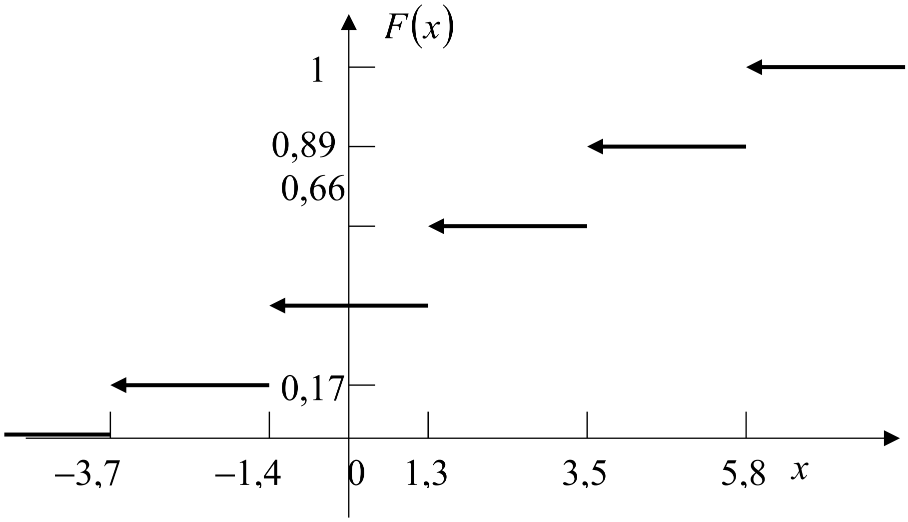
$$p_2 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4 + p_5) = 1 - (0{,}11 + 0{,}27 + 0{,}22 + 0{,}17) = 0{,}23$$

Перепишемо закон розподілу ДВВ у порядку зростання значень ξ:

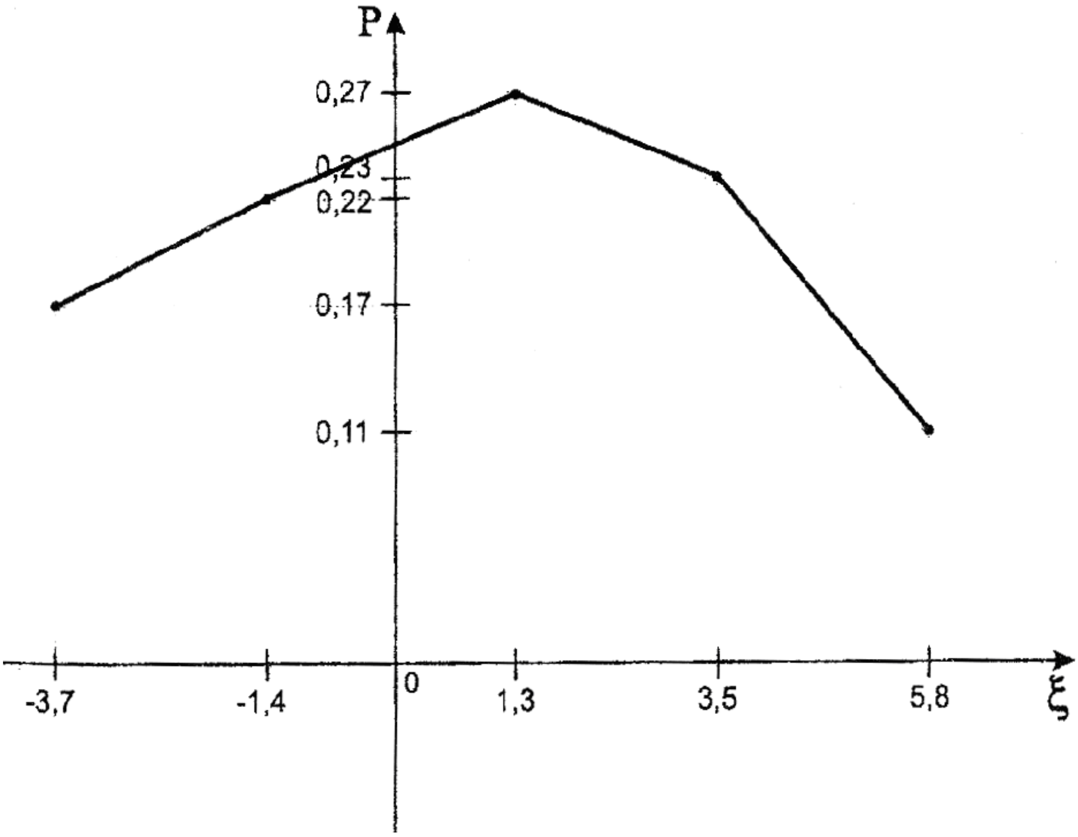
ξ	–3,7	–1,4	1,3	3,5	5,8
p	0,17	0,22	0,27	0,23	0,11

Знайдемо функцію розподілу за формулою (3) та побудуємо її графік:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le -3{,}7\\ 0{,}17 & -3{,}7<x\le -1{,}4\\ 0{,}17+0{,}22=0{,}39 & -1{,}4<x\le 1{,}3\\ 0{,}17+0{,}22+0{,}27=0{,}66 & 1{,}3<x\le 3{,}5\\ 0{,}17+0{,}22+0{,}27+0{,}23=0{,}89 & 3{,}5<x\le 5{,}8\\ 1 & x>5{,}8\end{cases}$$



Побудуємо многокутник розподілу



Обчислимо числові характеристики ДВВ ξ за формулами (4), (7), (6):

$$M\xi=\sum_{i=1}^{5}x_i p_i=5{,}8\cdot 0{,}11+3{,}5\cdot 0{,}23+1{,}3\cdot 0{,}27+(-1{,}4)\cdot 0{,}22+(-3{,}7)\cdot 0{,}17=0{,}857,$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2 p_i-(M\xi)^2=$$

$$=5{,}8^2\cdot 0{,}11+3{,}5^2\cdot 0{,}23+1{,}3^2\cdot 0{,}27+(-1{,}4)^2\cdot 0{,}22+(-3{,}7)^2\cdot 0{,}17--0{,}857^2\approx 8{,}997,$$

$$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{8{,}997}\approx 2{,}999.$$

Відповідь: $M\xi=0{,}857;\ D\xi=8{,}997;\ \sigma\,\xi=2{,}999$.

Задача 8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\,\beta]$. Побудувати графік щільності та функції розподілу.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Якщо множина всіх можливих значень ВВ являє собою скінчений або нескінченний проміжок дійсних чисел, то випадкова величина називається **неперервною (НВВ)**.

Сформулюємо декілька тверджень, що випливають із властивостей функції розподілу.

1. Для кожної НВВ її інтегральна функція $F(x)$ є неперервною.

2. Ймовірність того, що неперервна ВВ ξ прийме одне конкретне значення, дорівнює нулю: $p(\xi=x)=0$.

3. Якщо всі можливі значення ВВ ξ належать інтервалу $(a,\,b)$, то

1) $F(x)=0$ при $x\le a$;

2) $F(x)=1$ при $x\ge b$.

Означення 2. **Диференціальною функцією розподілу $f(x)$ (щільністю розподілу ймовірностей)** НВВ ξ називається перша похідна від її інтегральної функції:

$$f(x)=F'(x).$$

Властивості диференціальної функції розподілу:

1) $f(x)\ge 0$; **2)** $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$; **3)** $P(a\le\xi\le b)=\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-F(a)$;

4) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1.$

Числові характеристики НВВ ξ : математичне сподівання $M\xi$, дисперсія $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ – визначаються за її щільністю розподілу $f(x)$ за формулами:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx,\quad D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M\xi)^2,\quad \sigma_\xi=\sqrt{D\xi}.$$

Приклад. За щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ax, & 0<x\le 1.\\ 0, & x>1\end{cases}$$

визначити невідомий коефіцієнт a, знайти $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$, σ, $P(1/2\le X\le 2)$. Побудувати графіки функції та щільності розподілу.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо параметр a, використовуючи властивість 4) щільності розподілу. Оскільки $f(x)=0$, при $x\in(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_0^1 xdx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{a}{2}=1, \text{ звідки } a=2.$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x, & 0<x\le 1.\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Визначимо функцію розподілу $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$:

1) якщо $x\le 0$, то $F(x)=0$, оскільки $f(x)=0$;

2) якщо $0<x\le 1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int\limits_{0}^{x} tdt = t^2\Big|_0^x = x^2$;

3) якщо $x>1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{x} 0dx = t^2\Big|_0^1 = 1$,

тобто

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 1\ .\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^1 x\cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{2}{3}\approx 0{,}67.$$

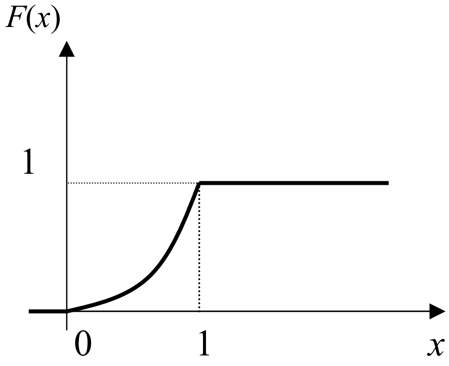
$$D\xi = M\xi^2-(M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\int_0^1 x^3\,dx - \frac{4}{9} = 2\left.\left(\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}\approx 0{,}06$$

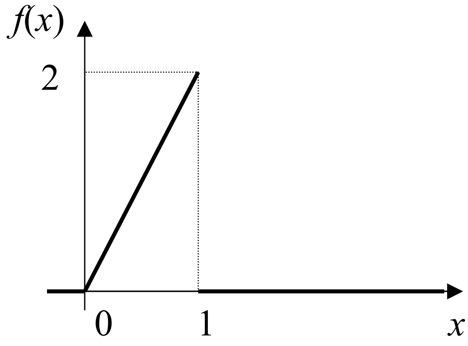
$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}06}\approx 0{,}24.$$

За формулою $P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$ знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал [1/2; 2]:

$$P(1/2\le X\le 2)=F(2)-F(1/2)=1-0{,}5^2=1-0{,}25=0{,}75.$$

Побудуємо графіки функції та щільності розподілу:





Відповідь: $a = 2$ **,** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$, $M(X) = \dfrac{2}{3}$, $D(X) = \dfrac{1}{18}$,

$\sigma = 0{,}24$, $P(1/2 \le X \le 2) = 0{,}75$.

Задача 9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу і знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha; \beta]$**.**

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Неперервна випадкова величина ξ, яка має щільність розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

називається **нормально розподіленою** випадковою величиною. Тут $a = M\xi$ – математичне сподівання ВВ ξ, а σ – середнє квадратичне відхилення, тобто $\sigma = \sqrt{D\xi}$, а можливі значення ВВ ξ заповнюють всю числову вісь. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

При $a = 0$ і $\sigma = 1$ крива нормального розподілу називається нормованою, а сам розподіл – стандартним. Для стандартного нормального розподілу маємо

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Ймовірність потрапляння нормальної випадкової величини ξ в заданий інтервал (α, β) дорівнює:

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа, тобто

$$p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Приклад. Відомі математичні сподівання $a = M\xi = -3,$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi = 1$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $(-4, 2)$.

Розв'язання:

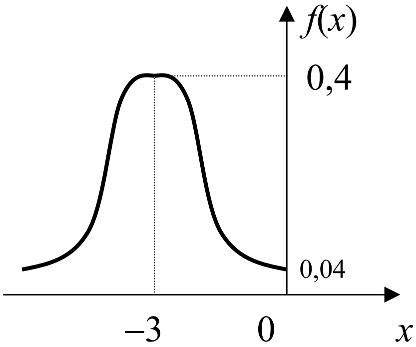
Дана функція за означенням має нормальний закон розподілу з параметрами $a = -3,\ \ \sigma = 1$. Тому щільність розподілу буде мати вигляд:

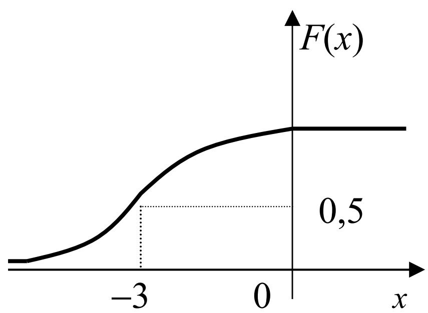
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{2}},$$

а функція розподілу –

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} dx.$$

Побудуємо графіки щільності та функції розподілу:





Обчислимо ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал. Маємо

$$P(-4 < \xi < 2) = \Phi(5) - \Phi(-1) = \Phi(5) + \Phi(1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413;$$

Відповідь: $P(-4 < \xi < 2) = 0{,}8413$.

Задача 10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Нехай проводиться випадковий експеримент з метою дослідження певної випадкової ознаки ξ, що характерна для великої кількості однотипних об'єктів

Означення 1. **Генеральною сукупністю (ГС)** називається множина всіх об'єктів з досліджуваною ознакою ξ. Число об'єктів N (скінченне або нескінченне) в ГС називається **об'ємом ГС.**

Означення 2. **Вибіркою об'єму n** $(n \le N)$ називається множина n об'єктів, випадково відібраних з ГС для дослідження ознаки ξ. Отримані значення $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки ξ називають **варіантами**, а відповідні їм числа n_i (кількість появ кожного значення) – **частотами.**

Означення 3. Послідовність варіант, що розташовані в зростаючому порядку, називається **варіаційним рядом**.

Означення 4. **Статистичним розподілом (статистичним рядом)** $\{(x_i, n_i), i = 1,...,k\}$ вибірки називається відповідність між варіантами та їх частотами.

Означення 5. **Відносними частотами** називається відношення частот до об'єму вибірки $w_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Статистичний ряд можна задавати у вигляді таблиці, в якій кожній варіанті x_i вибірки ставиться у відповідність її частота n_i:

$\tilde{o}_i$	x_1	x_2	…	x_n
n_i	n_1	n_2	…	n_k

або відносна частота w_i:

$\tilde{o}_i$	x_1	x_2	…	x_n
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Означення 6. **Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки)** називається функція $F_n^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $\xi < x$, де n_x – число варіант, менших x, n – об'єм вибірки. $n_x = \sum\limits_{x_i < x} n_i$, $F_n^*(x) = \sum\limits_{x_i < x} w_i$, тобто $F_n^*(x)$ є східчастою функцією.

Властивості емпіричної функції розподілу з точністю до позначень співпадають із властивостями функції розподілу ДВВ.

Означення 7. **Полігоном частот** називають ламану лінію, що послідовно сполучає точки з координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$.

Означення 8. **Вибірковим середнім** $\overline{x_B}$ називається середнє арифметичне значення вибіркової сукупності, тобто $\overline{x_B} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} x_i n_i$, або $\overline{x_B} = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i w_i$.

Означення 9. **Вибірковою дисперсією** D_B називається середнє арифметичне квадратів відхилень спостережуваних значень ознаки ξ від її вибіркового середнього, тобто

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \quad \text{або} \quad D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x_B}\right)^2 \quad \text{або} \quad D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2\, n_i - \left(\overline{x_B}\right)^2 .$$

Означення 10. **Вибірковим середнім квадратичним відхиленням** σ_B називається корінь квадратний з вибіркової дисперсії, тобто $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Означення 11. **Виправленою вибірковою дисперсією** S^2 називається величина $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$.

Означення 12. **Виправленим середнім квадратичним відхиленням** $S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}$.

Означення 13. **Модою** дискретного статистичного розподілу M_0^* називається варіанта, що має найбільшу частоту появи.

Приклад. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ;

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5
n_i	5	10	15	20	25	15	10

Розв'язання:

Обчислення зручно заносити в таблицю:

x_i	n_i	w_i	F_i^*	$x_i w_i$	$x_i^2 w_i$
2,5	5	0,05	0,05	0,125	0,3125
4,5	10	0,1	0,15	0,45	2,025
6,5	15	0,15	0,3	0,975	6,3375
8,5	20	0,2	0,5	1,7	14,45
10,5	25	0,25	0,75	2,625	27,5625
12,5	15	0,15	0,9	1,875	23,4375
14,5	10	0,1	1	1,45	21,025
$\sum$	100	1	–	9,2	95,15

В даній таблиці:

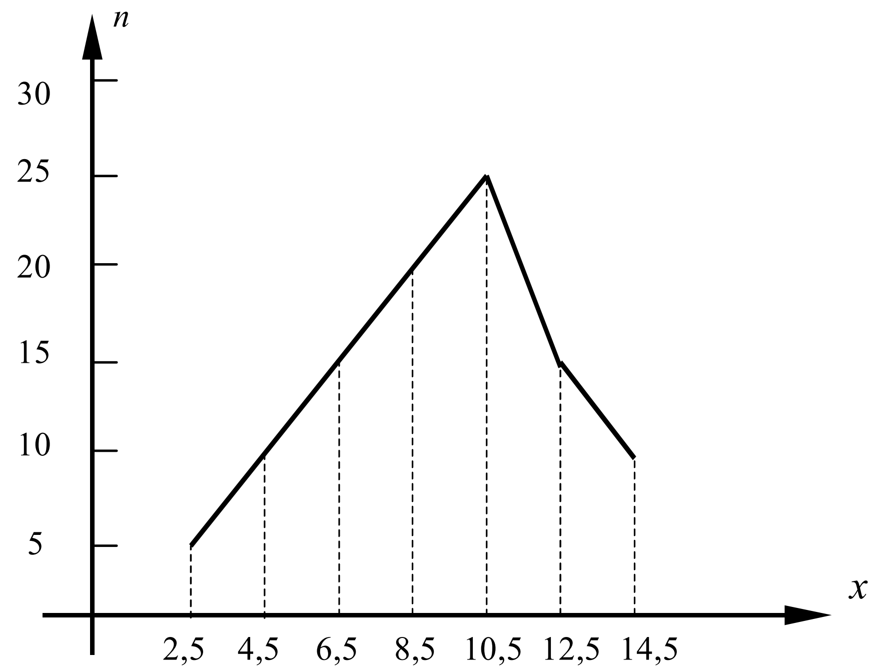
$n = \sum_{i=1}^{7} n_i = 100$ – об'єм вибірки, $\quad w_i = \frac{n_i}{n}$ – відносні частоти.

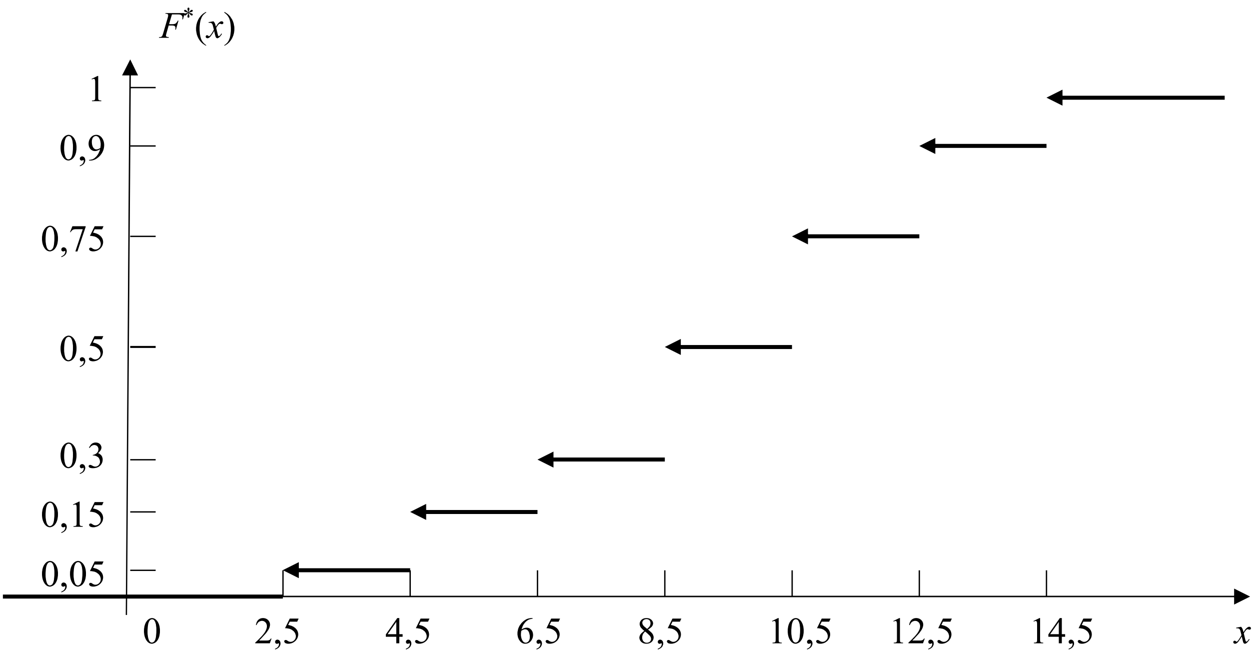
1) Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають точки з координатами $(x_i; n_i)$.

Згідно з означенням емпірична функція розподілу $F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксоване значення x, буде мати такий вигляд:

$$F^*(x) = P(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \le 2,5 \\ 0,05, & 2,5 < x \le 4,5 \\ 0,15, & 4,5 < x \le 6,5 \\ 0,3, & 6,5 < x \le 8,5 \\ 0,5, & 8,5 < x \le 10,5 \\ 0,75, & 10,5 < x \le 12,5 \\ 0,90, & 12,5 < x \le 14,5 \\ 1, & x > 14,5 \end{cases}$$

Полігон частот та емпіричну функцію розподілу зображено на рисунках:





2) Обчислення точкових оцінок числових характеристик вибірки зручно виконувати за допомогою проміжних розрахунків, що були виконані в таблиці.

Вибіркова середня величина $\bar{x}_в$: $\quad \bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} x_i n_i = \sum_{i=1}^{7} x_i w_i = 9{,}2$

Вибіркова дисперсія $D_в$ шукається за формулою:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 w_i - \left(\bar{x}_в\right)^2, \text{ отже}$$

$$D_в = 95{,}15 - (9{,}2)^2 = 95{,}15 - 84{,}64 = 10{,}51.$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$: $\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{10{,}51} \approx 3{,}24$

Вибіркова виправлена дисперсія s^2 та виправлене середнє квадратичне відхилення s шукаються за формулами:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в \qquad \Rightarrow \qquad s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}\ ;$$

$$s^2 = \frac{100}{99}\cdot 10{,}51 = 10{,}62 \qquad \Rightarrow \qquad s = \sqrt{10{,}62} \approx 3{,}26.$$

Вибіркова мода M_0^* – це варіанта, що має найбільшу частоту появи. Найбільшу частоту $n = 25$ має варіанта $x = 10{,}5$. Отже мода $M_0^* = 10{,}5$.

Відповідь: $\bar{x}_в = 9{,}2$; $D_в = 10{,}51$; $\sigma_в = 3{,}24$; $s = 3{,}26$; $M_0^* = 10{,}5$.

Задача 11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

У випадку неперервної кількісної ознаки ξ зручно спочатку зробити групування даних. Область спостережуваних значень розбивається на деяку кількість інтервалів рівної довжини і підраховується число спостережень, що потрапили в кожний інтервал. Ці числа і є частотами відповідних інтервалів.

Означення 1. Перелік частинних інтервалів і відповідних їм частот, або відносних частот, називають **інтервальним статистичним розподілом вибірки**.

Для групованого статистичного ряду крок розбиття знаходиться за формулою:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2\lg n}, \text{ де } n \text{ – об'єм вибірки.}$$

Вибіркове середнє $\overline{x_B}$ обчислюється за формулою:

$\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} w_i$, де $\overline{x_i} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ - середини інтервалів, а вибіркова дисперсія – $D_B = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}^2 w_i - \left(\overline{x_B}\right)^2$ D_B.

Означення 2. **Вибіркова мода** M_o^* – це точка частинного інтервалу I_m (модального інтервалу) якому відповідає найбільше значення частоти n_m.

$$M_o^* = x_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} h$$

Означення 3. **Гістограмою частот** називається фігура, що є об'єднанням прямокутників з основами h та висотами n_i / h. Площа гістограми частот дорівнює n.

Означення 4. **Гістограмою відносних часто**т називається фігура, що є об'єднанням прямокутників з основами h та висотами w_i / h. Площа гістограми відносних частот дорівнює 1.

Означення 5. **Статистичною** називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу (**непараметрична гіпотеза**), або про параметри відомого розподілу (**параметрична гіпотеза**) .

При перевірці гіпотез висувається для випробування як вихідна деяка гіпотеза H_0 (**нульова, основна**) у порівнянні з однією чи кількома **альтернативними** (протилежними) гіпотезами H_1, H_2, ..., які явно формулюються або маються на увазі. Гіпотези бувають прості (містять тільки одне припущення) і складні (містять скінченне або нескінченне число простих гіпотез).

Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави вважати, що він має певний вигляд $f(x)$(непараметрична гіпотеза), то перевіряють нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена за законом $f(x)$. Критерії, що використовуються з цією метою називаються **критеріями згоди**.

Критерій згоди Пірсона

Критерій згоди Пірсона дозволяє перевірити, чи описуються експериментальні дані нормальним розподілом.

Якщо досліджувана кількісна ознака ξ генеральної сукупності має нормальний розподіл, то теоретичні частоти частинних інтервалів обчислюються за формулою:

$$n_i' = n\left(\Phi_0\left(z_{i+1}\right) - \Phi_0\left(z_i\right)\right),$$

де $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x_B}}{\sigma_B}$, $z_i = \frac{x_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}$, $\Phi_0\left(z_i\right)$ – функція Лапласа.

Як критерій перевірки гіпотези приймається випадкова величина χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}},$$

$n_i^{'}$ – теоретичні частоти.

Цей критерій є правосторонній і розподілений за розподілом χ^2 з $\nu = k - 3$ степенями свободи для нормального розподілу. Критична область K має вигляд:

$$K: \quad \chi^2 > \chi_{кр}.$$

Таким чином, якщо $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$ немає підстав відкинути нульову гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо $\chi^2_{сп} > \chi^2_{кр}$ – нульова гіпотеза відкидається. Величина $\chi^2_{кр}$ визначається з табл. 5 додатків за величинами рівня значущості α та числа степенів свободи υ.

Приклад. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості α = 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

–24	–23	–20	–28	–32	28	12	19	18	40
–17	–39	–38	–22	–24	23	31	22	30	23
–16	–14	–24	–30	–23	12	34	27	28	22
–13	–11	–24	–8	–24	26	19	7	24	27
–22	–29	–24	–18	–26	25	24	15	20	25

Розв'язання:

1) Для побудови групованого статистичного ряду знайдемо за вибіркою крок розбиття: $x_{\min} = -39$ і $x_{\max} = 40$. Величина кроку знаходиться за формулою:

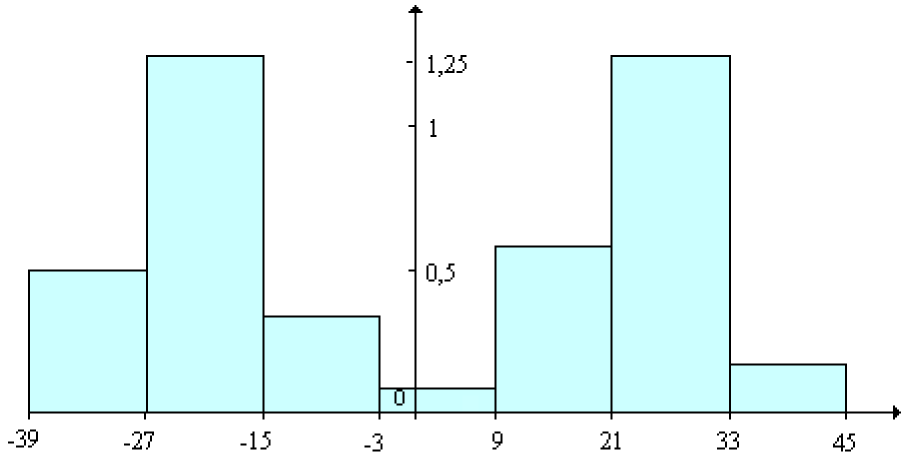
$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2\lg n} = \frac{40 + 39}{1 + 3{,}2 \cdot 1{,}7} \approx 12, \quad \lg n = \lg 50 \approx 1{,}7$$

Тоді число частинних інтервалів $k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h} = \frac{79}{12} \approx 7$.

Для кожного інтервалу підрахуємо частоти n_i, відносні частоти $w_i = \frac{n_i}{n}$ та $\frac{n_i}{h}$ для відповідних частинних інтервалів I_i, дані занесемо у таблицю:

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
I_i	–39; –27	–27; –15	–15; –3	–3; 9	9; 21	21; 33	33; 45	
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
w_i	0,12	0,3	0,08	0,02	0,14	0,3	0,04	1
$\frac{n_i}{h}$	0,5	1,25	0,33	0,08	0,58	1,25	0,17	

2) Гістограма частот:



3) Для обчислення основних числових характеристик вибірки виконаємо додаткові обчислення, отримані дані занесемо в таблицю:

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
I_i	–39; –27	–27; –15	–15; –3	–3;9	9; 21	21; 33	33; 45	
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
w_i	0,12	0,3	0,08	0,02	0,14	0,3	0,04	1
$\overline{x_i}$	–33	–21	–9	3	15	27	39	
$\overline{x_i}\,w_i$	–3,96	–6,3	–0,72	0,06	2,1	8,1	1,56	0,84
$\overline{x_i}^{\,2} w_i$	130,68	132,3	6,48	0,18	31,5	218,7	60,84	580,68

Отже вибіркова середня, вибіркова дисперсія і виправлена дисперсія і середнє квадратичне відхилення дорівнюють:

$$\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} w_i \approx 0{,}84, \quad \text{де} \quad \overline{x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{-27-39}{2} = -33;$$

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 w_i - \left(\overline{x_B}\right)^2 \approx 580{,}68 - (0{,}84)^2 = 579{,}97; \qquad \sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 24{,}08;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49} \cdot 579{,}97 \approx 591{,}81; \qquad S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B} = \sqrt{591{,}81} \approx 24{,}33;$$

Найбільше значення частоти $n_m = 15$, отже ми маємо два модальних інтервали $[-27;\ -15]$, $[21;\ 33]$. Тоді мода буде дорівнювати:

$$M_o^* = x_{i-1} + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} h = -27 + \frac{15\text{-}6}{2 \cdot 15\text{-}6 + 4} 12 = -23{,}14$$

$$M_o^* = x_{i-1} + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} h = 21 + \frac{15-7}{2\cdot 15 - 7 + 2} 12 = 24{,}84$$

4) Висунемо гіпотезу, що досліджувана ознака генеральної сукупності має нормальний розподіл. Обчислимо теоретичні частоти частинних інтервалів:

$$n_i' = n(\Phi_0(z_{i+1}) - \Phi_0(z_i)), \qquad \text{де} \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x_B}{\sigma_B}, \quad z_i = \frac{x_i - x_B}{\sigma_B}.$$

Дані обчислення занесемо в таблицю:

I_i	–39; –27	–27; –15	–15; –3	–3;9	9;21	21;33	33;45	$\sum$
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
x_i	–39	–27	–15	–3	9	21	33	45
z_i	–1,65	–1,16	–0,66	–0,16	0,34	0,84	1,34	
z_{i+1}	–1,16	–0,66	–0,16	0,34	0,84	1,34	1,83	
$\Phi_0(z_i)$	–0,4505	–0,3770	–0,2454	–0,0636	0,1331	0,2995	0,4099	
$\Phi_0(z_{i+1})$	–0,3770	–0,2454	–0,0636	0,1331	0,2995	0,4099	0,4664	
n'_i	3,675	6,58	9,09	9,835	8,32	5,52	2,825	45,845

Перевіримо, чи узгоджуються результати спостережень з гіпотезою про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності при рівні значущості α = 0,05, за критерієм згоди Пірсона.

Обчислимо емпіричне значення статистики Пірсона за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$$

Дані обчислення занесемо в таблицю:

I_i	-39;-27	-27;-15	-15;-3	-3;9	9;21	21;33	33;45	$\sum$
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
n'_i	3,675	6,58	9,09	9,835	8,32	5,52	2,825	45,845
$(n_i - n_i')^2$	5,406	70,896	25,908	78,057	1,742	89,870	0,681	
$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$	1,471	10,775	2,850	7,937	0,209	16,281	0,241	χ^2_{cn} = 39,764

Кількість груп вибірки $k = 7$. Тому число степенів свободи $\nu = k - 3 = 7 - 3 = 4$.

Знайдемо значення $\chi^2_{кр}$ в таблиці критичних точок розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ та числом степенів свободи $\nu = 4$:

$$\chi^2_{кр}(0{,}05;\, 4) = 9{,}5.$$

Оскільки χ^2_{cn} > $\chi^2_{кр}$ (дійсно, 39,764>9,5) – відмінність емпіричних та теоретичних частот значима, отже дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Відповідь: $\overline{x_B} \approx 0{,}84$; $D_B \approx 578{,}97$; $\sigma_B \approx 24{,}08$; $S^2 \approx 591{,}81$; $S \approx 24{,}33$; $M_0^* = -23{,}14$; $M_0^* = 24{,}84$; гіпотеза про нормальний розподіл відхиляється.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Варіант 1

1. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 2-х гральних костей на них випадає однакова кількість очок.
2. На залізничній станції працює 5 кас. Четверо одногрупників в різний час придбали квитки на поїзди. Знайти ймовірність того, що всі вони купували квитки в різних касах.
3. Проводиться профілактичний огляд 10 вагонів, серед яких 4 плацкартних та 6 купейних. Яка ймовірність того, що перші три вагони, які оглядаються будуть: 1) одного класу; 2) хоча б один буде купейним? (Вагони при огляді вибирають випадковим чином)
4. Серед пасажирів потяга № 7 20% складають пасажири з Праги, 10% – з Братислави та 70% – із Львова. Серед пасажирів з Праги 20% громадян України, серед пасажирів з Братислави 10% громадян України, а серед пасажирів із Львова 80% громадян України. Яка ймовірність того, що навмання обраний пасажир є громадянином України?
5. Кількість колій для посадки – 12. Відомо, що в середньому 40% часу на колії знаходяться потяги. Яка ймовірність того, що у випадковий момент часу потяги знаходяться: 1) на трьох коліях; 2) хоча б на трьох коліях?
6. Відомо, що студенти становлять 40% від загальної кількості пасажирів. Знайти ймовірність, що серед 600 пасажирів потяга: 1) 252 студенти; 2) менш ніж 263 студенти?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-6,1	-5,3	-4,8	-3,5	-2,4
P	0,10	0,14	0,19		0,20

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(2x+2), & 0<x\le 1,\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\alpha=-2;\quad \beta=\frac{1}{2}$$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу і знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=3;\quad \sigma=2;\quad \alpha=8;\quad \beta=16.$

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	20	35	75	40	20	5

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

13	14	23	33	25	12	13	29	22	10
11	12	21	23	29	23	25	27	20	25
18	19	26	14	25	17	28	26	21	25
7	35	26	22	16	32	17	24	24	19
24	18	20	21	28	26	18	21	32	26

Варіант 2

1. Штат деякої фірми складається з 55 чоловіків та 45 жінок. 20% чоловіків та 40% жінок, що працюють на фірмі, мають вищу освіту. Яка ймовірність, що вибраний навмання працівник фірми буде мати вищу освіту?
2. Знайти ймовірність того, що при киданні 3-х гральних костей на кожній з них випаде різна кількість очок.
3. Ймовірність того, що довільний покупець, зайшовши у певний магазин, зробить покупку, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність, що покупку зробить:

   1) тільки один; 2) хоча б один з трьох покупців, які зайшли до магазину.
4. На митницю прибувають потяги з однотипною продукцією трьох виробників А, В та С. Виробник А постачає 70% продукції, В – 20%, С – 10%. Серед продукції виробника А – 5% продукції, що не відповідає стандартам якості, В – 2%, С – 1%. Митник навмання бере деяку одиницю продукції, яка ймовірність того, що вона не відповідає стандартам якості.
5. Відомо, що студенти становлять 20% від загальної кількості пасажирів. Знайти ймовірність, що серед чотирьох пасажирів купе: 1) 2 студенти; 2) менше ніж 2 студенти?
6. Ймовірність запізнення пасажира на поїзд – 0,003. Знайти ймовірність того, що із 1000 на поїзд запізниться: 1) 2 пасажири; 2) не менше ніж 2.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	1,2	2,3	3,7	4,2	5,1
P	0,08	0,18	0,28	0,32	

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=2$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу і знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=10;\quad \sigma=4;\quad \alpha=2;\quad \beta=13$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	6	19	37	74	38	18	4

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

26	20	24	22	28	19	24	17	18	32
37	39	25	16	33	36	28	29	24	13
31	26	24	14	27	33	9	23	13	16
15	34	25	10	11	23	28	12	24	6
13	19	26	32	25	22	17	12	30	28

Варіант 3

1. Що ймовірніше: поява при киданні 2-х гральних костей в сумі 7 чи 10 очок?
2. Слово ТАМБУР, записане на паперовій смужці, розрізають на 6 частин так, щоб у кожній частині була записана одна літера. Із шести літер навмання беруть по одній і розкладають в ряд. Таким чином було розкладено 4 літери. Яка ймовірність того, що одержано слово «брат» або слово «румб»?
3. Серед 10 пасажирів черги до залізничної каси 4 студенти. Яка ймовірність того, що з трьох навмання обраних пасажирів: 1) двоє або троє – студенти; 2) хоча б один – студент?
4. Серед пасажирів потяга № 7 20% складають пасажири з Праги, 30% – з Братислави та 50% – із Львова. Серед пасажирів з Праги 20% громадян України, серед пасажирів з Братислави 30% громадян України, а серед пасажирів із Львова 80% громадян України. Навмання обраний пасажир виявився громадянином України. Яка ймовірність того, що він їде з Братислави?
5. За певних технологічних умов 75% виготовлених вагонів є вищої якості. Знайти ймовірність того, що серед п'яти вибраних для перевірки вагонів буде: 1) тільки три вищої якості; 2) не менше чотирьох вищої якості.
6. Імовірність того, що студент складе екзамен з математики, в середньому дорівнює 0,67. Яка ймовірність того, що із 100 студентів курсу екзамен з математики складуть: 1) 65 студентів; 2) не більше 60.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-2,1	0,3	2,4	4,5	6,2
P	0,16	0,22	0,30		0,11

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha; \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(\frac{9}{2}-x), & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}$$

$\alpha=1; \quad \beta=2$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha; \beta]$.

$a=9; \quad \sigma=5; \quad \alpha=5; \quad \beta=7$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	4	6	8	10	12	14	16
n_i	4	18	36	72	38	18	6

11**.** За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

13	25	17	29	21	33	6	15	20	21
14	26	18	30	22	34	27	18	10	24
15	23	31	25	14	19	25	27	15	26
14	8	23	27	9	11	26	22	30	19
22	25	13	27	25	19	30	25	26	21

Варіант 4

1. У коробці знаходяться картки з числами від 1 до 20. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що написане на ній число менше за номер місяця, в якому Ви народились?
2. В складі потяга 16 вагонів: 9 плацкартних, 6 купейних, 1 м’який. Ревізори заходять у три навмання обраних вагони. Яка ймовірність того, що всі вони різного класу.
3. В кімнаті знаходиться 9 людей. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони народились в різні місяці або в один і той самий місяць; 2) принаймні двоє із них народилися в один і той самий місяць. (Прийміть, що ймовірність народження людини в різні місяці року рівна).
4. На митницю прибувають потяги з однотипною продукцією трьох виробників А, В та С. Виробник А постачає 60% продукції, В – 25%, С – 15%. Серед продукції виробника А – 5% продукції, що не відповідає стандартам якості, В – 3%, С – 1%. Митник навмання бере деяку одиницю продукції і виявляє, що вона не відповідає стандартам якості. Яка ймовірність того, що вона належить постачальнику В?
5. Прилад складається з семи незалежно працюючих вузлів. Надійність роботи кожного вузла (ймовірність безвідмовної роботи) є величиною сталою і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийдуть: 1) рівно три вузли; 2) менше трьох.
6. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що при 300 пострілах буде: 1) 4 влучання; 2) не більше ніж 2.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-2,4	1,3	4,7	7,2	10,1
P	0,08	0,20		0,27	0,22

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha; \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(3x+1), & 0<x\le \dfrac{1}{3},\\ 0, & x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}; \quad \beta=\frac{1}{4}$$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha; \beta]$.

$a=8; \quad \sigma=1; \quad \alpha=4; \quad \beta=9$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	5	6	7	8	9	10	11
n_i	6	19	35	72	35	15	3

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

29	30	31	24	21	25	14	17	31	27
26	17	26	20	21	24	12	15	29	22
26	16	31	25	29	17	33	21	22	27
27	13	27	26	23	31	20	19	25	27
13	24	17	15	16	13	26	25	23	31

Варіант 5

1. Із чисел 1, 2, 3, …, 10 навмання вибирають два. Яка ймовірність того, що їх сума буде парною?
2. На п’яти картках написані літери Г, О, П, Т, Я. Після перемішування беруть по одній картці і кладуть послідовно поряд. Яка ймовірність того, що з’явиться слово «потяг»?
3. В складі потяга 16 вагонів: 8 плацкартних, 6 купейних, 2 м’яких. Ревізори заходять у чотири навмання обраних вагони. Яка ймовірність того, що 1) всі вони одного класу; 2) хоча б один – плацкартний.
4. 50% пасажирських вагонів є плацкартними, 40% – купейними, 10% – м’якими. Серед провідників плацкартних вагонів 20% жінок, серед провідників купейних вагонів 30% жінок, серед провідників м’яких вагонів 40% жінок. Яка ймовірність того, що провідник, обраний випадково – чоловічої статі?
5. При передачі повідомлення ймовірність перекручення одного знака дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що повідомлення з 10 знаків: 1) не буде перекручене; 2) містить рівно 3 помилки?
6. Імовірність виготовлення нестандартної деталі робітником дорівнює 0,1. За робочу зміну було виготовлено 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартними виявляться: 1) 350 штук; 2) від 310 до 360 штук.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-3,9	-4,6	-5,2	-6,5	-7,4
P	0,02		0,25	0,38	0,22

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(2x+1), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{3}{2};\quad \beta=2$$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=7;\quad \sigma=2;\quad \alpha=3;\quad \beta=11.$

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	8	9	10	11	12	13	14
n_i	5	21	36	74	42	16	2

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

21	22	24	21	22	14	16	13	25	23
19	20	21	26	6	23	29	23	13	19
26	6	24	12	27	24	18	12	23	21
23	27	26	15	22	23	29	21	32	27
11	23	25	31	30	20	19	16	25	22

Варіант 6

1. Кинуто дві гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що хоча б на одній із них випаде 1?
2. Слово ТРАНСКРИПЦІЯ, записане на паперовій смужці, розрізають на 12 частин так, щоб у кожній частині була записана одна літера. Із дванадцяти літер навмання беруть по одній і розкладають в ряд. Таким чином було розкладено 5 літер. Яка ймовірність того, що одержано слово «рація», «нація» або слово «нарис»?
3. Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірності влучення для першого стрільця – 0,5, для другого – 0,7 і для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що 1) в мішені буде дві пробоїни; 2) влучить хоча б один з них.
4. Серед пасажирів потяга № 15 10% складають пасажири з Відня, 20% – з Будапешта та 70% – із Львова. Серед пасажирів з Відня 20% громадян України, серед пасажирів з Будапешта 30% громадян України, а серед пасажирів із Львова 90% громадян України. Яка ймовірність того, що навмання обраний пасажир є громадянином України?
5. Відомо, що в 60% потягів нумерація вагонів починається з голови потяга. Яка ймовірність того, що серед 5 потягів, що подані на посадку: 1) в 2-х нумерація починається з голови; 2) хоча б в 2-х нумерація починається з голови?
6. Завод відправив на базу 10000 якісних виробів. Ймовірність того, що в дорозі вони пошкодяться, рівна 0,0001. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть: 1) 3 неякісні вироби; 2) менше ніж 2 неякісні вироби.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-7,5	-6,3	-5,8	-4,2	-3,4
P		0,23	0,27	0,22	0,11

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha; \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(2x+2), & 0<x\le 1,\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\alpha=-2;\quad \beta=\frac{1}{2}$$

9. Відомі математичне сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha; \beta]$.

$a=6;\quad \sigma=3;\quad \alpha=2;\quad \beta=11.$

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\bar{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	8	10	12	14	16	18	20
n_i	6	19	37	76	38	18	4

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

26	24	27	33	30	37	17	12	26	22
19	26	23	30	27	34	31	38	17	24
24	21	28	26	32	29	36	13	20	17
20	22	26	6	30	10	34	14	21	25
24	28	8	32	12	13	16	23	19	31

Варіант 7

1. У студентській групі 10 чергових. Серед них 3 особи мають вік від 18 до 20 років, 5 – від 20 до 22 років, 2 – від 22 до 24 років. На чергування навмання повинен бути обраний один черговий. Чому дорівнює його ймовірність того, що обраний черговий буде у віці від 18 до 22 років?
2. У бригаді 25 провідників: 12 жінок та 13 чоловіків. Знайти ймовірність того, що четверо випадково вибраних провідників – жінки.
3. Кинуто три гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) на кожній із них випаде різна кількість очок або на всіх – однакова; 2) хоча б на двох – однакова?
4. Серед пасажирів потяга № 15 20% складають пасажири з Відня, 30% – з Будапешта та 50% – із Львова. Серед пасажирів з Відня 10% громадян України, серед пасажирів з Будапешта 20% громадян України, а серед пасажирів із Львова 90% громадян України. Навмання обраний пасажир виявився громадянином України. Яка ймовірність того, що він їде з Будапешта?
5. Яка подія є більш ймовірною: виграти у рівносильного суперника (нічийний рахунок виключений) три партії з чотирьох чи п’ять з восьми?
6. Фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20% замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 850 клієнтів: 1) 160 замовлять візитні картки; 2) не більше 200 замовлять візитні картки?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-2,4	-1,3	0,2	1,5	2,7
P	0,24		0,29	0,12	0,08

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(1-\dfrac{x}{6}), & 0<x\le 6,\\ 0, & x>6\end{cases}$$

$$\alpha=1;\quad \beta=\frac{3}{2}$$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=3;\quad \sigma=1;\quad \alpha=1;\quad \beta=12$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	9	10	11	12	13	14	15
n_i	2	17	36	77	36	15	3

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

15	17	23	31	24	8	10	24	29	20
15	27	24	25	22	28	13	26	27	31
11	16	22	32	25	19	24	26	17	12
18	20	22	18	21	26	32	14	17	23
26	25	11	18	17	16	29	30	16	27

Варіант 8

1. Код картки поповнення рахунку мобільного телефону складається з чотирнадцяти цифр, з яких дві останні було стерто. Їх власник картки набирає навмання. Яка ймовірність, що він зможе поповнити рахунок, якщо в нього є три спроби, після чого номер блокується?
2. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 4-х гральних костей на них випадає різна кількість очок.
3. У бригаді 20 провідників: 12 жінок та 8 чоловіків. Знайти ймовірність того, що п’ятеро випадково обраних провідників: 1) однієї статі; 2) хоча б один – чоловік.
4. 40% пасажирських вагонів є плацкартними, 50% – купейними, 10% – м’якими. Серед провідників плацкартних вагонів 30% жінок, серед провідників купейних вагонів 40% жінок, серед провідників м’яких вагонів 50% жінок. Провідник, обраний випадково – чоловічої статі. Яка ймовірність того, що він є провідником купейного вагона?
5. Монету кинули п’ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: 1) п’ять разів; 2) хоча б один раз.
6. Верстат-автомат виготовляє деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться пошкодженою, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що серед 200 деталей: 1) 3 виявляться пошкодженими; 2) хоча б 2 виявляться пошкодженими.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-3,7	-1,4	1,3	3,5	5,8
P	0,17	0,22		0,23	0,11

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(5-4x), & 0<x\le \frac{1}{2},\\ 0, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\alpha=-1;\quad \beta=\frac{1}{4}$$

9. Відомі математичне сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу і знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=4;\quad \sigma=5;\quad \alpha=2;\quad \beta=11$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	5	7	9	11	13	15	17
n_i	3	18	34	75	41	21	4

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

23	21	14	26	33	24	19	26	39	14
32	18	23	27	16	10	16	22	24	26
21	23	29	24	28	13	11	10	17	19
25	32	21	22	23	26	28	24	19	23
18	27	26	25	18	12	17	20	28	21

Варіант 9

1. Кинуто дві гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що добуток очок, які на них випали буде дорівнювати 12?
2. Кандидат у депутати планує відвідати 8 різних міст України. Порядок їх вибору визначається випадково. Яка ймовірність вгадати розклад передвиборчого туру депутата?
3. Перевірка деякого підприємства пожежною, санітарною та податковою інспекцією може виявити порушення з ймовірностями відповідно 0,11; 0,24; 0,35, незалежно одна від іншої. Знайти ймовірність того, що в результаті інспекції буде виявлено: 1) тільки одне порушення; 2) хоча б одне порушення.
4. На трьох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі, причому 35% на першій лінії, 25% – на другій та 40% – на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першої лінією дорівнює 0,99, другою – 0,97, третьою – 0,98. Виготовлені протягом доби деталі надходять до складу. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь не відповідає стандарту.
5. Гральну кость кинули вісім разів. Знайти ймовірність того, що чотири очки випадуть: 1) три рази; 2) не менше двох разів.
6. Імовірність того, що покупець, який випадково зайшов до універсаму, зробить покупку, у середньому дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що із 100 покупців зроблять покупку: 1) 75 покупців; 2) не більше ніж 75?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-3,1	-2,6	-1,3	0,7	1,5
P	0,18	0,20	0,29		0,10

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(1-\dfrac{x}{4}), & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4\end{cases}$$

$$\alpha=1;\quad \beta=3$$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=3;\quad \sigma=2;\quad \alpha=3;\quad \beta=10$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\bar{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	7	9	11	13	15	17	19
n_i	7	22	38	75	39	16	6

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

26	24	33	32	14	21	25	23	24	26
20	22	26	23	12	32	19	27	26	15
26	10	24	12	29	32	27	13	25	22
11	18	23	27	17	26	20	30	27	12
19	25	23	20	11	18	27	24	23	26

Варіант 10

1. У коробці знаходяться картки з числами від 1 до 20. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що написане на ній число більше за номер місяця, в якому Ви народились?
2. Четверо одногрупників в різний час придбали квитки на експрес до Шостки. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть їхати в різних вагонах, якщо відомо, що в складі експреса 6 вагонів.
3. Студент підготував до іспиту 40 питань з 50. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання вибраних питань він знає: 1) одне або два; 2) не всі три.
4. Для ремонту вагонів надходять деталі, виготовлені трьома цехами заводу. Із них 15% від цеху №1; 45% – від цеху №2; 40% – від цеху №3. Відомо, що брак першого цеху складає 0,3%, другого – 0,5%, третього – 0,9%. Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь – бракована?
5. Серед виробів деякого виробництва 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п’яти взятих навмання виробів: 1) немає жодного бракованого; 2) хоча б два бракованих.
6. Телефонна станція обслуговує 200 абонентів. Для кожного з них імовірність того, що протягом 1 години він зателефонує на станцію, у середньому становить 0,003. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) протягом однієї години зателефонують на станцію три абонента; 2) протягом однієї години зателефонує хоча б один абонент.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	10,2	8,5	6,3	4,7	2,9
P	0,16	0,18	0,21	0,30	

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(1-\dfrac{x}{2}), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$$\alpha=-1;\quad \beta=\frac{3}{2}$$

9. Відомі математичне сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=2;\quad \sigma=5;\quad \alpha=4;\quad \beta=9$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в,\ D_в,\ \sigma_в,\ s^2,\ M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	10	12	14	16	18	20	22
n_i	8	22	36	74	42	19	6

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

19	20	26	14	23	27	16	25	26	31
27	9	14	26	13	27	23	19	20	22
10	17	25	26	23	19	14	30	29	25
24	28	8	32	12	17	13	27	25	23
21	23	19	26	24	28	16	12	11	10

Варіант 11

1. Знайти ймовірність того, що число, вибране навмання із чисел 10, 11, 12, …, 99, виявиться кратним 2, 5 або 10.
2. На чотирьох картках написано літери А, Т, Е, М. Картки навмання розкладують в ряд. Яка ймовірність того, що при цьому буде отримано слово «тема» або «мета»?
3. На залізничній станції працює 5 кас. Четверо одногрупників в різний час придбали квитки на поїзди. Знайти ймовірність того, що: 1) всі вони купували квитки в різних касах або всі в одній; 2) хоча б двоє купували квитки в одній касі.
4. На трьох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі, причому 30% на першій лінії, 25% – на другій та 45% – на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першою лінією дорівнює 0,99, другою – 0,97, третьою – 0,98. Виготовлені протягом доби деталі надходять до складу. Навмання взята деталь не відповідає стандарту. Визначити ймовірність того, що вона виготовлена на третій лінії.
5. Ймовірність виграшу за одним лотерейним білетом становить $1/7$. Яка ймовірність того, що серед п'яти придбаних білетів: 1) рівно два виграшних; 2) найімовірніше число виграшних?
6. 100 верстатів працюють незалежно один від одного. Імовірність безвідмовної роботи кожного з них протягом робочої зміни стала й дорівнює 0,8. Обчислити ймовірність того, що протягом робочої зміни безвідмовно пропрацюють: 1) 85 верстатів; 2) не менше ніж 85 верстатів.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-2,1	-1,4	0,5	1,7	2,3
P	0,15	0,20	0,25		0,13

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ ax, & -2 < x \le 0, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$\alpha = -1; \quad \beta = \frac{1}{2}$$

9. Відомі математичне сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = 2; \quad \sigma = 4; \quad \alpha = 6; \quad \beta = 10$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	13,5	14	14,5	15	15,5	16	16,5
n_i	2	16	12	60	5	3	2

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

24	21	16	30	29	13	38	35	18	25
33	32	26	18	27	35	27	24	26	22
26	24	33	19	22	24	29	16	27	26
22	25	13	30	28	27	22	19	23	24
14	17	27	34	24	28	19	16	22	26

Варіант 12

1. У коробці знаходяться картки з числами від 1 до 20. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що написане на ній число неменше за номер місяця, в якому Ви народились?
2. Серед 12 пасажирів черги до залізничної каси 4 студенти. Яка ймовірність того, що двоє навмання обраних пасажири – студенти?
3. Студент шукає потрібну йому формулу в 3-х довідниках Ймовірність того, що формула знаходиться в 1, 2, або 3 довіднику відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що формула є: 1) тільки в двох довідниках; 2) хоча б в одному довіднику.
4. Для ремонту вагонів надходять деталі, виготовлені трьома цехами заводу. Із них 35% від цеху №1; 35% – від цеху №2; 30% – від цеху №3. Відомо, що брак першого цеху складає 0,3%, другого – 0,5%, третього – 0,9%. Випадково вибрана деталь – бракована. Яка ймовірність того, що вона виготовлена цехом №2?
5. Ймовірність того, що навмання обрана деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання п’яти деталей нестандартними будуть: 1) дві деталі; 2) найімовірніша кількість деталей.
6. Підручник видано накладом 50000 примірників. Імовірність того, що примірник випущено з дефектом, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того,

що випущений наклад містить: 1) п'ять бракованих підручників; 2) хоча б один бракований підручник.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-2,1	-1,4	0,5	1,7	2,3
P	0,15	0,20		0,27	0,13

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a(1-x), & -1 < x \le 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = 1$$

9. Відомі математичне сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = 15; \quad \sigma = 3; \quad \alpha = 13; \quad \beta = 18$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	80	90	100	110	120	130	140
n_i	4	6	10	40	20	12	8

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

17	32	17	33	31	26	27	25	15	26
5	22	23	26	27	24	13	29	24	10
33	39	26	24	17	27	33	12	18	21
26	25	34	21	17	19	15	23	26	24
22	24	21	30	14	26	27	22	31	10

Варіант 13

1. Що ймовірніше: поява при киданні 2 гральних костей в сумі 8 чи 9 очок?
2. На залізничній станції працює 6 кас. 5 одногрупників в різний час придбали квитки на поїзди. Знайти ймовірність того, що всі вони купували квитки в різних касах.
3. У групі 25 студентів. Із них десять хлопців, а решта – дівчата. Навмання по списку вибирають 5 студентів. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони однієї статі; 2) хоча б один – хлопець?
4. За статистикою 40% туристів подорожують поїздом, 50% – автобусом та 10% – літаком. Серед туристів, що подорожують поїздом 35% студентів, автобусом – 30% студентів, літаком – 5%. Обраний навмання для інтерв'ю турист – студент. Яка ймовірність того, що він подорожує автобусом?
5. Відомо, що студенти становлять 20% від загальної кількості пасажирів. Знайти ймовірність, що серед чотирьох пасажирів купе: 1) 3 студенти; 2) хоча б 3 студенти .
6. Імовірність виготовлення нестандартної деталі робітником дорівнює 0,1. За робочу зміну було виготовлено 600 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартними виявляться: 1) 550 штук; 2) від 510 до 560 штук.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-1,4	1,3	3,5	5,2	7,8
P	0,13		0,38	0,20	0,10

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{1}{2},\\ a(1+2x), & -\frac{1}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$$\alpha=-2;\quad \beta=-\frac{1}{3}$$

9. Відомі математичне сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=15;\quad \sigma=5;\quad \alpha=12;\quad \beta=17$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\bar{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	7	10	13	16	19	22	25
n_i	5	20	35	75	40	20	5

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

15	17	26	24	22	21	13	33	28	20
23	27	28	11	29	23	18	25	29	22
11	9	30	22	25	27	23	16	27	24
22	15	23	7	23	26	19	10	12	27
12	23	20	25	28	16	18	21	24	25

Варіант 14

1. Із чисел 2, 3, …, 10 навмання вибирають два. Яка ймовірність того, що їх сума буде непарною?
2. Слово ТАМБУР, записане на паперовій смужці, розрізають на 6 частин так, щоб у кожній частині була записана одна літера. Із шести літер навмання беруть по одній і розкладають в ряд. Таким чином було розкладено 3 літери. Яка ймовірність того, що одержано слово «бар», «раб», «мур» або слово «тур»?
3. 5 одногрупників в різний час придбали квитки на електропоїзд до Фастова. Знайти ймовірність того, що: 1) всі вони будуть їхати в різних вагонах або всі – в одному; 2) хоча б двоє будуть їхати в різних вагонах. Відомо, що в складі електропоїзда 8 вагонів.
4. За статистикою 50% туристів подорожують поїздом, 30% – автобусом та 20% – літаком. Серед туристів, що подорожують поїздом 35% студентів, автобусом – 30% студентів, літаком – 5%. Яка ймовірність того, що обраний навмання для інтерв’ю турист не є студентом?
5. Вироби деякого заводу містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п’яти виробів: 1) не буде жодного бракованого; 2) буде хоча б два бракованих.
6. Ймовірність запізнення пасажира на поїзд – 0,002. Знайти ймовірність того, що із 1000 на поїзд запізниться: 1) 3 пасажири; 2) хоча б 1.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-1,3	-2,0	-3,4	-4,7	-5,1
P		0,12	0,29	0,27	0,24

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4,\\ a(1+\dfrac{x}{4}), & -4<x\le 0,\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$\alpha=-5;\quad \beta=-1$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=14;\quad \sigma=4;\quad \alpha=12;\quad \beta=18$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	21	28	35	42	49	56	63
n_i	7	11	12	60	5	3	2

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

40	17	24	25	23	26	20	34	12	26
24	14	26	29	22	16	27	20	24	15
19	21	22	23	15	16	26	9	10	14
34	14	33	23	26	31	19	36	27	19
14	18	24	27	30	32	12	26	18	26

Варіант 15

1. Знайти ймовірність того, що при киданні 2-х гральних костей в сумі випаде 7 очок.
2. Вісім томів, однакових за розміром, навмання ставляться на книжкову полицю. Яка ймовірність того, що номери томів утворять спадну послідовність?
3. У складі потяга 16 вагонів: 5 плацкартних, 9 купейних, 2 м'яких. Ревізори заходять у три навмання обраних вагони. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони одного класу; 2) хоча б один – м'який.
4. На митницю прибувають потяги з однотипною продукцією трьох виробників А, В та С. Виробник А постачає 60% продукції, В – 30%, С – 10%. Серед продукції виробника А – 3% продукції, що не відповідає стандартам якості, В – 2%, С – 1%. Митник навмання бере деяку одиницю продукції, яка ймовірність того, що вона не відповідає стандартам якості.
5. Кількість колій для посадки – 10. Відомо, що в середньому 60% часу на колії знаходяться потяги. Яка ймовірність того, що у випадковий момент часу потяги знаходяться: 1) на шести коліях; 2) більше ніж на восьми коліях?
6. Імовірність того, що студент складе екзамен з математики, в середньому дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що із 100 студентів курсу екзамен з математики складуть: 1) 65 студентів; 2) не більше 75.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	2,3	4,2	6,1	8,5	10,4
P	0,15		0,30	0,21	0,16

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha; \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a(1+x), & -1 < x \le 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = 1$$

9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha; \beta]$.

$a = 12; \quad \sigma = 3; \quad \alpha = 11; \quad \beta = 19$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	130	140	150	160	170	180	190
n_i	3	7	10	40	20	12	8

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

17	36	34	38	31	10	25	23	29	26
11	27	17	26	21	34	30	35	17	32
29	16	27	11	19	31	27	12	32	18
33	40	6	30	33	24	19	24	19	21
22	24	19	21	13	14	16	7	23	25

Варіант 16

1. У коробці знаходяться картки з числами від 1 до 20. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що написане на ній число не більше за номер місяця, в якому Ви народились?
2. Студент підготував до іспиту 40 питань з 50. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання вибраних питань він знає тільки два.
3. Зроблено постріл по мішені з двох пістолетів. Ймовірність влучання із першого дорівнює 0,98; із другого – 0,97. Знайти ймовірність: 1) одного влучання в ціль; 2) хоча б одного влучання в ціль.
4. 50% пасажирських вагонів є плацкартними, 40% – купейними, 10% – м’якими. Серед провідників плацкартних вагонів 30% чоловіків, серед провідників купейних вагонів 40% чоловіків, серед провідників м’яких вагонів 20% чоловіків. Яка ймовірність того, що провідник, обраний випадково – чоловічої статі?
5. Залізничні каси працюють 90% часу, а 10 % знаходяться на перерві. Знайти ймовірність того, що із 5-ти кас: 1) працюють 3; 2) працює найімовірніше число кас.
6. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що при 200 пострілах буде: 1) 3 влучання; 2) хоча б 2.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	4,3	3,1	2,7	1,6	0,8
P	0,18	0,29		0,17	0,14

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(2-x), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2\end{cases}$$

$$\alpha=-1;\quad \beta=1$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=3;\quad \sigma=2;\quad \alpha=8;\quad \beta=16$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	20	30	40	50	60	70	80
n_i	4	40	36	30	15	10	5

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

30	22	31	19	25	30	36	17	21	22
18	20	22	15	31	32	18	27	11	12
13	24	28	34	35	12	22	23	20	25
29	20	26	26	25	24	21	20	23	22
19	27	24	12	8	10	23	16	10	27

Варіант 17

1. Знайти ймовірність того, що число, вибране навмання із чисел 10, 11, 12, …, 99, виявиться кратним 7.
2. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 5-ти гральних кісток на них випадає різна кількість очок.
3. Серед 12 пасажирів черги до залізничної каси 6 студентів. Яка ймовірність того, що з чотирьох навмання обраних пасажирів: 1) більше ніж два студенти; 2) хоча б один – студент?
4. На митницю прибувають потяги з однотипною продукцією трьох виробників А, В та С. Виробник А постачає 50% продукції, В – 30%, С – 20%. Серед продукції виробника А – 3% продукції, що не відповідає стандартам якості, В – 2%, С – 1%. Митник навмання бере деяку одиницю продукції, яка ймовірність того, що вона відповідає стандартам якості.
5. Для студентського гуртожитку закуплено 10 телевізорів. Ймовірність того, що будь-який із них витримає гарантійний термін, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну з ладу вийдуть: 1) два телевізори; 2) принаймні два.
6. Відомо, що студенти становлять 20% від загальної кількості пасажирів. Знайти ймовірність, що серед 400 пасажирів потяга: 1) 75 – студенти; 2) менше ніж 90 – студенти?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	0,3	3,1	6,4	9,2	12,5
P	0,09	0,19	0,23		0,22

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a(1+\frac{x}{3}), & -3<x\le 0,\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$$\alpha=-2;\quad \beta=-1$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=12;\quad \sigma=8;\quad \alpha=10;\quad \beta=20$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	12,8	22,8	32,8	42,8	52,8	62,8	72,8
n_i	3	17	25	40	8	4	3

11**.** За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

23	22	23	21	27	26	33	13	15	24
20	19	23	18	22	21	13	15	21	12
26	19	25	18	17	19	21	28	6	27
25	23	17	19	8	7	23	9	29	22
23	21	24	32	30	29	24	17	15	12

Варіант 18

1. Знайти ймовірність того, що при киданні 2-х гральних костей в сумі випаде 6 очок.
2. У групі 25 студентів. Із них десять хлопців, а решта – дівчата. Навмання по списку вибирають 5 студентів. Яка ймовірність того, що троє з них – хлопці?
3. У кімнаті знаходиться 7 людей. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони народились в різні місяці або в один і той самий місяць; 2) принаймні двоє із них народилися в один і той самий місяць (Прийміть, що ймовірність народження людини в різні місяці року рівна).
4. На митницю прибувають потяги з однотипною продукцією трьох виробників А, В та С. Виробник А постачає 60% продукції, В – 25%, С – 15%. Серед продукції виробника А – 3% продукції, що не відповідає стандартам якості, В – 2%, С – 1%. Митник навмання бере деяку одиницю продукції і виявляє, що вона відповідає стандартам якості. Яка ймовірність того, що вона належить постачальнику С?
5. Відомо, що студенти становлять 30% від загальної кількості пасажирів. Знайти ймовірність, що серед чотирьох пасажирів купе: 1) 3 студенти; 2) хоча б 1 студент.
6. Завод відправив на базу 10000 якісних виробів. Ймовірність того, що в дорозі вони пошкодяться, рівна 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть: 1) 3 неякісні вироби; 2) не менше ніж 2 неякісні вироби.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-4,5	-3,2	-2,6	-1,8	0,7
P	0,14	0,21	0,26	0,28	

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ a\left(1+\dfrac{x}{5}\right), & -5<x\le 0,\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$$\alpha=-3;\quad \beta=2$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу і знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=3;\quad \sigma=4;\quad \alpha=2;\quad \beta=8$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	30	35	40	45	50	55	60
n_i	4	16	20	40	13	4	3

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

30	22	31	19	25	30	36	17	21	22
18	20	22	15	31	32	18	27	11	12
13	24	28	34	35	12	22	23	20	25
29	20	26	26	25	24	21	20	23	22
19	27	24	12	8	10	23	16	10	27

Варіант 19

1. Знайти ймовірність того, що число, вибране навмання із чисел 10, 11, 12, …, 99, виявиться кратним 11.
2. Слово ТАМБУР, записане на паперовій смужці, розрізають на 6 частин так, щоб у кожній частині була записана одна літера. Із шести літер навмання беруть по одній і розкладають в ряд. Таким чином було розкладено 5 літер. Яка ймовірність того, що одержано слово «румба» або слово «труба»?
3. У складі потяга 15 вагонів: 8 плацкартних, 6 купейних, 1 м'який. Ревізори заходять у три навмання обраних вагони. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони будуть одного класу; 2) хоча б один буде купейним?
4. Серед пасажирів потяга № 7 25% складають пасажири з Праги, 15% – з Братислави та 60% – із Львова. Серед пасажирів з Праги 20% громадян України, серед пасажирів з Братислави 30% громадян України, а серед пасажирів із Львова 90% громадян України. Яка ймовірність того, що навмання обраний пасажир не є громадянином України?
5. Кількість колій для посадки – 9. Відомо, що в середньому 40% часу на колії знаходяться потяги. Яка ймовірність того, що у момент часу потяги знаходяться: 1) на двох коліях; 2) хоча б на двох коліях?
6. Фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20% замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 800 клієнтів: а) 150 замовлять візитні картки; б) не більше 180 замовлять візитні картки?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	0,3	2,1	4,5	6,2	8,4
P	0,15	0,23	0,27		0,11

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{1}{2}, \\ a(1-2x), & -\dfrac{1}{2}<x\le 0, \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{1}{4};\quad \beta=1$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = 8; \quad \sigma = 5; \quad \alpha = 6; \quad \beta = 10$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

   1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
   2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	5	7	9	11	13	15	17
n_i	6	19	35	72	35	15	3

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
   1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
   2) побудувати гістограму частот;
   3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
   4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

30	22	31	19	25	30	36	17	21	22
18	20	22	15	31	32	18	27	11	12
13	24	28	34	35	12	22	23	20	25
29	20	26	26	25	24	21	20	23	22
19	27	24	12	8	10	23	16	10	27

Варіант 20

1. Із чисел 1, 2, 3, …, 8 навмання вибирають два. Яка ймовірність того, що їх сума буде парною?
2. 5 одногрупників в різний час придбали квитки на електропоїзд до Фастова. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть їхати в різних вагонах, якщо відомо, що в складі електропоїзда 8 вагонів.
3. В урні містяться 20 однакових за розміром кульок. Із них вісім червоного кольору, сім – синього та п’ять – зеленого. Навмання з урни беруть три кульки. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони одного кольору; 2)хоча б одна виявиться червоною?
4. 40% пасажирських вагонів є плацкартними, 50% – купейними, 10% – м’якими. Серед провідників плацкартних вагонів 30% чоловіків, серед провідників купейних вагонів 40% чоловіків, серед провідників м’яких вагонів 50% чоловіків. Провідник, обраний випадково – чоловічої статі. Яка ймовірність того, що він є провідником купейного вагона?
5. Залізничні каси працюють 80% часу, а 20 % знаходяться на перерві. Що імовірніше: працюють 7 чи 9 кас із 10 наявних в залі?
6. Верстат-автомат виготовляє деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться пошкодженою, дорівнює 0,03. Знайти ймовірність того, що серед

200 деталей: 1) 2 виявляться пошкодженими; 2) хоча б 2 виявляться пошкодженими.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-3,1	0,5	3,2	6,4	9,8
P	0,10	0,18		0,29	0,20

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a(1-2x), & -2<x\le 0,\\ 0, & x>0\end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{3}{2};\quad \beta=-\frac{1}{2}$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=10;\quad \sigma=2;\quad \alpha=12;\quad \beta=14$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	10	15	20	25	30	35	40
n_i	3	7	10	40	20	12	8

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

23	21	27	14	26	21	23	33	17	40
33	25	23	16	10	15	15	12	24	22
29	21	23	27	20	24	14	10	16	23
25	29	21	22	26	8	9	19	22	16
19	27	20	33	26	18	28	10	23	25

Варіант 21

1. Кинуто дві гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що добуток очок, які на них випали буде дорівнювати 6?
2. Менеджерові необхідно перевірити відділення своєї фірми у Києві, Львові та Дніпропетровську (в довільному порядку). Яка ймовірність, що його підлеглі правильно вгадають порядок відвідування відділень фірми?
3. При посадці до вагона заходили 20 пасажирів, 12 із яких студенти. Яка ймовірність того, що з перших чотирьох пасажирів, що зайдуть до вагона: 1) менше ніж два студенти; 2) хоча б один – студент?
4. Серед пасажирів потяга № 7 10% складають пасажири з Праги, 40% – з Братислави та 50% – із Львова. Серед пасажирів з Праги 20% громадян України, серед пасажирів з Братислави 30% громадян України, а серед пасажирів із Львова 90% громадян України. Навмання обраний пасажир не є громадянином України. Яка ймовірність того, що він їде із Львова?
5. Відомо, що в 70% потягів нумерація вагонів починається з голови потяга. Яка ймовірність того, що серед 5 потягів, що подані на посадку 1) в 2-х нумерація починається з голови; 2) хоча б в 2-х нумерація починається з голови?
6. Імовірність того, що покупець, який випадково зайшов до універсаму, зробить покупку, у середньому дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що із 100 покупців зроблять покупку: 1) 75 покупців; 2) не менше ніж 75?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	3,6	4,5	5,8	6,2	7,9
P	0,23		0,20	0,18	0,10

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(1-x), & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{1}{4};\quad \beta=\frac{1}{2}$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=20;\quad \sigma=5;\quad \alpha=15;\quad \beta=19$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	10	20	30	40	50	60	70
n_i	4	11	25	30	15	10	5

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

25	15	25	34	26	15	5	28	25	31
27	30	21	6	25	22	19	15	7	31
22	16	9	33	26	8	9	33	23	20
16	27	23	17	11	29	40	11	26	23
11	26	28	19	15	17	28	34	13	18

Варіант 22

1. Знайти ймовірність того, що число, вибране навмання із чисел 10, 11, 12, …, 99, виявиться кратним 3.
2. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 3-х гральних костей на них випадає різна кількість очок.
3. Проводиться профілактичний огляд 12 вагонів, серед яких 4 плацкартних та 8 купейних. Яка ймовірність того, що перші три вагони, які оглядаються: 1) будуть одного класу; 2) хоча б один буде плацкартним? (Вагони при огляді вибирають випадковим чином).
4. На трьох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі, причому 35% на першій лінії, 25% – на другій та 40% – на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першої лінією дорівнює 0,99, другою – 0,97, третьою – 0,98. Виготовлені протягом доби деталі надходять до складу. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь відповідає стандарту.
5. Прилад складається з семи незалежно працюючих вузлів. Надійність роботи кожного вузла (ймовірність безвідмовної роботи) є величиною сталою і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийдуть: 1) рівно два вузли; 2) не менше двох.
6. Телефонна станція обслуговує 200 абонентів. Для кожного з них імовірність того, що протягом 1 години він зателефонує на станцію, у середньому становить 0,001. Обчислити ймовірність таких випадкових подій: 1) протягом

однієї години зателефонують на станцію три абонента; 2) протягом однієї години зателефонує хоча б два абоненти.

7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-11,2	-9,7	-7,3	-5,4	-3,9
P		0,15	0,20	0,25	0,27

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a(2 - \frac{2}{3}x), & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$\alpha = 2; \quad \beta = 4$$

9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу і знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = 10; \quad \sigma = 5; \quad \alpha = 15; \quad \beta = 25$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	21	36	74	42	16	2

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

21	29	20	19	21	39	28	21	19	10
16	37	31	14	18	27	26	21	32	19
12	24	27	18	14	10	37	24	12	13
32	26	18	12	23	24	17	30	23	10
11	36	17	10	22	16	26	22	35	16

Варіант 23

1. Одночасно підкидають дві гральні кості. Обчислити ймовірність того, що сума чисел на гранях виявляться кратними 5.
2. У бригаді оглядачів вагонів працюють 9 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання вибрано 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виявиться 3 жінки.
3. Четверо одногрупників в різний час придбали квитки на експрес до Шостки. Знайти ймовірність того, що: 1) всі вони будуть їхати в різних вагонах або всі – в одному; 2) хоча б двоє будуть їхати в різних вагонах. Відомо, що в складі експреса 6 вагонів.
4. Для ремонту вагонів надходять деталі, виготовлені трьома цехами заводу. Із них 25% від цеху №1; 35% – від цеху №2; 40% – від цеху №3. Відомо, що брак першого цеху складає 0,3%, другого – 0,5%, третього – 0,9%. Яка ймовірність того, що випадково вибрана деталь не є бракованою?
5. Монету кинули шість разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: 1) п’ять разів; 2) хоча б один раз.
6. 200 верстатів працюють незалежно один від одного. Імовірність безвідмовної роботи кожного з них протягом робочої зміни стала й дорівнює 0,8. Обчислити ймовірність того, що протягом робочої зміни безвідмовно пропрацюють: 1) 165 верстатів; 2) не менше ніж 155 верстатів.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-5,2	-3,1	-1,7	1,4	3,3
P	0,16		0,30	0,18	0,15

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(1-\dfrac{x}{5}), & 0<x\le 5,\\ 0, & x>5\end{cases}$$

$\alpha=-2;\quad \beta=2$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=10;\quad \sigma=3;\quad \alpha=5;\quad \beta=14$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	18	36	72	38	18	6

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
   1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
   2) побудувати гістограму частот;
   3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
   4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

17	36	34	38	31	10	25	23	29	26
11	27	17	26	21	34	30	35	17	32
29	16	27	11	19	31	27	12	32	18
33	40	6	30	33	24	19	24	19	21
22	24	19	21	13	14	16	7	23	25

Варіант 24

1. Що ймовірніше: поява при киданні 2 гральних костей в сумі 5 чи 9 очок?
2. У розіграші першості з шахів бере участь 16 осіб. Розігруються золота, срібна та бронзова медалі. Яка ймовірність вгадати з першого разу трійку призерів (порядок прізвищ неважливий)?
3. Зроблено постріл по мішені з двох пістолетів. Ймовірність влучання із першого дорівнює 0,95; із другого – 0,81. Знайти ймовірність: 1) одного влучання в ціль; 2) хоча б одного влучання в ціль.
4. За статистикою 40% туристів подорожують поїздом, 45% – автобусом та 15% – літаком. Серед туристів, що подорожують поїздом 35% студентів, автобусом – 30% студентів, літаком – 10%. Обраний навмання для інтерв'ю турист – студент. Яка ймовірність того, що він подорожує літаком?
5. Яка подія є більш ймовірною: виграти у рівносильного суперника (нічийний рахунок виключений) чотири партії з шести чи п'ять з восьми?
6. Підручник видано накладом 20000 примірників. Імовірність того, що примірник випущено з дефектом, дорівнює 0,0003. Знайти ймовірність того, що випущений наклад містить: 1) три бракованих підручники; 2) більше ніж один бракований підручник.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-7,3	-5,2	-3,1	-1,7	1,4
P	0,10	0,18		0,20	0,12

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики

та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(4x+1), & 0<x\le \dfrac{1}{2},\\ 0, & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\alpha=-3;\quad \beta=\frac{1}{3}$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=20;\quad \sigma=10;\quad \alpha=15;\quad \beta=25$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	8	10	12	14	16	18	20
n_i	6	19	35	72	35	15	3

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

30	22	31	19	25	30	36	17	21	22
18	20	22	15	31	32	18	27	11	12
13	24	28	34	35	12	22	23	20	25
29	20	26	26	25	24	21	20	23	22
19	27	24	12	8	10	23	16	10	27

Варіант 25

1. Кинуто дві гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що добуток очок, які на них випали буде дорівнювати 4?
2. Профспілковий комітет складається з восьми осіб. Таємним голосуванням випадково вибирається голова, заступник та секретар. Журналіст висловив здогад про можливий склад керівництва комітету. Яка ймовірність, що склад співпаде з передбаченим?
3. У кімнаті знаходиться 5 осіб. Яка ймовірність того, що: 1) всі вони народились в різні місяці або в один і той самий місяць; 2) принаймні двоє із них народилися в один і той самий місяць (Прийміть, що ймовірність народження людини в різні місяці року рівна).
4. На трьох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі, причому 30% на першій лінії, 25% – на другій та 45% – на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першої лінією дорівнює 0,99, другою – 0,97, третьою – 0,98. Виготовлені протягом доби деталі надходять до складу. Навмання взята деталь відповідає стандарту. Визначити ймовірність того, що вона виготовлена на другій лінії.
5. Гральну кость кинули сім разів. Знайти ймовірність того, що чотири очки випадуть: 1) найімовірніше число разів; 2) не менше двох разів.
6. Імовірність того, що студент складе екзамен з математики, в середньому дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що із 100 студентів курсу екзамен з математики складуть: 1) 85 студентів; 2) не більше 75.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-5,2	-4,0	-3,5	-2,7	-1,9
P	0,10	0,13	0,19		0,38

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a(2x+1), & 0 < x \le 2, \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$\alpha = -1; \quad \beta = 1$$

9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = -3; \quad \sigma = 2; \quad \alpha = -1; \quad \beta = 4$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	85	95	105	115	125	135	145
n_i	6	15	34	29	18	15	9

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

23	21	27	14	26	21	23	33	17	40
33	25	23	16	10	15	15	12	24	22
29	21	23	27	20	24	14	10	16	23
25	29	21	22	26	8	9	19	22	16
19	27	20	33	26	18	28	10	23	25

Варіант 26

1. Знайти ймовірність того, що число, вибране навмання із чисел 11, 12, …, 90, виявиться кратним 11.
2. На дві вакансії претендує п'ятеро кандидатів, з яких троє мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що обидва вибрані кандидати мають вищу освіту, якщо ймовірність отримати посаду для всіх кандидатів була однакова.
3. Кинуто чотири гральні кості. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) на кожній із них випаде різна кількість очок або на всіх – однакова; 2) хоча б на двох – однакова?
4. Для ремонту вагонів надходять деталі, виготовлені трьома цехами заводу. Із них 35% від цеху №1; 35% – від цеху №2; 30% – від цеху №3. Відомо, що брак першого цеху складає 0,3%, другого – 0,5%, третього – 0,9%. Випадково вибрана деталь не є бракованою Яка ймовірність того, що вона виготовлена цехом №3?
5. Імовірність виграти по одному білету лотереї дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що з восьми куплених білетів виграють: 1) не більше, ніж два; 2) лише один.
6. Ймовірність запізнення пасажира на поїзд – 0,004. Знайти ймовірність того, що із 1000 на поїзд запізниться: 1) 3 пасажири; 2) хоча б 2.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	5,3	4,1	3,7	2,6	1,8
P	0,18	0,29	0,22	0,17	

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{1}{4}$$

9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = 1; \quad \sigma = 3; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 5$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	8	9	10	11	12	13	14
n_i	4	18	36	72	38	18	6

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

25	15	25	34	26	15	5	28	25	31
27	30	21	6	25	22	19	15	7	31
22	16	9	33	26	8	9	33	23	20
16	27	23	17	11	29	40	11	26	23
11	26	28	19	15	17	28	34	13	18

Варіант 27

1. Що ймовірніше: при двох киданнях монети: отримати хоча б один герб чи двічі отримати решки?
2. Слово ТРАНСКРИПЦІЯ, записане на паперовій смужці, розрізають на 12 частин так, щоб у кожній частині була записана одна літера. Із дванадцяти літер навмання беруть по одній і розкладають в ряд. Таким чином було розкладено 4 літери. Яка ймовірність того, що одержано слово «парк», «кран», «трап» або слово «цирк»?
3. Серед 9 пасажирів черги до залізничної каси 5 студентів. Яка ймовірність того, що з чотирьох навмання обраних пасажирів: 1) більше ніж два студенти; 2) хоча б один – студент?
4. За статистикою 50% туристів подорожують поїздом, 40% – автобусом та 10% – літаком. Серед туристів, що подорожують поїздом 35% студентів, автобусом – 30% студентів, літаком – 10%. Яка ймовірність того, що обраний навмання для інтерв'ю турист – студент?
5. У вузі 70% студентів отримує стипендії. Випадково відібрано 10 студентів. Яка ймовірність того, що: 1) більш ніж 8 студентів мають стипендію; 2) найімовірніше число студентів мають стипендію?
6. Імовірність своєчасної реалізації одиниці продукції дорівнює 0,8. Визначити ймовірність своєчасної реалізації: 1) не менше ніж 312 одиниць продукції; 2) найімовірнішого числа одиниць продукції із 400, що надійшли на реалізацію?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-3,4	-2,1	-1,3	0,7	1,5
P	0,13	0,27	0,25		0,15

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{1}{3};\quad \beta=\frac{1}{2}$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a=5;\quad \sigma=3;\quad \alpha=2;\quad \beta=10$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	5	6	7	8	9	10	11
n_i	20	27	64	81	48	25	12

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

21	29	20	19	21	39	28	21	19	10
16	37	31	14	18	27	26	21	32	19
12	24	27	18	14	10	37	24	12	13
32	26	18	12	23	24	17	30	23	10
11	36	17	10	22	16	26	22	35	16

Варіант 28

1. Біля зупинки зупиняються трамваї маршрутів № 32, 34, 38, 48. Для робітника попутними є маршрути № 32 і № 34. Знайти ймовірність того, що до зупинки першим підійде трамвай маршруту попутного для нього номера, якщо по лініях маршрутів №32, № 34, № 38, № 48 курсують відповідно 15, 12, 10, 13 потягів. Довжина маршрутів вважаються однаковими.
2. 33 літери українського алфавіту записані на картках розрізної абетки. Картки навмання беруть по одній, виписують літеру картки і повертають її до загалу. Таким чином було виписано 7 літер. Яка ймовірність того, що при цьому з’явиться слово «Україна» або «Держава»?
3. Ймовірність того, що довільний покупець, зайшовши у певний магазин, зробить покупку, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність, що покупку зробить : 1) тілки один; 2) хоча б один з двох покупців, які зайшли до магазину.
4. 40% пасажирських вагонів є плацкартними, 50% – купейними, 10% – м’якими. Серед провідників плацкартних вагонів 20% чоловіків, серед провідників купейних вагонів 30% чоловіків, серед провідників м’яких вагонів 40% чоловіків. Яка ймовірність того, що провідник, обраний випадково – чоловічої статі?
5. За певних технологічних умов 80% виготовлених вагонів є вищої якості. Знайти ймовірність того, що серед шести вибраних для перевірки вагонів, вищої якості буде: 1) найімовірніше число; 2) не менше п’яти.

6. Книга, яка складається з 2000 сторінок, має 100 помилок. Яка ймовірність того, що на випадково вибраній сторінці: 1) 3 помилки; 2) хоча б 1 помилка?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-3,2	-5,5	-7,8	-9,1	-11,6
P	0,10	0,18		0,23	0,20

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\,\beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(1-\dfrac{x}{7}), & 0<x\le 7,\\ 0, & x>7\end{cases}$$

$$\alpha=2;\quad \beta=6$$

9. Відомі математичні сподівання $a=M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma=\sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\,\beta]$.

$a=5;\quad \sigma=2;\quad \alpha=3;\quad \beta=8$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в,\, D_в,\, \sigma_в,\, s^2,\, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	5	11	17	23	29	35	41
n_i	15	30	45	85	50	30	15

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha=$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

17	36	34	38	31	10	25	23	29	26
11	27	17	26	21	34	30	35	17	32
29	16	27	11	19	31	27	12	32	18
33	40	6	30	33	24	19	24	19	21
22	24	19	21	13	14	16	7	23	25

Варіант 29

1. Задано дві множини цілих чисел: $\Omega_1 = \{1,2,3,4\}$, $\Omega_2 = \{1,2,3\}$. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Обчислити ймовірність того, що сума цифр виявиться кратною 3 і 2 одночасно.
2. При посадці до вагона заходили 20 пасажирів, 8 із яких студенти. Яка ймовірність того, що перші два пасажири, що зайдуть до вагона – студенти?
3. Зроблено постріл по мішені з двох пістолетів. Ймовірність влучання із першого дорівнює 0,88; із другого – 0,87. Знайти ймовірність: 1) одного влучання в ціль; 2) хоча б одного влучання в ціль.
4. Серед пасажирів потяга № 15 20% складають пасажири з Відня, 30% – з Будапешта та 50% – із Львова. Серед пасажирів з Відня 10% громадян України, серед пасажирів з Будапешта 15% громадян України, а серед пасажирів із Львова 90% громадян України. Навмання обраний пасажир не є громадянином України. Яка ймовірність того, що він їде із Львова?
5. Залізничні каси працюють 80% часу, а 20 % знаходяться на перерві. Знайти ймовірність того, що із 5 кас: 1) працюють 3; 2) працює найімовірніше число.
6. Відомо, що студенти становлять 25% від загальної кількості пасажирів. Знайти ймовірність, що серед 300 пасажирів потяга: 1) 72 студенти; 2) менш ніж 84 студенти?
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	-2,1	-4,4	-6,3	-8,6	-10,5
P	0,12		0,40	0,18	0,10

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha;\ \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$\alpha = -1; \quad \beta = 1$$

9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha;\ \beta]$.

$a = 11; \quad \sigma = 4; \quad \alpha = 9; \quad \beta = 15.$

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	13,5	14	14,5	15	15,5	16	16,5
n_i	4	16	40	25	7	5	3

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:
1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);
2) побудувати гістограму частот;
3) знайти точкові оцінки числових характеристик;
4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

33	28	16	39	21	28	15	32	15	26
10	23	20	26	28	16	21	18	24	14
26	9	18	20	27	19	14	24	8	23
5	22	23	22	24	27	24	13	29	7
22	19	12	6	30	19	31	12	36	17

Варіант 30

1. Знайти ймовірність того, що число, вибране навмання із чисел 11, 12, …, 90, виявиться кратним 2, 5 або 10.
2. 33 літери українського алфавіту записані на картках розрізної абетки. Картки навмання беруть по одній, виписують літеру картки і повертають її до загалу. Таким чином було виписано 6 літер. Яка ймовірність того, що при цьому з'явиться слово «квиток» або «тамбур»?
3. Кинуто п'ять гральних костей. Чому дорівнює ймовірність того, що: 1) на кожній із них випаде різна кількість очок або на всіх – однакова; 2) хоча б на двох – однакова?
4. Серед пасажирів потяга № 15 10% складають пасажири з Відня, 20% – з Будапешта та 70% – із Львова. Серед пасажирів з Відня 20% громадян України, серед пасажирів з Будапешта 30% громадян України, а серед пасажирів із Львова 90% громадян України. Яка ймовірність того, що навмання обраний пасажир не є громадянином України?
5. Відомо, що в 60% потягів нумерація вагонів починається з голови потяга. Яка ймовірність того, що серед 5 потягів, що подані на посадку: 1) в 3-х нумерація починається з голови; 2) більш ніж в 3-х нумерація починається з голови?
6. Пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента протягом часу Т дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що за час Т відмовлять: 1) 3 елементи; 2) хоча б 2 елементи.
7. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини побудувати функцію розподілу, многокутник розподілу та знайти числові характеристики.

ξ	1,4	2,3	3,0	4,5	5,8
P		0,17	0,22	0,23	0,27

8. За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт a, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в заданий інтервал $[\alpha; \beta]$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a(1 - \frac{x}{8}), & 0 < x \le 8, \\ 0, & x > 8 \end{cases}$$

$\alpha = 2; \quad \beta = 5$

9. Відомі математичні сподівання $a = M\xi$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma = \sigma\xi$ нормально розподіленої випадкової величини ξ. Побудувати графіки щільності та функції розподілу та знайти ймовірність потрапляння заданої величини в інтервал $[\alpha; \beta]$.

$a = 11; \quad \sigma = 5; \quad \alpha = 7; \quad \beta = 17$.

10. За заданим дискретним статистичним розподілом випадкової величини ξ потрібно:

1) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу;

2) знайти точкові оцінки $\left(\overline{x}_в, D_в, \sigma_в, s^2, M_0^*\right)$ числових характеристик ξ.

x_i	10,2	15,2	20,2	25,2	30,2	35,2	40,2
n_i	2	16	12	60	5	3	2

11. За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

1) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

2) побудувати гістограму частот;

3) знайти точкові оцінки числових характеристик;

4) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

19	26	24	21	20	22	26	25	34	17
26	15	28	27	29	9	8	6	31	23
17	28	25	24	26	30	29	28	17	21
19	32	13	33	31	12	24	12	19	24
29	28	15	35	14	32	36	17	16	26

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Метод безпосереднього (табличного) інтегрування.
5. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами.
6. Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
7. Інтегрування раціональних дробів. Розклад на елементарні дроби, виділення цілої частини.
8. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.
9. Інтегрування тригонометричних виразів. Універсальна тригонометрична заміна.
10. Інтегрування ірраціональних виразів.
11. Визначений інтеграл. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
12. Властивості визначеного інтеграла.
13. Формула Ньютона-Лейбніца.
14. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
15. Використання визначеного інтеграла для обчислення площі плоскої фігури.
16. Невласні інтеграли I і II роду. Дослідження їх збіжності.
17. Подвійний інтеграл та його обчислення.
18. Застосування подвійного інтеграла.
19. Диференціальні рівняння: означення, порядок рівняння, загальний розв'язок, частинний розв'язок, задача Коші.
20. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Приклад.
21. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Приклад.
22. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Приклад.
23. Інтегрування диференціального рівняння n - го порядку виду $y^{(n)} = f(x)$.
24. Інтегрування диференціального рівняння n-го порядку виду $F(x, y', ..., y^{(n)}) = 0$.
25. Інтегрування диференціального рівняння n-го порядку виду $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.
26. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Різні випадки коренів характеристичного рівняння.
27. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку $L[y] = f(x)$ зі спеціальною правою частиною $f(x)$.
28. Числові ряди. Основні поняття. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності.
29. Ознаки збіжності додатніх числових рядів. Ознаки порівняння, ознака Деламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші.
30. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Ознака Лейбніца.
31. Степеневі ряди. Інтервал, область та радіус збіжності степеневого ряду.

32. Розвинення функцій в степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена.
33. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
34. Основні правила та формули комбінаторики.
35. Випадкова подія. Види подій.
36. Поняття ймовірності. Класичне та статистичне означення ймовірності.
37. Повна група подій. Протилежні події.
38. Основні теореми теорії ймовірностей.
39. Ймовірність появи хоча б однієї події.
40. Формула повної ймовірності.
41. Формула Байєса.
42. Формула Бернуллі.
43. Наближені формули для схеми Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Пуассона.
44. Випадкова величина. Види випадкових ведичин.
45. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Багатокутник розподілу.
46. Функція розподілу дискретної випадкової величини та її властивості.
47. Числові характеристики дискретної випадкової величини, їх обчислення.
48. Закони розподілу дискретних випадкових величин (біноміальний, геометричний та Пуассона).
49. Неперевна випадкова величина. Функція розподілу.
50. Щільність неперервної випадкової величини, її властивості.
51. Числові характеристики неперервної випадкової величини, їх обчислення.
52. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал.
53. Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини.
54. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу неперервної випадкової величини.
55. Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини та його параметри.
56. Математична статистика. Генеральна сукупність. Вибірка. Статистичний розподіл вибірки. Емпірична функція розподілу. Полігон частот.
57. Інтервальний статистичний ряд. Частоти та відносні частоти.
58. Статистичні оцінки параметрів розподілу.
59. Точність оцінки, довірча ймовірність (надійність), довірчий інтервал.
60. Статистична перевірка гіпотез. Критерії Пірсона та Колмогорова.

ДОДАТКИ

Таблиця 1

Таблиця значень функції

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	2885	3876	3867	2857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0780	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0412	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0170
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0018	0047	0046

3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0001
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 2

Таблиця значення функції

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	0,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	02794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблиця 3

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів спроби	Рівень значущості α					
$k \setminus \alpha$	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	19,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.
2. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 334 с.
3. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 335 с.
4. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 623 с.
6. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К., 2000.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 2002. – 479 с.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 2000. – 400 с.

Навчально-методичне видання

Андрейцев Андрій Юрійович

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 2 для студентів денної форми навчання за спеціальністю 073 «Менеджмент»

Відповідальний за випуск – Андрейцев А.Ю.
Редактор Щербак Н. В.
Макет і верстка Андрієнка В. О.

Підписано до друку 05.12.16. Формат 60×84/16. Папір – офсетний. Спосіб друку – ризографія. Замовлення № 172/16. Наклад 30 примірників.

Надруковано в Редакційно-видавничому центрі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.2007 р. Серія ДК № 3079
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19