МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

Т.В. КРИЖАНОВСЬКА
О.О. КІЛЬЧИНСЬКИЙ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для самостійного опрацювання теми
«Комплексні числа та операції з ними»
Для студентів денної форми навчання за спеціальностями
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і
275 «Транспортні технології»

Київ 2016

УДК 51:517

Вища математика: Методичні вказівки для самостійного опрацювання теми «Комплексні числа та операції з ними». Для студентів денної форми навчання за спеціальностями 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і 275 «Транспортні технології»/ Крижановська Т.В., Кільчинський О.О. – К.: ДЕТУТ, 2016. – 19 с.

Методичні вказівки складені відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика». В них викладено теоретичні відомості, необхідні для засвоєння важливих розділів вищої математики, теоретичної механіки, електротехніки і радіотехніки, теорії автоматичного регулювання, тощо. Авторами подано розв'язки достатньої кількості задач для вироблення у студентів необхідних методичних навичок. Розроблено 30 варіантів індивідуальних завдань для самостійного опрацювання студентами.

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 4 від 17.11.2016 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки і менеджменту (протокол №   від 29.11.2016 р.).

Призначені для студентів денної форми навчання за спеціальностями 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і 275 «Транспортні технології»6.070105 «Рухомий склад залізниць»

Укладачі: Крижановська Т.В., к.ф.-м.н., професор
Кільчинський О.О., к.ф.-м.н., доцент

Рецензенти: Іванова Ю.І., к.ф.-м.н., доцент
Клецька Т.С., к.і.н., доцент

ЗМІСТ

Передмова та загальні методичні поради

Методичні вказівки складені для засвоєння студентами тематичного матеріалу, розвинення та поглиблення у них навичок самостійної роботи та контролю їх знань за темою «Комплексні числа та операції з ними», необхідною при навчанні у 2 семестрі І курсу за спеціальностями Л, ЗС та ЕМ (спеціальність підготовки 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і 275 «Транспортні технології»). З цією метою розроблено тематику і викладено відповідну методику розв'язування типових задач по всіх варіантах індивідуального завдання. Послідовність розв'язування задач співпадає з послідовністю вивчення теми і послідовністю поставлених задач у варіантах завдання.

При виконанні самостійної роботи студент повинен дотримуватись таких вимог:

1) номер варіанта індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
2) самостійна робота виконується на аркушах паперу у форматі А4;
3) перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписується її умова і всі конкретні дані до відповідного варіанта;
4) розв'язки кожної задачі супроводжуються необхідними поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

1) ознайомитись з рекомендованою літературою, вивчити теоретичний матеріал і скласти конспект за темою «Комплексні числа та операції з ними»;

2) ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до індивідуальних завдань;

5) завершену роботу у призначений строк здати на перевірку викладачу;

6) студенти, які не виконали індивідуальних завдань і не здали роботу вчасно, не допускаються до іспиту з дисципліни як такі, що не виконали навчальний план.

1. Комплексні числа в алгебраїчній формі

А. Теоретичні відомості

Означення1. **Комплексним числом** z **в алгебраїчній формі** називається вираз вигляду

$$z = x + iy \tag{1}$$

де x, y – дійсні числа, i – уявна одиниця, що має властивість

$$i^2 = -1 \quad \sqrt{-1} = \pm i . \tag{2}$$

Числа x, y у виразі (1) називають дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначають символами $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називають **рівними** (і пишуть $z_1 = z_2$), якщо рівні їх дійсні та уявні частини: $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

За означенням покладають $x + i0 = 0, \quad 0 + iy = y$. Комплексне число $x - iy$ називають спряженим до комплексного числа $z = x + iy$ і позначають через $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy . \tag{3}$$

Має місце властивість: $\bar{\bar{z}} = \bar{z}$.

Операції з комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення здійснюються з комплексними числами як зі звичайними алгебраїчними виразами, тільки слід враховувати, що $i^2 = -1$.

1) (додавання комплексних чисел)
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

2) (віднімання комплексних чисел)
$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

3) (множення комплексних чисел)
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 =$$
$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2);$$

4) (ділення комплексних чисел)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

На множину комплексних чисел розповсюджуються всі відомі властивості арифметичних операцій з дійсними числами; залишаються, у силі і всі формули скороченого множення.

Властивості операцій зі спряженими числами

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$; 3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$; 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Геометрична інтерпретація, модуль та аргумент комплексного числа

Комплексні числа можна зображувати на спеціальній площині, яка в цьому випадку називається комплексною площиною. Комплексне число $z=x+iy$ зображується на площині Oxy точкою $M(x,y)$ або радіусом–вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.1):

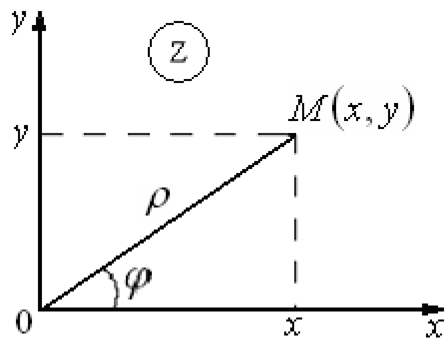

Рис.1

Довжина цього вектора позначається символом $|z|$ і називається модулем комплексного числа z, кут між цим вектором і додатною піввіссю Ox позначається через $Arg\,z$ і називається аргументом числа z. Значення $Arg\,z$ в межах інтервалу $[0;2\pi)$ позначається через $\arg z$ і називається головним. Модуль і аргумент знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned}&|z|=|x+iy|=\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\&\arg z=\varphi,\ \ Arg\,z=\arg z+2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),\end{aligned}\qquad(4)$$

де ρ,φ – полярні координати точки $M(x,y)$, що зображує комплексне число z :

$$\arg z=\varphi=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{|z|},\ \ y\ge 0;\\[2mm] 2\pi-\arccos\dfrac{x}{|z|},\ \ y<0.\end{cases}\qquad(5)$$

Спряжені числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$ зображуються на площині Oxy точками $M(x, y)$ та $\overline{M}(x, y)$, симетрично розташованими відносно осі Ox.

Комплексні числа $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$ зображується відповідно сумою та різницею радіус-векторів з кінцевими точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.

Величина $|z_1 - z_2|$ має геометричний зміст відстані між точками M_1 та M_2, що зображують числа z_1 та z_2.

Властивості модуля комплексного числа

$$1)\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad 2)\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad 3)\ |z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Б. Методика розв’язування типових задач

Приклад 1. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Розв’язання. Перетворимо рівняння, відокремивши з лівого боку дійсну та уявну частини:

$$(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i.$$

Звідси згідно з означенням рівності двох комплексних чисел складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, отримаємо розв'язок початкового рівняння: $x = 2,\ y = 1.$

Відповідь: $x = 2,\ y = 1.$

Приклад 2. По заданих комплексних числах $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 3 - 4i,\ z_3 = 1 + i$ знайти в алгебраїчній формі число $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}$.

Розв’язання. Виконуючи потрібні обчислення у чисельнику і знаменнику числа z, знайдемо:

$$z_1 z_2 = (2 + 3i)\ (3 - 4i) = 6 - 8i + 9i - 12i^2 = \left[i^2 = -1\right] = = 6 - 8i + 9i - 12(-1) = 18 + i,$$

$$z_2^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i + 16i^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i,$$

$$z_1 + z_1 z_2 + z_2^2 = (2+3i) + (18+i) + (-7-24i) = (2+18-7) + i(3+1-24) = 13-20i.$$

$$z_1 + z_3 = (2+3i) + (1+i) = 3+4i.$$

Звідси, склавши вираз для числа z, і виконавши операцію ділення комплексних чисел, знайдемо:

$$z = \frac{13-20i}{3+4i} = \frac{(13-20i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{(39-80) + i(-60-52)}{3^2 - (4i)^2} = \frac{-41-112i}{25} = -\frac{41}{25} - \frac{112}{25}i.$$

Відповідь: $z = -\frac{41}{25} - \frac{112}{25}i$.

2. Комплексні числа у тригонометричній

та показниковій формах

А. Теоретичні відомості

Означення 2. Тригонометричною та показниковою формами комплексного числа $z = x + yi$ називають відповідно вирази вигляду

$$z = \rho(\cos\Phi + i\sin\Phi), \text{ та } \quad z = \rho e^{i\Phi}, \tag{6}$$

де $\rho = |z|,\ \Phi = Arg\, z = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),\ \varphi = \arg z,$

а значення параметрів ρ, φ визначаються за формулами (4), (5)

Взаємозв’язок між тригонометричною та показниковою формами (6) базується на формулі Ейлера

$$e^{i\Phi} = \cos\Phi + i\sin\Phi. \tag{7}$$

Функція комплексної змінної $e^{i\Phi}$ має відомі алгебраїчні властивості звичайної показникової функції (як у випадку, коли б число i було дійсним), але на відміну від неї є періодичною з періодом $T = 2\pi i$. За властивістю періодичності маємо:

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,\ \ e^{i\Phi} = e^{iArg\, z} = e^{i\arg z + 2k\pi i} = e^{i\arg z} \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

Операції з комплексними числами в тригонометричній та показниковій формах

Нехай $z_1 = \rho_1 e^{i\Phi_1} = \rho_1(\cos\Phi_1 + i\sin\Phi_1),\ z_2 = \rho_2 e^{i\Phi_2} = \rho_2(\cos\Phi_2 + i\sin\Phi_2)$. Тоді операції з цими числами здійснюються за такими правилами:

1) (порівняння) комплексні числа z_1, z_2 вважаються рівними, $z_1 = z_2$, тоді і лише тоді, коли мають місце рівності:

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \Phi_1 = \Phi_2 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

2) (множення)
$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\Phi_1} \rho_2 e^{i\Phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\Phi_1 + \Phi_2)} = \\ = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\Phi_1 + \Phi_2) + i \sin(\Phi_1 + \Phi_2)\right]$$

3) (ділення)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\Phi_1}}{\rho_2 e^{i\Phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\Phi_1 - \Phi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\Phi_1 - \Phi_2) - \sin(\Phi_1 - \Phi_2)\right];$$

4) (піднесення до степеня) степені комплексного числа $z = \rho e^{i\Phi} =$

$= \rho(\cos\Phi + i \sin\Phi)$ знаходяться за формулою Муавра:

$$z^n = \left(\rho e^{i\Phi}\right)^n = \rho^n e^{in\Phi} = \rho^n (\cos n\Phi + i \sin n\Phi) \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9}$$

5) (видобування кореня) комплексне число w називається коренем $n-$го степеня з комплексного числа z, і пишуть $w = \sqrt[n]{z}$, тоді і лише тоді, коли $w^n = z;$ існує рівно n різних значень $\sqrt[n]{z}$, які при $z = \rho e^{i\Phi} = \rho(\cos\Phi + i \sin\Phi) \neq 0$ знаходяться за формулою:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\Phi}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\Phi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \\ = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) \ (k = \overline{0; n-1}), \tag{10}$$

де через $\sqrt[n]{\rho}$ позначено арифметичне значення кореня n-го степеня з дійсного числа ρ.

Зауваження: Виконуючи операції множення, ділення та піднесення до степеня у показниковій формі, корисно спиратись на властивість періодичності (8).

Б. Методика розв’язування типових задач

Приклад 3. 1) Подати комплексне число $z = \dfrac{3}{-\sqrt{3} + i}$ у тригонометричній та показниковій формах; 2) виходячи з алгебраїчної та показникової форм числа z, знайти значення z^3; 3) за формулою Муавра знайти значення z^{10}.

Розв’язання. 1) Поділимо чисельник на знаменник і приведемо число z до алгебраїчної форми:

$$z=\frac{3}{-\sqrt{3}+i}=\frac{3(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}=\frac{-3(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3})^2-i^2}=-\frac{3}{10}\sqrt{3}-\frac{3}{10}i.$$

Отже, $z=-\frac{3}{10}\sqrt{3}-\frac{3}{10}i$ – алгебраїчна форма числа z.

Виходячи з алгебраїчної форми, знайдемо модуль, головне значення аргументу та аргумент числа z. Відповідно до формул (1),(4),(5) матимемо:

$$x=-\frac{3}{10}\sqrt{3},\ y=-\frac{3}{10},\rho=|z|=\sqrt{\left(-\frac{3}{10}\sqrt{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{3}{10}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\frac{6}{10}.$$

Оскільки $y=-\frac{3}{10}<0$, то за формулою (5) знайдемо:

$$\varphi=\arg z=2\pi-\arccos\frac{x}{|z|}=2\pi-\arccos\frac{x}{|z|}=2\pi-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=2\pi-\left[\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\pi+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi.$$

Отже, $\varphi=\arg z=\frac{7}{6}\pi$ – головне значення аргумента, а $\Phi=Arg\,z=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – аргумент числа z і, як встановлено раніше, $\rho=|z|=\frac{6}{10}$. За цими даними згідно з формулами (6) тригонометричну та показникову форми числа z отримуємо відповідно у вигляді:

$$z=\rho\cos\Phi+i\sin\Phi \text{ та } \quad z=\rho e^{i\Phi},$$

де $\rho=|z|=\frac{6}{10}$, $\Phi=Arg\,z=\varphi+2k\pi$ $\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $\varphi=\arg z=\frac{7}{6}\pi$.

2) Виходячи з алгебраїчної форми числа z, знайдемо:

$$z^3=\left(-\frac{3}{10}\sqrt{3}-\frac{3}{10}i-\right)^3=\left(-\frac{3}{10}\right)^3(\sqrt{3}+i)^3=-\frac{3^3}{10^3}\left[(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2 i+3\sqrt{3}\,i^2+i^3\right]=$$

$$=-\frac{3^3}{10^3}\left[3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}(-1)+(-1)i\right]=-\frac{3^3}{10^3}8i=-0{,}216i.$$

Виходячи з показникової форми числа z, за формулою (9) при $n=3$ і знайдених значеннях $\rho=|z|=\frac{6}{10}$, $\varphi=\arg z=\frac{7}{6}\pi$ матимемо:

$$z^3=\left(\rho e^{i\varphi}\right)^3=\rho^3 e^{i3\varphi}=\left(\frac{6}{10}\right)^3 e^{i3\frac{7}{6}\pi}=\frac{6^3}{10^3}e^{i\frac{7}{2}\pi}=0{,}216\left(\cos\frac{7}{2}\pi+i\sin\frac{7}{2}\pi\right)=$$

$$=0{,}216\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]=-0{,}216i\,.$$

3) За формулою (8) при $n=10$ і значеннях $\rho=|z|=\dfrac{6}{10}$, $\varphi=\arg z=\dfrac{7}{6}\pi$ знайдемо:

$$z^{10}=\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{10}=\rho^{10}e^{i10\varphi}=\left(\frac{6}{10}\right)^{10}e^{i10\frac{7}{6}\pi}=\frac{6^{10}}{10^{10}}e^{i\frac{35}{2}\pi}=(0{,}6)^{10}\left(\cos\frac{35}{2}\pi+i\sin\frac{35}{2}\pi\right)=$$

$$=(0{,}6)^{10}\left[\cos\left(18\pi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(18\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=(0{,}6)^{10}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-(0{,}6)^{10}i.$$

Відповідь: 1) тригонометрична та показникові форми числа z мають вигляд:
$z=\dfrac{6}{10}\left[\cos\left(\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{7}{6}\pi+2k\pi\right)\right]$ та $z=\dfrac{6}{10}e^{i\left(\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right)}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$;

2) $z^3=-0{,}216i$; 3) $z^{10}=-(0{,}6)^{10}i$.

Приклад 4. Розв’язати квадратне рівняння $z^2+(8i-5)z+15-25i=0.$

Розв’язання: застосуємо відому формулу коренів рівняння $az^2+bz+c=0$:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\quad(D=b^2-4ac).$$

Поклавши $a=1,\ b=8i-5,\ c=15-25i,$ матимемо:

$D=(8i-5)^2-4(15-25i)=-99+20i=1^2-10^2+=1^2++2\cdot1\cdot10i+(10i)^2=(1+10i)^2,$

$z_{1,2}=\dfrac{-(8i-5)\pm\sqrt{(1+10i)^2}}{2}=\dfrac{-(8i-5)\pm(1+10i)}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow z_1=\dfrac{-(8i-5)+(1+10i)}{2}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i,\ z_2=\dfrac{-(8i-5)-(1+10i)}{2}=\dfrac{4-18i}{2}=2-9i.$

Відповідь: $z_1=3+i,\ z_2=2-9i.$

Приклад 5. Знайти корені рівняння $z^4-1-i=0$ та зобразити їх на комплексній площині.

Розв’язання: Приведемо рівняння до вигляду $z^4=1+i$. Звідси згідно з означенням кореня з комплексного числа знайдемо: $z=\sqrt[4]{1+i}$. Подамо підкореневе число $1+i$ у тригонометричній формі:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Застосовуючи формулу (10) при $n=4,\ \rho=\sqrt{2},\ \varphi=\dfrac{\pi}{4},$ отримаємо чотири різних значення $\sqrt[4]{1+i}$, які знаходяться за формулою:

$$z_k=\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{\rho e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{4}}}=\sqrt[4]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{4}\right)\quad (k=\overline{0;3}).$$

Надаючи числу k послідовних значень 0, 1, 2, 3, матимемо:

$$z_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)\approx 1{,}07+0{,}213i;$$

$$z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[8]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{16}+i\cos\frac{\pi}{16}\right)=\approx -0{,}213+1{,}07i;$$

$$z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right)\approx -1{,}07-0{,}213i;$$

$$z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[8]{2}\left(\sin\frac{\pi}{16}-i\cos\frac{\pi}{16}\right)=\approx 0{,}213-1{,}07i.$$

Отже, рівняння $z^4-1-i=0$ має чотири корені, які зображено (рис.2) на комплексній площині.

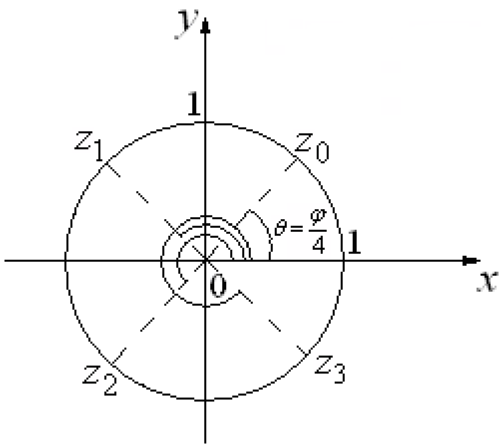

Рис.2

Відповідь: $z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),\ z_1 = \sqrt[8]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{16} + i\cos\frac{\pi}{16}\right),$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right),\ z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\sin\frac{\pi}{16} - i\cos\frac{\pi}{16}\right).$$

3. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти дійсні розв'язки рівнянь.

Варіанти завдання

1. $(3+2i)x+(5i-2)y=7-8i$;
2. $(i-2)x+(5+3i)y=11+11i$;
3. $(7i-1)x+(i+2)y=4-13i$;
4. $(1+3i)x+(3-4i)y=5-2i$;
5. $(3i-4)x+(1+2i)y=-7-3i$;
6. $(2i-3)x+(4+5i)y=9i-2$;
7. $(6+2i)y+(5-2i)x=14i-1$;
8. $(7-3i)x+(i-2)y=3-i$;
9. $(i-3)x+(1+8i)y=11i-8$;
10. $(4-5i)x+(i-3)y=15-16i$;
11. $(3i-2)x+(5-4i)y=1+2i$;
12. $(5-6i)x+(2+i)y=14i-6$;
13. $(5+2i)x+(3i-1)y=13-5i$;
14. $(i+3)x+(7-5i)y=19-21i$;
15. $(8i+3)x+(1-2i)y=17+8i$;
16. $(3i+2)y+(5-2i)x=7i-8$;
17. $(i-2)x+(5+3i)y=11(1+i)$;
18. $(1+2i)x+(7-i)y=4i-13$;
19. $(3+i)y+(3-4i)x=5i-2$;
20. $(i+2)x+(3-4i)y=3+7i$;
21. $(5+4i)x+(2-3i)y=9-2i$;
22. $(6+2i)x+(5i-2)y=14-i$;
23. $(i-2)x+(7-3i)y=3-i$;
24. $(i-3)y+(1+8i)x=11i-8$;
25. $(i-3)x+(4-5i)y=16i-15$;
26. $(3i-2)y+(5-4i)x=1+2i$;
27. $(2+i)x+(5-6i)y=14i-6$;
28. $(5+2i)y+(3i-1)x=13-5i$;
29. $(7i-5)x+(3+i)y=19i-21$;
30. $(3+8i)y+(1-2i)x=17+8i$.

Завдання 2. По заданих комплексних числах z_1, z_2, z_3 знайти в алгебраїчній формі число $z=\dfrac{z_1+z_1z_2+z_2^2}{z_1+z_3}$.

Варіанти завдання

1. $z_1=1-5i,\ z_2=3+2i,\ z_3=2-3i$.
2. $z_1=-2+4i,\ z_2=4-3i,\ z_3=6-7i$.

3. $z_1 = 4 + 7i,\ z_2 = 1 - 3i,\ z_3 = -7 + 2i.$ 4. $z_1 = 3 + 5i,\ z_2 = 2 + 3i,\ z_3 = 2 - 3i.$

5. $z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = 5 + 2i,\ z_3 = 3 - 6i.$ 6. $z_1 = 2 + 7i,\ z_2 = 3 + i,\ z_3 = -6 - 2i.$

7. $z_1 = 3 - 5i,\ z_2 = -4 + 2i,\ z_3 = 1 + 8i.$ 8. $z_1 = 7 - 2i,\ z_2 = -3 + i,\ z_3 = -5 + 7i.$

9. $z_1 = -6 + 3i,\ z_2 = -2 + 3i,\ z_3 = -2 + i.$ 10. $z_1 = -4 + i,\quad z_2 = -5 + 4i,\quad z_3 = 2 - 4i.$

11. $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 3 - 5i,\ z_3 = 4 + i.$ 12. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - 3i,\ z_3 = 3 = 2i.$

13. $z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = 7 - i,\ z_3 = 3 + i.$ 14. $z_1 = 5 - 2i,\ z_2 = 5 - 3i,\ z_3 = -2 + 6i.$

15. $z_1 = -3 + 8i,\ z_2 = 6 + 5i,\ z_3 = -2 - 5i.$ 16. $z_1 = -5 + i,\ z_2 = 3 - 2i,\ z_3 = -3 + 2i.$

17. $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 4 + 3i,\ z_3 = -7 + 6i.$ 18. $z_1 = 7 + 4i,\ z_2 = 1 + 3i,\ z_3 = 2 - 7i.$

19. $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = 2 - 3i,\ z_3 = -3 + 2i.$ 20. $z_1 = 2 - i,\ z_2 = 5 - 2i,\ z_3 = -6 + 3i.$

21. $z_1 = 7 + 2i,\ z_2 = 3 - i,\ z_3 = -2 - 6i.$ 22. $z_1 = -5 + 3i,\ z_2 = -4 - 2i,\ z_3 = 8 + i.$

23. $z_1 = -2 + 7i,\ z_2 = -3 - i,\ z_3 = 7 - 5i.$ 24. $z_1 = 3 - 6i,\ z_2 = -2 - 3i,\ z_3 = 1 - 2i.$

25. $z_1 = 1 - 4i,\ z_2 = -5 - 4i,\ z_3 = -4 + 2i.$ 26. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 3 + 5i,\ z_3 = 1 + 4i.$

27. $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 + 3i,\ z_3 = -2 - 3i.$ 28. $z_1 = -2 - 7i,\ z_2 = 7 + i,\quad z_3 = 1 + 3i.$

29. $z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 5 + 3i,\ z_3 = 6 - 2i.$ 30. $z_1 = 8 - 3i,\ z_2 = 6 - 5i,\ z_3 = -5 - 2i.$

Завдання 3. 1) Подати задане комплексне число z у тригонометричній та показниковій формах; 2) виходячи з алгебраїчної та показникової форм числа z, знайти значення z^3; 3) за формулою Муавра знайти значення z^{10}.

Варіанти завдання

1. $z = 1 + i\sqrt{3}.$ 2. $z = 5(1 - i\sqrt{3}).$ 3. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{-1 + i}.$

4. $z = -1 - i\sqrt{3}.$ 5. $z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}.$ 6. $z = \dfrac{4}{1 + i\sqrt{3}}.$

7. $z = \sqrt{3} - i.$ 8. $z = -1 - i\sqrt{3}.$ 9. $z = \dfrac{6}{1 + i}.$

10. $z = -3 + 3i.$

11. $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i.$

12. $z = \dfrac{6}{-1 + i\sqrt{3}}.$

13. $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}.$

14. $z = \dfrac{4}{1 - i\sqrt{3}}.$

15. $z = \dfrac{4i}{1 - i\sqrt{3}}$

16. $z = -1 - i\sqrt{3}.$

17. $z = \dfrac{i\sqrt{2}}{1 - i}.$

18. $z = \dfrac{3i}{1 + i\sqrt{3}}.$

19. $z = 2\sqrt{3} + 2i.$

20. $z = -4 + 4i.$

21. $z = \dfrac{2i}{\sqrt{3} - i}.$

22. $z = \dfrac{4}{1 + i\sqrt{3}}.$

23. $z = \dfrac{(1 + i)^2}{\sqrt{3} - i}.$

24. $z = \dfrac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{(1 - i)^2}.$

25. $z = -\sqrt{27} + 3i.$

26. $z = \dfrac{1 + i}{\sqrt{6}}.$

27. $z = \dfrac{2}{(1 - i)^2(\sqrt{3} + i)}.$

28. $z = \dfrac{7 + i}{3 + 4i}.$

29. $z = \dfrac{(1 - i)^2}{1 + \sqrt{3}\,i}.$

30. $z = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{(1 + i)^2}.$

Завдання 4. Розв'язати квадратні рівняння.

Варіанти завдання

1. $z^2 + (2 - 3i)z - 5 - 5i = 0.$

2. $z^2 - (3 + i)z + 14 + 5i = 0.$

3. $z^2 - (1 + 6i)z - 7 + 9i = 0.$

4. $z^2 - (5 + 3i)z + 10 + 10i = 0.$

5. $z^2 - (8 + 3i)z + 5 + 15i = 0.$

6. $z^2 + (5i - 3)z - 4 - 8i = 0.$

7. $z^2 - (6i + 1)z - 14 + 8i = 0.$

8. $z^2 - (3 - 4i)z + 7 - 3i = 0.$

9. $z^2 - (6 + 5i)z + 2 + 16i = 0.$

10. $z^2 - (3 + i)z + 14 + 5i = 0.$

11. $z^2 + (2 - 8i)z - 11 - 8i = 0.$

12. $z^2 + (4 - 5i)z - 11 - 7i = 0.$

13. $z^2 - (4 + 5i)z + 10(1 + i) = 0.$

14. $z^2 + (6 - 8i)z + 2 - 24i = 0.$

15. $z^2 - (1 + 5i)z - 16 - 8i = 0.$

16. $z^2 - (3 + 2i)z - 5 - 5i = 0.$

17. $z^2 + (3i - 1)z + 14 + 5i = 0.$

18. $z^2 + (i - 6)z - 7 + 9i = 0.$

19. $z^2+(5i-3)z+10+10i=0.$ 20. $z^2+(i-5)z-16-8i=0.$

21. $z^2+(8i-3)z+5+15i=0.$ 22. $z^2+(5+3i)z-4-8i=0.$

23. $z^2+(i-6)z-14+8i=0.$ 24. $z^2+(3i+4)z+7-3i=0.$

25. $z^2+(6i-5)z+2+16i=0.$ 26. $z^2+(3i-1)z+14+5i=0.$

27. $z^2-(2i+8)z-11-8i=0.$ 28. $z^2-(4i+5)z-11-7i=0.$

29. $z^2(4i-5)z+10(1+i)=0.$ 30. $z^2-(8+6i)z+2-24i=0.$

Завдання 5. Знайти корені рівняння та зобразити їх на комплексній площині.

Варіанти завдання

1. $z^4+81=0.$ 2. $2z^4+1-\sqrt{3}\,i=0.$ 3. $z^3-27=0.$

4. $125z^3-i=0.$ 5. $z^4-81=0.$ 6. $2z^4+1+\sqrt{3}\,i=0.$

7. $z^3+27=0.$ 8. $z^3+i=0.$ 9. $z^4+16=0.$

10. $32z^4-1-3i=0.$ 11. $z^3-8=0.$ 12. $z^3-8i=0.$

13. $z^4-16=0.$ 14. $32z^4+1+\sqrt{3}\,i=0.$ 15. $z^3+8i=0.$

16. $z^3+8=0.$ 17. $16z^4+1=0.$ 18. $z^4+8-8\sqrt{3}\,i=0.$

19. $8z^3-1=0.$ 20. $8z^3-i=0.$ 21. $16z^4-1=0.$

22. $z^4+8+8\sqrt{3}\,i=0.$ 23. $8z^3+1=0.$ 24. $6z^3+i=0.$

25. $z^4+128(1-\sqrt{3}\,i)=0.$ 26. $27z^3-1=0.$ 27. $256z^4-1=0.$

28. $z^4+128(1+\sqrt{3}\,i)=0.$ 29. $27z^3+8=0.$ 30. $256z^4+i=0.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.

2. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 334 с.

3. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – 2-ге вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2006. – 608 с.

Навчально-методичне видання

КРИЖАНОВСЬКА ТЕТЯНА ВАСИЛІВНА
КІЛЬЧИНСЬКИ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСАНДРОВИЧ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
для виконання вхідного контролю
для студентів денної форми навчання за спеціальностями
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і
275 «Транспортні технології»

Відповідальна за випуск – Крижановська Т.В.
Редакція авторська

Підписано до друку 15.12.16. Формат 60×84/16
№ 174/16.

Підготовлено до подання в електронну бібліотеку
в Редакційно-видавничому відділі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію: Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р.
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19