МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки і контрольні завдання
для студентів заочної форми навчання

ЧАСТИНА 2

Київ 2014

УДК 51.517

Крюков М. М., Крижановська Т. В., Андрейцев А. Ю. та ін.

Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика: Методичні вказівки і контрольні завдання для студентів заочної форми навчання. / Частина 2. – К.: Державний економіко-технологічний університет транспорту, 2014. – 76 с.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 2 від 21 вересня 2011 р.) і на засіданні методичної комісії факультету економіки та менеджменту (протокол № __ від 25 жовтня 2011 р.).

Призначено для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030509 «Облік і аудит», 6.030504 «Економіка підприємства».

Укладачі: **М. М. Крюков,** професор, д. т. н.;
Т. В. Крижановська, к. ф.-м. н., доцент**;**
А. Ю. Андрейцев, к. ф.-м. н, доцент;
О. О. Кільчинський, к. ф.-м. н., доцент**;**
Т. М. Семененко, старший викладач;
Т. С. Клецька, ст. викладач;

Рецензенти: **І. Г. Бакаєва,** к. е. н., доцент кафедри менеджменту організацій і логістики Державного економіко-технологічного університету транспорту;
І. К. Сахацька, к. ф.-м. н., доцент кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету

ЗМІСТ

ВСТУП

Між явищами, які ми спостерігаємо у навколишньому світі, існує два типи зв'язків: детерміновані та статистичні.

Детерміновані, або функціональні, зв'язки досліджуються методами вищої математики, що викладені раніше («Математика для економістів. Методичні вказівки і контрольні завдання для студентів заочної форми навчання. Ч. 1.»)

Статистичні, або кореляційні, зв'язки досліджуються методами теорії ймовірностей і математичної статистики, яким присвячена запропонована друга частина методичних вказівок.

Зміст дисципліни ***«Теорія ймовірностей і математична статистика»*** розкривається в темах другого модуля.

Модуль 2. **Теорія ймовірностей і математична статистика**

1. Основні поняття теорії ймовірностей.
2. Аксіоми та основні теореми теорії ймовірностей.
3. Формули повної ймовірності. Формула Байєса.
4. Дискретні випадкові величини.
5. .Неперервні випадкові величини.
6. .Розподіли дискретних і неперервних випадкових величин.
7. Граничні теореми теорії ймовірностей.
8. Ланцюги Маркова.
9. Системи масового обслуговування.
10. Основні поняття математичної статистики.
11. Точкове і інтервальне оцінювання параметрів розподілів кількісних ознак.
12. Перевірка статистичних гіпотез.
13. Елементи теорії кореляції.

Матеріал кожної теми викладений в такій послідовності: короткі теоретичні відомості; повністю розв'язані приклади; варіанти контрольних робіт. Таким чином, при самостійній підготовці студент має можливість ознайомитись з основними означеннями та формулами, а також розглянути типові приклади, а потім перейти до розв'язання задач для закріплення вивченого матеріалу. Така структура відповідає вимогам входження України в Болонський процес, де суттєво збільшується обсяг самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Методичні вказівки складені на підставі освітньо-професійної програми підготовки бакалавра галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» для студентів заочної форми навчання за напрямами підготовки:

– 6.030508 «Фінанси і кредит»;
– 6.030509 «Облік і аудит»;
– 6.030504 «Економіка підприємства».

Кожне завдання містить 30 варіантів. Перелік задач і вибір номера варіанта для кожного студента визначається викладачем.

Розділ 1. Основні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – це розділ математики, який вивчає закономірності у випадкових явищах.

Означення 1. **Елементарною подією** називається кожен з можливих результатів даного випробування.

Означення 2. **Простором елементарних подій Ω** називається множина всіх елементарних подій даного випробування.

Означення 3. **Подією** називається будь-яка підмножина простору елементарних подій.

Означення 4. **Випадковою подією *A*** називається подія, яка в результаті даного випробування може відбутися, а може не відбутися.

Означення 5. **Достовірною подією Ω** називається подія, яка обов'язково відбудеться в умовах даного випробування.

Означення 6. **Неможливою подією Ø** називається подія, яка не може відбутися в умовах даного випробування.

Означення 7. Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої події у тому ж самому випробуванні.

Означення 8. Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої події у тому ж самому випробуванні.

Означення 9. Дві події A і $\overline{A}$ називають **протилежними**, якщо вони несумісні і утворюють повну групу. Подія A настає тоді, коли не настає $\overline{A}$, і навпаки.

Означення 10. **Ймовірністю події *A*** називається об'єктивна міра степеня можливості цієї події в даному випробуванні. Позначається ймовірність $P(A)$.

Будемо казати, що побудовано **ймовірнісний простір** (Ω, S, P) даного випробування, якщо визначено простір елементарних подій Ω, клас всіх підмножин S множини Ω і ймовірності всіх елементарних подій P.

Класичне означення ймовірності

Означення 11. **Ймовірністю випадкової події *A*** називається відношення кількості m рівноможливих елементарних подій, що сприяють появі події A, до кількості n всіх рівноможливих елементарних подій даного випробування:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що карта, витягнута навмання з колоди у 36 карт, буде тузом.

Розв'язання: Розглянемо подію A – з колоди витягли туза. Сприятливих для даної події результатів буде чотири (в колоді чотири тузи), отже $m = 4$. Всіх рівноможливих результатів буде 36, тому $n = 36$.

За класичним означенням ймовірності $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Відповідь: $\frac{1}{9}$.

Щоб обчислити ймовірність події A за класичним означенням, потрібно вміти знаходити кількість сприятливих елементарних подій та кількість всіх елементарних подій даного випробування. Для цього застосовують правила та формули комбінаторики.

Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B – n способами, то один з об'єктів A або B можна вибрати $m+n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати m способами а об'єкт B – n способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати mn способами.

Основні формули комбінаторики

Перестановками з *n* елементів називаються всі множини, що складаються з заданих n елементів і відрізняються лише їх порядком.

$$P_n = n!$$

Розміщеннями з *n* елементів по *k* елементів називаються всі множини, що складаються з k різних елементів, вибраних серед n існуючих, і відрізняються або складом, або порядком.

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Комбінаціями з *n* елементів по *k* елементів називаються всі множини, що складаються з k різних елементів, вибраних серед n існуючих, і відрізняються хоча б одним елементом.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 2. За підсумками року акції 4 фірм з 10 конкуруючих в даній галузі мали прибуток, а акції решти – знецінились. Визначити ймовірність того, що серед випадково куплених 7 акцій різних фірм 3 акції дадуть прибуток.

Розв'язання: Спочатку розглянемо сприятливі для нас результати випробування. Тобто з 7 придбаних акцій різних фірм 3 виявилися прибутковими, а решта $7-3=4$ – знецінені.

Три фірми з чотирьох, акції яких мали прибуток, можна вибрати

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4 \text{ способами.}$$

При цьому решта 4 акції мають бути збитковим. Вибрати ці 4 акції з 6 (акції 6 фірм знецінились) можна

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15 \text{ способами.}$$

За правилом добутку число сприятливих результатів випробування дорівнює:

$$m = C_4^3 \cdot C_6^4 = 60.$$

Тепер розглянемо всі можливі результати випробування, тобто всі можливі варіанти вибору 7 акцій різних фірм з 10 існуючих. 7 фірм з 10 конкуруючих в даній галузі можна вибрати:

$$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120 \text{ способами.}$$

Тобто загальна кількість всіх елементарних подій дорівнює $n = 120$.

За класичним означенням шукана ймовірність дорівнює відношенню числа результатів випробувань, сприятливих для розглядуваної події, до числа всіх рівноможливих результатів випробувань:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{60}{120} = 0{,}5$$

Відповідь: $0{,}5$.

Завдання для самостійної роботи №1

Варіант	Задача
1	В штаті деякої фірми є три рівноцінних вакансії. Яка ймовірність, що претендент зможе зайняти посаду, якщо на ці місця крім нього претендують ще п'ятеро випускників університету з однаковими шансами?
2	На п'яти картках написані букви А, Д, И, Т, У. Після перемішування картки розкладають в ряд довільним чином. Яка ймовірність того, що буде отримано слово АУДИТ?
3	За підсумками року акції 8 фірм з 20 конкуруючих в даній галузі мали прибуток, акції 10 – зберегли свою номінальну вартість, а акції решти – знецінились. Визначити ймовірність того, що випадково вибрана акція довільної фірми буде збитковою.
4	Менеджерові необхідно перевірити відділення своєї фірми у Києві, Львові та Дніпропетровську (в довільному порядку). Яка ймовірність, що його підлеглі правильно вгадають порядок відвідування відділень фірми?
5	Номер гаманця WebMoney складається з першої букви, яка визначає валюту рахунку (Z – долари, U – гривні) і 12 цифр. Яка ймовірність, що клієнт, який пам'ятає тільки валюту рахунку і три перших цифри, правильно вгадає номер гаманця з першого разу?
6	Експерт з управління цінними паперами розглядає 10 будівельних, 6 страхових та 4 туристичних фірми як об'єкти для інвестування. Яка ймовірність, що буде вибрано будівельну або туристична фірму, якщо проінвестована буде лише одна компанія?
7	До ради директорів місцевого акціонерного товариства мають вибрати чотирьох осіб з дев'яти акціонерів. Яка ймовірність, що журналіст місцевої газети правильно вгадає склад ради?
8	Знайти ймовірність того, що карта, витягнута навмання з колоди у 36 карт, буде пікової масті.
9	Код доступу до інтернет-рахунку в платіжній системі складається з шести букв англійського алфавіту, перша і четверта – великі (наприклад – VfaNam). Клієнт пам'ятає тільки перші три букви, решту набирає навмання. Яка ймовірність, що він вгадає код, якщо після п'ятої спроби рахунок блокується?

10	На чотирьох картках написані букви А, Б, К, Н. Після перемішування картки розкладають в ряд довільним чином. Яка ймовірність того, що буде отримано слово БАНК?
11	Профспілковий комітет складається з восьми осіб. Таємним голосуванням випадково вибирається голова, заступник та секретар. Журналіст висловив здогад про можливий склад керівництва комітету. Яка ймовірність, що склад співпаде з передбаченим?
12	Кандидат у депутати планує відвідати 8 різних міст України. Порядок їх вибору визначається випадково. Яка ймовірнсть вгадати розклад передвиборчого туру депутата?
13	Проводилося спостереження над 2000 споживачами для того, щоб визначити їх уподобання щодо двох сортів чаю. Виявилося, що протягом досліджуваного періода 500 осіб придбало чай першої марки, 135 – другої та 125 – обидві. Яка ймовірність, що випадково вибрана людина з досліджуваної групи не придбає жодної з цих марок?
14	Штат деякої фірми складається з 55 чоловіків та 45 жінок. 20% чоловіків та 30% жінок, що працюють на фірмі, мають економічну освіту. Яка ймовірність, що вибраний навмання працівник фірми буде мати економічну освіту?
15	Код доступу до гаманця WebMoney складається з шести цифр. Яка ймовірність, що клієнт, який пам'ятає тільки номер рахунку і три перших цифри кода, правильно вгадає номер гаманця з першого разу?
16	Служба зайнятості набрала на курси підвищення кваліфікації економістів 60 слухачів, з яких 30% молодше 40 років. Знайти ймовірність, що випускник курсів, що отримав направлення на роботу до деякої фірми, буде молодше 40 років.
17	Код картки поповнення рахунку мобільного телефону складається з чотирнадцяти цифр, з яких дві останні було стерто. Їх власник картки набирає навмання. Яка ймовірність, що він зможе поповнити рахунок, якщо в нього є три спроби, після чого номер блокується?
18	В лотереї розігрується 10000 білетів, з яких 111 виграшних. 1 дає змогу виграти автомобіль, 10 – телевізор, а решта – грошові призи. Знайти ймовірність, що випадково куплений квиток принесе грошовий виграш.
19	Служба зайнятості набрала на курси підвищення кваліфікації бухгалтерів 200 слухачів, з яких 30% старше 35 р. Знайти ймовірність, що випускник курсів, що отримав направлення на роботу до деякої фірми, буде молодше 35 р.
20	На п'яти картках написані букви А, К, Ц, І, Я. Після перемішування картки розкладають в ряд довільним чином. Яка ймовірність того, що буде отримано слово АКЦІЯ?
21	Фінансовий аналітик оцінює шанси того, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця як 2:3 (зростання ціни не передбачається). Яка ймовірність, що протягом наступного місяця ціна облігацій залишиться на тому самому рівні?

22	Протягом деякого періоду акції двох промислових підприємств з десяти, що працюють в одному сегменті ринку, зросли в ціні. Знайти ймовірність, що інвестор, який на початку року випадковим чином придбав акції двох підприємств з цього списку, отримає прибуток по всіх своїх акціях.
23	Корпорація має свої підприємства в 7 різних галузях виробництва. В кожній з них вона може отримати прибуток з однаковою ймовірністю. Відомо, що підприємства 5 галузей виявилися прибутковими. Яка ймовірність, що радіотехнічний завод, який входить до складу корпораціїї, виявиться прибутковим?
24	За підсумками року акції 9 страхових фірм мали прибуток, акції восьми – зберегли свою номінальну вартість, а акції трьох – знецінились. Визначити ймовірність того, що акції однієї випадково вибраної фірми з даного списку змінить свою вартість.
25	До ревізійного комітету банку мають вибрати чотирьох осіб з десяти кандидатів. Яка ймовірність вгадати майбутній склад комітету?
26	Знайти ймовірність того, що карта, витягнута навмання з колоди у 52 карти, буде джокером.
27	Трьох стажистів мають розподілити по трьох відділах деякої фірми. Яка ймовірність вгадати правильно порядок заміщення вакансій?
28	До профспілкового комітету деякого підприємства мають вибрати трьох осіб з восьми кандидатів з великим стажем роботи. Яка ймовірність, що склад комітету співпаде з минулорічним?
29	Аудитор планує перевірити протягом тижня чотири фірми в довільному порядку. Яка ймовірність, що керівник однієї з них правильно вгадає порядок відвідування фірм?
30	Експерт з управління цінними паперами розглядає 20 будівельних, 10 страхових та 5 туристичних фірм як об’єкти для інвестування. Рейтинги компаній приблизно однакові. Яка ймовірність, що буде вибрано не будівельну фірму, якщо проінвестовано буде лише одну компанію?

Розділ 2. Основні теореми теорії ймовірностей

Означення 1. **Умовною ймовірністю** $P(A/B)$ називають ймовірність події A, обчислену у припущенні, що подія B вже відбулася.

Означення 2. Події A і B називають **незалежними**, якщо

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

тобто поява події A не змінює ймовірність появи події B. У протилежному випадку події A і B називають **залежними**. Тоді

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Означення 3. **Сумою** $A + B$ (або об’єднанням $A \bigcup B$) подій A і B називається подія, яка полягає в тому, що настає принаймні одна з подій A, B.

Означення 4. **Добутком** AB (або перетином $A \bigcap B$) подій A і B називається подія, яка настає тоді і тільки тоді, коли одночасно настають обидві події A, B.

Аксіоми теорії ймовірностей

Аксіома 1. $P(A) \geq 0$ для будь-якої події A.
Аксіома 2. $P(\Omega) = 1$ для достовірної події Ω.
Аксіома 3. Якщо A_1, A_2, ..., A_n,... будь-яка злічена послідовність попарно несумісних подій, то $P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$

Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема 1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(Ш) = 0$.

Теорема 2. $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$.

Теорема 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема 4. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій A або B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Наслідок. Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, ..., A_n, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... , $\overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Приклад 1. Протягом поточного місяця банк може видати 20 позик: 8 довгострокових і 12 короткострокових. Знайти ймовірність того, що дві перших виданих позики будуть довгостроковими.

Роз'язання: Нехай подія A полягає в тому, що перша позика довгострокова, B – друга позика довгострокова. Події A і B залежні (кількість позик обмежена), тому їх ймовірності будуть дорівнювати:

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}; \quad P(B / A) = \frac{7}{19}.$$

Тоді подія AB – обидві перші видані позики довгострокові. За формулою добутку ймовірностей залежних подій шукана ймовірність:

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}.$$

Відповідь: $\frac{14}{95}$.

Приклад 2. Два менеджера по роботі з клієнтами можуть отримати підвищення з ймовірностями 0,6 і 0,3 незалежно один від одного. Знайти ймовірність, що підвищення отримає тільки один з них.

Розв'язання: Позначимо A і B випадкові події, які полягають в тому, що перший і другий менеджер отримали підвищення.

Ймовірності цих подій за умовою задачі: $P(A) = 0{,}6; \quad P(B) = 0{,}3$.

Тоді $\overline{A}, \overline{B}$ – протилежні події – підвищення вони не отримали.

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 .$$

Ймовірність того, що перший менеджер отримав підвищення, а другий – ні, за означенням незалежних подій:

$$P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42 .$$

Ймовірність того, що підвищення отримав другий, а перший – ні:

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 .$$

А ймовірність того, що підвищення отримав тільки один з них за аксіомою 3 дорівнює:

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54 .$$

Відповідь: 0,54.

Приклад 3. Перевірка деякого підприємства пожежною, санітарною та податковою інспекцією може виявити порушення з ймовірностями відповідно $0{,}11;\ 0{,}24;\ 0{,}35,$ незалежно одна від іншої. Знайти ймовірність того, що в результаті інспекції буде виявлено хоча б одне порушення.

Роз'язання: Позначимо через A, B і C події, які полягають в тому, що в результаті пожежної, санітарної та податкової інспекції буде виявлено порушення.

Ймовірності цих подій за умовою задачі:

$$P(A) = 0{,}11; \quad P(B) = 0{,}24; \quad P(C) = 0{,}35 .$$

Тоді ймовірності протилежних подій (порушень не виявлено) будуть

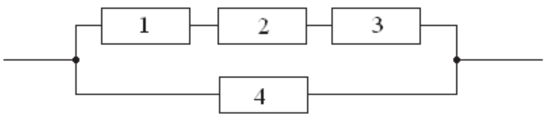
$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89; \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}24 = 0{,}76; \quad P(\overline{C}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65 .$$

Тоді шукана ймовірність за наслідком про ймовірність хоча б однієї події

$$P = 1 - P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) \cdot P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0{,}89 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}35 = 0{,}76326 .$$

Відповідь: 0,76326.

Приклад 4. Знайти ймовірність безвідмовної роботи електричного ланцюга, який подано на рис.: елементи 1,2,3 з'єднані послідовно, а до них паралельно підключено елемент 4, якщо ймовірності роботи кожного елемента дорівнюють $p\left(A_1\right) = 0{,}6; \quad p\left(A_2\right) = 0{,}7; \quad p\left(A_3\right) = 0{,}8; \quad p\left(A_4\right) = 0{,}9$.



Розв'язання: Ймовірність безвідмовної роботи ланцюга дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи кожного з елементів у випадку їх послідовного з'єднання або ймовірності роботи хоча б одного елемента $\left(1-q_1 q_2 ... q_n\right)$ у разі паралельного з'єднання елементів.

Елементи 1, 2 і 3 з'єднані послідовно, отже вони мають працювати всі і ймовірність їх безвідмовної роботи буде:

$$p_{123} = p_1 p_2 p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336;$$

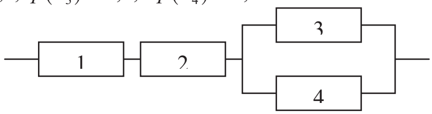
Елемент 1 і блок 2, 3, 4 з'єднані паралельно, отже має працювати хоча б один з них і ймовірність роботи всього ланцюга буде:

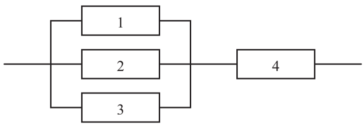
$$P(A) = 1 - q_4 q_{123} = 1 - \left(1 - p_4\right)\left(1 - p_{123}\right) 1 - (1 - 0{,}336) \cdot (1 - 0{,}9) = 1 - 0{,}0664 = 0{,}9336.$$

Відповідь: $0{,}9336$.

Завдання для самостійної роботи №2

Варіант	Задача
1	Ймовірність того, що довільний покупець, зайшовши у певний магазин, зробить покупку, дорівнює 0,3. Знайти ймовірність, що покупку зробить хоча б один з трьох покупців, які зайшли до магазину.
2	Ймовірність того, що ціна окремої акції зросте протягом ділового дня, дорівнює 0,4. Якщо зміна ціни акції протягом дня не залежить від того, що сталося раніше, то яка ймовірність того, що ціна акції зростатиме два дні з трьох?
3	Податкова декларація приватного підприємця може перевірятися районною або обласною податковою адміністрацією незалежно одна від іншої. Ймовірність перевірки податкової декларації районною адміністрацією – 0,05, обласною – 0,04. Яка ймовірність, що дана декларація буде перевірена обома адміністраціями?
4	Кожен з трьох експедиторів фірми може бути відправлений у відрядження протягом місяця з ймовірностями 0,1; 0,2 та 0,4. Знайти ймовірність того, що у відрядження буде відправлено рівно двох з них.
5	Кожен працівник даної фірми може отримати премію з ймовірністю 0,2 незалежно один від одного. Знайти ймовірність, що з 4 працівників даного відділу премію отримає хоча б один.
6	Ймовірність того, що позику буде повернуто вчасно, дорівнює 0,6 для довгострокових позик і 0,8 – для короткострокових. Знайти ймовірність, що дві різні за терміном позики буде повернуто вчасно.
7	На дві вакансії претендує п'ятеро кандидатів, з яких троє мають другу вищу освіту. Знайти ймовірність того, що обидва вибрані кандидати мають другу освіту, якщо ймовірність отримати посаду для всіх кандидатів була однакова.
8	Ймовірність того, що маркетингові дослідження фірми протягом року вкладуться у запланований бюджет, дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що дослідження перевищать бюджет чотири роки поспіль.

9	Партія у 200 виробів була обстежена контролем якості. В результаті було виявлено 5 бракованих виробів. Знайти ймовірність того, що три випадково вибраних вироби з цієї партії будуть стандартними.
10	Відомо, що в середньому три з кожних восьми бухгалтерських звітів містять помилки в розрахунках. Аудитор навмання вибирає три банківських звіти. Оцінити ймовірність того, що хоча б один з них містить помилки.
11	Яка ймовірність, що обидва покупця, які зайшли до магазину, зроблять покупку, якщо ймовірність покупки для кожного з них 0,2.
12	Кожен з членів наглядового комітету банку може бути переобраний на наступний термін з ймовірністю 0,8, незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що голова комітету збереже свою посаду, а два його заступники – ні.
13	Відомо, що в податкових деклараціях 60% всіх приватних підприємств знаходять порушення. Знайти ймовірність того, що під час фінансової ревізії двох підприємств порушення податкового законодавства будуть знайдені тільки в одного з них.
14	Знайти ймовірність безвідмовної роботи електричного ланцюга, якщо ймовірності роботи кожного елемента дорівнюють $p(A_1)=0{,}8;\ \ p(A_2)=0{,}9;\ \ p(A_3)=0{,}7;\ \ p(A_4)=0{,}6$. 
15	Ймовірність того, що ціна акції окремого підприємства зросте протягом ділового дня, дорівнює 0,1. Якщо зміни цін акцій протягом дня не залежать одна від іншої, то яка ймовірність того, що ціни чотирьох вибраних акцій різних підприємств зростуть?
16	Ймовірність того, що відсотки за депозитним вкладом буде виплачено вчасно, дорівнює 0,8 для першого банку і 0,9 – для другого. Знайти ймовірність, що з двох депозитів у різних банках відсотки будуть виплачені вчасно одної по одному з вкладів.
17	Податкова декларація юридичної особи може бути перевірена районною або міською податковою інспекцією незалежно одна від одної. Ймовірність перевірки податкової декларації районною інспекцією – 0,1, обласною – 0,05. Яка ймовірність, що дана декларація не буде перевірена жодною з установ?
18	Штат деякої фірми складається з 55 чоловіків та 45 жінок. Яка ймовірність, що три вибраних навмання працівника фірми будуть чоловіками?
19	Яка ймовірність, що обидва підприємства, що працюють у даній області, отримають прибуток, якщо ймовірність успіху для кожного з них 0,4.
20	З 10 працівників аудиторської фірми 6 мають вищу економічну освіту, а решта – не має. Знайти ймовірність того, що три вибраних навмання працівника фірми будуть мати економічну освіту.

21	В туристичні фірмі працює 6 чоловіків та 5 жінок. Яка ймовірність, що два вибраних навмання працівника фірми будуть різної статі?
22	Ймовірність того, що ціна акцій даного підприємства зросте протягом ділового дня, дорівнює 0,2. Якщо зміна ціни протягом дня не залежить від того, що сталося попереднього дня, то яка ймовірність того, що ціна акції зростатиме три дні поспіль?
23	Кожен працівник даної будівельної компанії може отримати премію з ймовірністю 0,6 незалежно один від одного. Знайти ймовірність, що з 3 працівників даного відділу премію отримає хоча б один.
24	Ймовірність здійснення продавцем акту продажу становить 0,4. Припустимо, що акти окремих угод є незалежними подіями. Чому дорівнює ймовірність того, що продавець не продасть товар до третьої спроби включно?
25	Відомо, що тільки 40% підприємств платять податки повністю. Знайти ймовірність того, що під час фінансової ревізії двох підприємств порушення податкового законодавства будуть знайдені хоча б в одного з них.
26	Ймовірність того, що маркетингові дослідження фірми протягом року вкладуться у запланований бюджет, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що дослідження не вкладуться в бюджет три роки поспіль.
27	Знайти ймовірність безвідмовної роботи електричного ланцюга, якщо ймовірності роботи кожного елемента дорівнюють $p(A_1)=0{,}6;\quad p(A_2)=0{,}5;\quad p(A_3)=0{,}3;\quad p(A_4)=0{,}9$. 
28	Кожен з трьох дійсних членів наглядового комітету банку може бути обраний головою комітету з ймовірностями 0,3; 0,2 та 0,1. Знайти ймовірність того, що головою комітету буде обрано одного з них.
29	12 працівників аудиторської фірми мають економічну освіту, а 8 – не мають. Яка ймовірність, що два вибраних навмання працівника фірми будуть мати економічну освіту?
30	Ймовірність того, що позику буде виплачено вчасно, дорівнює 0,9 для довгострокових позик і 0,8 – для короткострокових. Знайти ймовірність, що з двох різних за терміном позик буде повернуто вчасно хоча б одну.

Розділ 3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Означення 1. Повною групою подій називають сукупність попарно несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, одна з яких обов'язково настає при випробуванні.

Якщо події $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ утворюють повну групу, то
$P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$

Формула повної ймовірності

Нехай подія A може настати за умови появи однієї з несумісних подій $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$, які утворюють повну групу подій.

Теорема 1. Імовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A, тобто

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A/B_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A/B_i). \qquad (3.1)$$

Рівність (3.1) називають «формулою повної ймовірності».

Приклад 1. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує 40 підприємств, серед яких 25% не мають заборгованостей, другий – 60 підприємств, із них 40% – без заборгованостей. Яка ймовірність того, що навмання обране підприємство не має заборгованості?

Розв'язання. Розглянемо події: B_1-підприємства, що обслуговуються першим інспектором; B_2-підприємства, що обслуговуються другим інспектором; A- навмання обране підприємство не має заборгованості. Події B_1 і B_2 несумісні і утворюють повну групу (одна з них обовязково відбудеться і настання однієї події виключає настання іншої). З умови задачі відомі ймовірності :

$$P(B_1)=0{,}4,\ P(B_2)=0{,}6.$$

Умовні ймовірності події A: $P(A/B_1)=0{,}25$ – ймовірність того, що навмання обране підприємство не має заборгованості, при умові що воно обслуговувалось першим інспектором, $P(A/B_2)=0{,}4$ – ймовірність, що навмання обране підприємство не має заборгованості, при умові його обслуговування другим інспектором.

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=0{,}4\cdot 0{,}25+0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}34.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}34$.

Приклад 2. Фінансовий аналітик оцінив шанси як $2:3$, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця (зростання ціни не передбачається). Імовірність продажу облігацій у випадку падіння ціни оцінюється у $0{,}75$. Якщо падіння ціни не відбудеться, то ймовірність продажів оцінюється у $0{,}55$. Яка ймовірність того, що облігації буде продано у наступному місяці?

Розв'язання: Позначимо A – це подія, що полягає в тому, що облігації буде продано у наступному місяці. Можливі такі припущення: B_1 – ціна облігації упаде протягом наступного місяця; B_2 – ціна облігації не упаде протягом наступного місяця.

За умовою ймовірності цих гіпотез дорівнюють:

$$P(B_1)=\frac{2}{5}=0{,}4,\qquad P(B_2)=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Умовна ймовірність того, що облігації буде продано у разі падіння ціни, дорівнює $P(A/B_1)=0{,}75.$

Умовна ймовірність того, що облігації буде продано, якщо падіння ціни не відбудеться, дорівнює $P(A/B_2)=0{,}55.$.

Шукану ймовірність того, що облігації буде продано у наступному місяці знаходимо за формулою повної ймовірності (3.1):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)=0{,}4\cdot 0{,}75+0{,}6\cdot 0{,}55=0{,}3+0{,}33=0{,}63.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}63.$

Приклад 3. Три оператори виконують комп'ютерний набір пакета документів. При цьому продуктивності їх праці співвідносяться, як $10:8:12$. Імовірність допустити помилки при наборі для кожного з операторів відповідно дорівнює $0{,}02;0{,}07$ і $0{,}01$. Наприкінці робочого дня документи, набрані операторами, підшивають в одну папку. Яка ймовірність того, що навмання обраний пакет документів із папки, буде без помилок?

Розв'язання: Позначимо через A подію: навмання обраний пакет документів із папки буде без помилок. Через B_1, B_2, B_3 – події, які складаються в тому, що документи набрані відповідно першим, другим і третім операторами. З умови задачі відомі ймовірності:

$$P(B_1)=\frac{10}{10+8+12}=\frac{1}{3};\quad P(B_2)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15};\quad P(B_3)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

– продуктивність праці відповідно першого, другого та третього операторів.

Умовна ймовірнісного, що обраний навмання пакет документів із папки, набраний першим оператором, буде без помилок, дорівнює

$$P(A/B_1)=1-0{,}02=0{,}98.$$

Умовна ймовірність того, що обраний навмання пакет документів із папки, набраний другим оператором, буде без помилок, дорівнює

$$P(A/B_2)=1-0{,}07=0{,}93.$$

Умовна ймовірність того, що обраний навмання пакет документів із папки, набраний третім оператором, буде без помилок, дорівнює

$$P(A/B_3)=1-0{,}01=0{,}99.$$

За формулою повної ймовірності маємо

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}98+\frac{4}{15}\cdot 0{,}93+\frac{2}{5}\cdot 0{,}99=\frac{14{,}56}{15}=0{,}97.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}97.$

Приклад 4. Маємо два набора інструментів. Ймовірність того, що інструмент з першого набору стандартний, дорівнює 0,8, а з другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що випадково вибраний інструмент є стандартним.

Розв'язання: Позначимо через A – подію, яка складається з того, що випадково вибраний інструмент стандартний; подія B_1, – інструмент взято з першого набору, B_2 – інструмент взято з другого набору. Так як інструмент вибирається випадково, то можемо припустити, що $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$. З умови задачі випливає, що $P(A/B_1) = 0{,}8$, $P(A/B_2) = 0{,}9$. Підставляємо всі знайдені величини в формулу (3.1):

$$P(A) = 1/2 \cdot 0{,}8 + 1/2 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}85$.

Формула Байєса

Нехай подія A може настати за умови появи однієї з подій $B_1, B_2, ..., B_n$, які утворюють повну групу. Такі події називають *гіпотезами*, оскільки невідомо, яка саме з цих подій відбувається. Імовірність $P(A)$ визначається за формулою (3.1). Припустимо, що проведено випробування, в якому подія A настала. Як при цьому зміняться ймовірності гіпотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$?

Якщо до випробування ймовірності гіпотез були $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$, а внаслідок випробування з'явилася подія A, тоді з урахуванням цієї події, умовні ймовірності гіпотез обчислюють за формулою Байєса:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{3.2}$$

де $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$

Ця формула дозволяє переоцінити ймовірності подій $B_1, B_2, ..., B_n$ після того, як в результаті випробування подія A настала.

Приклад 5. Банківський службовець збереже своє місце роботи з ймовірністю 0,8, якщо голова правління банку буде переобраний на новий термін та з ймовірністю 0,65, якщо буде обраний новий голова. Імовірність переобрання голови становить 0,5. Відомо, що службовець зберіг своє місце роботи після виборів. Яка ймовірність того, що голова правління банку був переобраний на новий термін?

Розв'язання: Позначимо через A подію – службовець зберіг своє місце роботи після виборів, через B_1 – голова правління буде переобраний; через B_2 – буде обраний новий голова правління. Необхідно визначити $P(B_1 / A)$. За умовою ймовірності гіпотез дорівнюють $P(B_1) = 0{,}5$, $P(B_2) = 0{,}5$. Умовна ймовірність того, що службовець зберіг місце роботи, коли голова правління був переобраний, дорівнює $P(A/B_1) = 0{,}8$. Умовна ймовірність того, що службовець зберіг місце роботи, коли був обраний новий голова, дорівнює $P(A/B_2) = 0{,}65$. За формулою Байєса маємо:

$$P(B_1 / A) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}65} = \frac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}325} \approx 0{,}55.$$ *Відповідь:* $P(B_1 / A) = 0{,}55$.

Приклад 6. Деталі потрапляють на перевірку двом контролерам. Імовірність потрапляння деталі першому контролеру дорівнює 0,6, а другому – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь при перевірці була визнана годною першим контролером дорівнює – 0,94, а другим –0,98. Яка ймовірність того, що цю деталь перевіряв перший контролер?

Розвязання: Позначимо через B_1, подію, яка полягає в тому, що деталь перевірив перший контролер, а B_2 – другий контролер; A – придатна деталь визнана придатна. Тоді з умови задачі маємо:

$$P(B_1)=0{,}6; \quad P(B_2)=0{,}4; \quad P(A/B_1)=0{,}94; \quad P(A/B_2)=0{,}98.$$

За формулою (3.2) обчислимо ймовірність того, що перевірку робив перший контролер.

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}=0{,}59.$$

Видно, що ймовірність події (гіпотези) B_1 змінилася (зменшилася).

Відповідь: $P(B_1/A)=0{,}59$

Завдання для самостійної роботи №3

Варіант	Задачі
1	Імовірність загального підйому купівельного попиту на цифрові фотоапарати дорівнює 0,7. Якщо зростання попиту дійсно відбудеться, то зростання обсягів продажу окремої компанії оцінюється у 0,8. Якщо ж зростання попиту не відбудеться, то ймовірність зростання обсягів продажу компанії оцінюється у 0,6. Відомо, що обсяг продажу окремої компанії зріс. Знайти ймовірність того, що попит на цифрові фотоапарати дійсно зріс.
2	Продукт виготовляється двома виробниками. Один виробляє 70%, а другий 30% всієї продукції. Перший виробник дає 90% продукту I ґатунку, другий виробник – 80% продукту I ґатунку. Яка ймовірність того, що взята навмання одиниця продукції буде другого ґатунку?
3	Фермерське господарство заготувало для посіву насіння жита, серед якого виявилось 70% першого сорту, 20% – другого і 10% – третього сорту. Імовірність того, що із зернини першого сорту виросте колосок, в якому буде не менше 20 зернин, дорівнює 0,75, для другого та третього сортів ця ймовірність відповідно дорівнює 0,1 і 0,05. Яка ймовірність того, що навмання взятий колосок нового врожаю буде мати не менше 20 зернин?
4	Відомо, що 92% виготовлених заводом виробів відповідають вимогам стандарту. Спрощена схема контролю визнає придатним стандартний виріб із ймовірністю 0,99, а нестандартний із ймовірністю 0,01. Визначити ймовірність того, що виріб, який пройшов спрощену схему контролю, відповідає вимогам стандарту.
5	На посаду менеджера претендує 40% жінок і 60% чоловіків. Серед жінок 35% мають університетську освіту, а серед чоловіків – 60%. Яка ймовірність, що вибрана навмання заява буде від чоловіка без університетської освіти?

6	Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55% із першого, 45% із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3%, а із другого цеху – 5% браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку: 1) придатна; 2) бракована.
7	Магазин отримує лампи, які виготовлені на трьох заводах. З першого заводу надходить 50% з другого – 30%, з третього – 20% ламп. Серед всіх ламп, які виготовлені першим заводом – 80% – першого ґатунку, другим заводом – 70% – першого ґатунку, третім – 60% першого ґатунку. Яка ймовірність того, що лампа, яку купили в магазині (взята навмання) буде першого ґатунку.
8	Фінансовий аналітик оцінив шанси як $2:4$, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця (зростання ціни не передбачається). Імовірність продажу облігацій у випадку падіння ціни оцінюється у 0,7. Якщо падіння ціни не відбудеться, то ймовірність продажів оцінюється у 0,6. Оцінити ймовірність того, що акції буде продано у наступному місяці.
9	На фабриці виготовляють болти. Машини A, B, C виготовляють відповідно 25, 35 і 40% всіх болтів. Бракована продукція складає відповідно 5, 4 і 2%. Випадково вибраний болт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовила машина A.
10	До каси підприємства надійшли банкноти у пачках від двох банків: 40 пачок від першого і 80 – від другого. Імовірність помилки касирів першого банку становить 0,2, другого – 0,25. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрану пачку сформовано без помилок? б) пачку без помилок було сформовано касирами першого банку.
11	До крамниці надходить товарна продукція трьох заводів. Об'єми продукції першого, другого та третього заводів відповідно відносяться 2:5:3. Частка браку на першому заводі 2%, на другому – 5%, на третьому – 4%. Яка ймовірність того, що куплений у крамниці товар виявився бракованим.
12	Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує 40 підприємств, серед яких 25% не мають заборгованостей, другий – 60 підприємств, із них 40% – без заборгованостей. Яка ймовірність того, що підприємство, яке не має заборгованості, перевіряв перший інспектор?
13	В приміському селищі 10% жителів мають низькі прибутки, 55% – середні, 35% – високі. Відомо, що постійними клієнтами супермаркету є 80% жителів з низькими прибутками, 52% жителів з середніми прибутками і 8% жителів, що мають високі прибутки. Випадковим чином обраний покупець супермаркету. Яка ймовірність того, що він: а) має низькі прибутки; б) має середні прибутки.
14	Імовірність загального підйому купівельного попиту на цифрові фотоапарати дорівнює 0,6. Якщо зростання попиту дійсно відбудеться, то зростання обсягів продажу окремої компанії оцінюється у 0,7. Якщо ж

	зростання попиту не відбудеться, то ймовірність зростання обсягів продажу компанії оцінюється у $0{,}5$. Знайти ймовірність того, що обсяг продажу компанії зросте.
15	Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45%, а другий – 55% деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить $0{,}15$, для другого – $0{,}1$. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Для якого контролера ймовірність припуститися помилки більша?
16	При збиранні телевізорів використовуються мікросхеми двох постачальників, частка яких становить відповідно 40% і 60%. Частка бракованої продукції для кожного постачальника становить відповідно 2% і 3%. Знайти ймовірність того, що взята навмання мікросхема виявиться стандартною.
17	Два автомата штампують однорідні деталі, які потрапляють на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата втричі більша, ніж продуктивність другого. Імовірність браку для кожного з них становить відповідно $0{,}4$ і $0{,}5$. Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь буде стандартною.
18	Службовець міської адміністрації збереже своє місце роботи з ймовірністю $0{,}95$, якщо міський голова буде перебраний на новий термін та з ймовірністю $0{,}3$, якщо буде обраний новий голова. Імовірність переобрання голови становить $0{,}55$. Яка ймовірність того, що буде обраний новий голова?
19	Фінансовий аналітик оцінив шанси як $5:6$, що ціна облігацій упаде протягом наступного місяця (зростання ціни не передбачається). Імовірність продажу облігацій у разі падіння ціни оцінюється у $0{,}7$. Якщо падіння ціни не відбудеться, то ймовірність продажу оцінюється у $0{,}6$. Оцінити ймовірність того, що акції буде продано у наступному місяці.
20	Імовірність загального підйому купівельного попиту на цифрові відеокамери дорівнює $0{,}7$. Якщо зростання попиту дійсно відбудеться, то зростання обсягів продажу окремої компанії оцінюється у $0{,}85$. Якщо ж зростання попиту не відбудеться, то ймовірність зростання обсягів продажу компанії оцінюється у $0{,}3$.Знайти ймовірність того, що обсяг продажу компанії зросте.
21	Завод випускає кухонні набори білого та синього кольорів, що виготовляються двома цехами. Перший цех виробляє 35% продукції, серед яких 40% наборів синього кольору. У продукції другого цеху 55% синіх наборів. Яка ймовірність того, що навмання вибраний набір: а) синього кольору? б) синього кольору зроблено другим цехом?
22	До каси підприємства надійшли банкноти у пачках від двох банків: 40 пачок від першого і 60 – від другого. Імовірність помилки касирів першого банку становить $0{,}2\%$, другого – $0{,}25\%$. Яка ймовірність того, що навмання вибрану пачку сформовано без помилок?

23	На посаду менеджера претендує 40% жінок і 60% чоловіків. Серед жінок 30% мають університетську освіту, а серед чоловіків – 60%. Яка ймовірність, що вибрана навмання заява буде від жінки з університетською освітою?
24	У лікарню поступають (в середньому) 50% хворих на грип, 30% хворих на ангіну та 20% хворих на запалення легенів. Ймовірність повного одужання від грипу дорівнює 0,7, від ангіни та запалення легенів – 0,8 та 0,9 відповідно. Виписано хворого, який повністю одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на грип.
25	У середньому з кожних 90 клієнтів відділення банку 50 обслуговуються першим оператором, а інші – другим. Ймовірність того, що клієнт буде повністю обслугований першим оператором - 0,9, а другим – 0,8, Будь-який клієнт пройшов обслуговування. Яка ймовірність повного обслуговування клієнта: а) першим оператором; б) другим оператором.
26	У першому ящику 10 стандартних і 2 браковані деталі, у другому відповідно – 12 і 3, у третьому – 14 і 1. З навмання вибраного ящика взяли деталь, яка виявилася бракованою. Яка ймовірність що деталь взята з третього ящика?
27	У рекламному агентстві працює три групи дизайнерів: перша обслуговує 25 фірм, друга – 45, третя – 40. Протягом одного місяця кошти, витрачені на рекламу дизайнерами першої групи, повертаються до 40% фірм, другої – до 45%, третьої – до 35%. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрана фірма окупила витрачені на рекламу кошти протягом місяця? б) фірма, що окупила протягом місяця витрачені на рекламу кошти, обслуговувалася третьою групою дизайнерів?
28	На трьох автоматичних лініях виготовляють однакові деталі, причому 30% на першій лінії, 25% – на другій та 45% – на третій. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першої лінією дорівнює 0,99, другою – 0,988, третьою – 0,98. Виготовлені на протягом доби деталі надходять до складу. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь не відповідає стандарту.
29	Банківський службовець збереже своє місце роботи з ймовірністю 0,9, якщо голова правління банку буде переобраний на новий термін та з ймовірністю 0,55, якщо буде обраний новий голова. Імовірність переобрання голови становить 0,7. Відомо, що службовець зберіг своє місце роботи після виборів. Яка ймовірність того, що голова правління банку був переобраний на новий термін.
30	Імовірність загального підйому купівельного попиту на цифрові відеомагнітофони дорівнює 0,65. Якщо зростання попиту дійсно відбудеться, то зростання обсягів продажу окремої компанії оцінюється у 0,6. Якщо ж зростання попиту не відбудеться, то ймовірність зростання обсягів продажу компанії оцінюється у 0,45. Знайти ймовірність того, що обсяг продажу компанії зросте.

Розділ 4. Незалежні випробування. Формула Бернуллі

Означення.1. **Послідовністю незалежних випробувань** відносно події A називається така послідовність випробувань, в яких ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результату інших випробувань.

Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитися зі сталою ймовірністю p. Необхідно обчислити ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A з'явиться рівно m раз. Позначимо ймовірність такої події через $P_n(m)$. Імовірність такої події обчислюється за формулою:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (4.1)$$

де $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, ($q = 1 - p$, $m = 1,2,3,\ldots,n$).

Формула (4.1) називається *формулою Бернуллі.* Позначимо через $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ ймовірність того, що в n випробуваннях подія A настає не менше ніж m_1 і не більше, ніж m_2 разів $(0 \le m_1 \le m_2 \le n)$. Тоді ймовірність появи події за n випробувань від m_1 до m_2 разів обчислюється за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (4.2)$$

Приклад 1. З 10 запропонованих до продажу приватною фірмою потриманих транспортних засобів 2 вимагають капітального ремонту. Ситуація така, що неможливо визначити, який з транспортних засобів потребує ремонту. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання обраних автомобілів: 1) 2 вимагають ремонту; 2) не більше 2-х вимагають ремонту.

Розв'язання: Кількість проведених випробувань $n = 5$. Імовірність того, що обраний навмання автомобіль вимагає ремонту, дорівнює $p = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$ є величиною сталою. В іншому випадку (автомобіль не вимагає ремонту) $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ Скористаємось формулою Бернуллі.

1. Ймовірність, що 2 автомобілі вимагають ремонту

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^3 = \frac{5!}{2!3!} 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048 \approx 0{,}205.$$

2. Не більше 2-х автомобілів вимагають ремонту, позначимо – подія A, тоді подія A є сумою таких несумісних подій: жоден з автомобілів не вимагає ремонту (подія B_0), один автомобіль вимагає ремонту (подія B_1), два автомобілі вимагають ремонту (подія B_2): $A = B_0 + B_1 + B_2$

Ймовірність кожної з подій B_0, B_1, B_2 знайдемо за формулою Бернуллі.

$$P(B_0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}2)^0 \cdot (0{,}8)^5 = (0{,}8)^5 = 0{,}3277;$$

$$P(B_1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}2)^1 \cdot (0{,}8)^4 = 5 \cdot (0{,}2) \cdot (0{,}8)^4 = 0{,}4096;$$

$$P(B_2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^3 = 0{,}205.$$

Тоді за теоремою про суму несумісних подій маємо

$$P(A)=P(0\le m\le 2)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)=0{,}3277+0{,}4096+0{,}205=0{,}9423\approx 0{,}94.$$

Відповідь: 1) $P_5(2)=0{,}205$; 2) $P(0\le m\le 2)=0{,}94.$

Приклад 2. Ймовірність виграти по одному білету лотереї $p=\frac{1}{3}$. Знайти ймовірність того, що з п'яти куплених білетів виграшних буде: а) два; б) всі; в) жодного; г) не менше двох; д) більше двох; е) не більше двох; є) менше двох; ж) від 2 до 4; з) принаймні один.

Розв'язання: Якщо А – подія, що полягає у купівлі виграшного білета, то її ймовірність $p=\frac{1}{3}$, а ймовірність купівлі невиграшного білета $q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. За формулою Бернуллі маємо:

а) $P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{5\cdot 4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{27}=\frac{80}{243}\approx 0{,}3292$;

б) $P_5(5)=C_5^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5\cdot}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}\approx 0{,}004$;

в) $P_5(0)=C_5^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}\approx 0{,}1317$;

г) $P_5(m\ge 2)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$;

$P_5(3)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{4}{9}=10\cdot\frac{4}{243}=\frac{40}{243}\approx 0{,}1646;$

$P_5(4)=C_5^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{243}\approx 0{,}0412;$

$P_5(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}\approx 0{,}0041;$

$P_5(m\ge 2)=0{,}3292+0{,}1646+0{,}0412+0{,}0041=0{,}5291;$

д) $P_5(m>2)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=0{,}1646+0{,}0412+0{,}0041=0{,}2099;$

е) $P_5(m\le 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=0{,}1317+0{,}3292+0{,}3292=0{,}7901;$

$P_5(1)=C_5^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{81}=\frac{80}{243}\approx 0{,}3292;$

є) $P_5(m<2)=P_5(0)+P_5(1)=0{,}1317+0{,}3292=0{,}4609;$

ж) $P_5(2\le m\le 4)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)\approx 0{,}3292+0{,}1646+0{,}0412=0{,}535$;

з) $P_5(1\le m\le 5)=1-P_5(0)\approx 1-0{,}1317=0{,}8683.$

Відповідь: а) 0,3292; б) 0,004; в) 0,1317; г) 0,5291; д) 0,2099; е) 0,7901; є) 0,4609; ж) 0,5354; з) 0,8683.

Найімовірніше число успіхів

Те значення m, якому відповідає найбільше значення $P_n(m)$, називається **найімовірнішим числом успіхів** і позначається m_0.

У загальному випадку найімовірніше число успіхів m_0 визначається з такої системи нерівностей:

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

Якщо $(np - q)$ не ціле, то $m_0 = [np + p]$, де $[np + p]$ – ціла частина числа, якщо $(np - q)$ – ціле, то в цьому випадку буде два найімовірніших числа:

$$m'_0 = np - q, \qquad m''_0 = np + p.$$

Приклад 3. За статистичними даними фірми, яка займається навчанням молодшого персоналу банківських установ, 70% слухачів успішно завершають навчання. Припустимо, що випадковим чином відібрані 10 слухачів. Знайти найімовірнішу кількість слухачів, що успішно завершать навчання, та оцінити відповідну ймовірність.

Розв'язання: За умовою задачі $p = 0{,}7$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Найімовірніше число знаходимо з нерівностей $np - q \le m_0 \le np + p$,

$$10 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le m_0 \le 10 \cdot 0{,}7 + 0{,}7,$$

$$6{,}7 \le m_0 \le 7{,}7$$

Отже, найімовірніше число $m_0 = [7{,}7] = 7$.

За формулою Бернуллі маємо $P_{10}(7) = C_{10}{}^7 \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} 0{,}0823 \cdot 0{,}027 \approx 0{,}27.$

Відповідь: $m_0 = 7, P_{10}(7) \approx 0{,}27$.

Приклад 4. Товарознавець оглядає 24 зразки товарів. Імовірність того, що зразок буде визнано придатним до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визнає придатними до продажу.

Розв'язання:

За умовою задачі: $n = 24$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - p = 0{,}4$. Найімовірніше число m_0 знайдемо з подвійної нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

Підставляючи дані з умови задачі, маємо $24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6$, або $14 \le m_0 \le 15$. Найімовірніше число зразків $m'_0 = 14$, $m''_0 = 15$.

Відповідь: $m_0 = 14$ або $m_0 = 15$ – найімовірніші числа зразків.

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо число випробувань n в схемі Бернуллі досить велике, то обчислення за формулою Бернуллі (4.1) стають досить громіздкими. Так, наприклад, при $n = 50, m = 30, p = 0{,}1$ виникають труднощі обчислювального характеру, оскільки $P_{50}(30) = \frac{50!}{30! \cdot 20!} \cdot (0{,}1)^{30} \cdot (0{,}9)^{20}$, при цьому $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$; $30! = 25{,}5286 \cdot 10^{25}$; $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$ – дуже великі числа. Тому на практиці використовують наближені асимптотичні формули, які для досить великих n дають нескінченно малу відносну похибку обчислювання.

Теорема 1. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні є сталою і відмінною від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно m разів, обчислюється (тим точніше, чим більше n) за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (4.3)$$

де $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функція $\varphi(x)$ парна $(\varphi(-x) = \varphi(x))$ і протабульована. В зв'язку з тим, що при $x \ge 4$ $\varphi(x) = 0{,}0001$, її значення наведені в таблиці на проміжку $[0,4]$.

Приклад 5. Фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20% замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 850 клієнтів 150 замовлять візитні картки.

Розв'язання:

За умовою $p = 0{,}2$, $n = 850$, $m = 150$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Ймовірність того, що 150 клієнтів замовлять візитні картки знайдемо за формулою (4.3)

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Підставляючи дані за умовою задачі, дістанемо:

$$x = \frac{150 - 850 \cdot 0{,}2}{\sqrt{850 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx -\frac{20}{11{,}7} = -1{,}71.$$

За таблицями знаходимо $\varphi(-1{,}71) = \varphi(1{,}71) = 0{,}0925$.

Отже, $P_{850}(150) \approx \dfrac{0{,}0925}{11{,}7} \approx 0{,}008.$

Відповідь: $P_{850}(150) \approx 0{,}008.$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Іноді потрібно визначити ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів. В цьому випадку використовуємо інтегральну теорему Лапласа.

Теорема 2. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що подія з'явиться в n випробуваннях від m_1 до m_2 разів, визначається за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (4.4)$$

де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{\frac{t^2}{2}} dt$ називається функцією Лапласа.

Функція $\Phi(x)$ є непарною $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$, протабульована; її значення наведені в таблиці. У зв'язку з тим, що при $x \geq 4$, $\Phi(x) = 04999...$, таблицю її значень досить мати на проміжку $[0, 4]$.

Приклад 6. За прогнозами фахівців 12% всіх акцій, що викидаються на фондовий ринок деякою фірмою, тимчасово впадуть у ціні на деяке число пунктів. Навмання вибирають 100 акцій. Оцінити ймовірність того, що не більше чотирьох акцій з відібраних упадуть у своїй ціні.
Розв'язання: За умовою задачі $p = 0{,}12$, $q = 1 - p = 0{,}88$, $n = 100$, $m_1 = 0$, $m_2 = 4$.
Тоді ймовірність події ($0 \leq m \leq 4$) обчислимо за формулою (4.4)
$P_{100}(0 \leq m \leq 4) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 100 \cdot 0{,}12}{\sqrt{100 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88}} \approx -3{,}7,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{4 - 100 \cdot 0{,}12}{\sqrt{100 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88}} = -2{,}46.$$

Отже, $P_{100}(0 \leq m \leq 4) = \Phi(-2{,}46) - \Phi(-3{,}7) = -\Phi(2{,}46) + \Phi(3{,}7) = 0{,}0067 \approx 0{,}007.$
Відповідь: $P_{100}(0 \leq m \leq 4) = 0{,}007.$

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність наближених формул (4.3), (4.4) для обчислення ймовірностей подій повторних випробувань для великих значень n знижується з наближенням значення p до нуля (тобто p – мале). У цьому випадку використовується асимптотична формула Пуассона.
Теорема 3. Якщо імовірність p появи події A в одному в ипробуванні мала ($p \to 0$), а кількість випробувань n велика ($n \to \infty$), то ймовірність $P_n(m)$ появи m разів події A в n випробуваннях обчислюється за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \tag{4.5}$$

де $\lambda = np \qquad (\lambda = const)$
Формула (4.5) називається формулою Пуассона.

Приклад 7. Радіоапаратура містить 10000 незалежно працюючих мікроелементів. Імовірність того, що мікроелемент відмовить у роботі за добу, стала для кожного елемента і дорівнює 0,0002. Обчислити ймовірність таких подій: за добу відмовили у роботі: а) три мікроелементи; б) не більше ніж три; в) не менше ніж три.

Розв'язання. З умови задачі відомо, що $p = 0{,}0002$, $n = 10000$. Обчислимо значення $\lambda = np = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$. Імовірності подій, заданих в умові задачі, обчислимо за формулою (4.5);

а) імовірність відмови в роботі трьох елементів

$$P_{10000}(3) \approx \frac{\lambda^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6} e^{-2} = \frac{4}{3e^2} \approx 0{,}18$$

б) не більше ніж три (подія A):

У цьому випадку подія А є сумою чотирьох несумісних подій:

$A_0 = \{$відмовить 0 елементів$\}$,

$A_1 = \{$відмовить один елемент$\}$,

$A_2 = \{$відмовлять два елементи$\}$,

$A_3 = \{$відмовлять три елементи$\}$.

Для обчислення ймовірностей усіх складових використовуємо формулу Пуассона.

$$P(A_0) = P_{10000}(0) \approx \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2} = 0{,}1353;$$

$$P(A_1) = P_{10000}(1) \approx \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2} = 0{,}2707;$$

$$P(A_2) = P_{10000}(2) \approx \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = \frac{4}{2e^2} = \frac{2}{e^2} = 0{,}2707;$$

$$P(A_3) = P_{10000}(3) \approx \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{8}{6e^2} = \frac{4}{3e^2} = 0{,}1804;$$

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1804 = 0{,}857 \approx 0{,}86.$$

в) не менше ніж три.

Події «не більше ніж три» і «не менше ніж три» – несумісні і утворюють повну групу. В цьому випадку

$$P_{10000}(3 \le m \le 10000) = 1 - (P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2)) = 1 - e^{-2}(1+2+2) = 1 - \frac{5}{e^2} = 0{,}323$$

Відповідь: а) $P_{10000}(3) \approx 0{,}18$; б) $P_{10000}(0 \le m \le 3) \approx 0{,}86$; в) $P_{10000}(m \ge 3) \approx 0{,}323$.

Зауваження. Вибираючи формулу розрахунків для схеми Бернуллі бажано керуватись такими міркуваннями:

а) якщо n – велике, а P – не мале, тобто $npq \ge 10$, то для знаходження ймовірностей $P_n(m)$ і $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ використовують формули (4.3) і (4.4) відповідно;

б) якщо n – велике, а P – мале настільки, що $npq \le 9$, то для знаходження $P_n(m)$ використовують формулу (4.5);

в) за цих самих умов (n – велике, а P – мале) і невеликі кількості доданків $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ можна використовувати формулу: $P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}$.

Відхилення відносної частоти від ймовірності

Теорема 4. Імовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищує ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\cdot\Phi_0\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{p\cdot q}}\right) \qquad (4.6)$$

Приклад 8. При штампуванні виробляється тільки 70% виробів першого сорту. Скільки треба взяти виробів, щоб з ймовірністю більшою ніж 0,9973 можна було стверджувати, що частка першосортних серед них буде відрізнятися за абсолютною величиною від ймовірності 0,7 не більше, ніж на 0,057?

Розв'язання. За умовою маємо $p=0{,}7, q=1-0{,}7=0{,}3, \varepsilon=0{,}057.$ Потрібно знайти n.

За формулою 4.6 $2\cdot\Phi_0\left(0{,}057\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}7\cdot 0{,}3}}\right)=0{,}9973.$

За таблицею знаходимо: $0{,}057\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}21}}=2{,}98.$

Отже $n=574$.
Відповідь: $n=574.$

Завдання для самостійної роботи №4

Варіант	Задача
1	Під час аудиторської перевірки компанії А були допущено помилки. Імовірність того, що буде допущена помилка дорівнює 0,15. Зроблено чотири незалежні перевірки. Знайти ймовірність того, що помилка буде допущена; а) тільки в одній з них; б) хоча б в одній.
2	За прогнозами фахівців 6% всіх акцій, що викидаються на фондовий ринок деякою фірмою, тимчасово впадуть у ціні на деяке число пунктів. Навмання вибирають 90 акцій. Дати оцінку ймовірності того, що не більше двох акцій з вибраних упадуть у своїй ціні.
3	Імовірність виграти по одному білету художньої лотереї дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що з восьми куплених білетів виграють: 1) не більше, ніж два; 2) лише один.
4	Відомо, що в середньому три з кожних восьми бухгалтерських звітів, підготовлених банківськими службами, містять у собі процедурні помилки у розрахунках. Аудитор навмання вибрав 4 звіти з десяти звітів банку. Оцінити ймовірність того, що: а) всі 4 звіти містять помилки; б) жоден з 4-х не містить помилок.
5	Всі телефонні лінії банку завантажені на 60% протягом часу проведення домовленостей. Нехай у вибраний період часу було здійснено 8 телефонних дзвінків. Яка ймовірність того, що телефонна лінія банку буде зайнята: а) тричі; б) від 2-х до 4-х спроб.

6	Ймовірність виграшу облігації за весь період позики становить $0{,}6$. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірності таких подій: а) виграють дві облігації; б) виграш випаде принаймні на одну облігацію.
7	Імовірність виготовлення нестандартної деталі робітником дорівнює $0{,}1$. За робочу зміну ним було виготовлено 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних виявиться: 1) 340 штук; 2) від 340 до 380 штук.
8	При передачі повідомлення ймовірність хибно передати один знак дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що повідомлення з 10 знаків: 1) буде передано правильно; 2) містить рівно 3 хибно передані знаки.
9	У початкових накладних є помилки з ймовірністю 5%. Скільки податкових накладних слід узяти, щоб найімовірніше число накладних без помилок було 70? Яка ймовірність такого числа податкових накладних?
10	Імовірність неправильної видачі грошей банкоматом дорівнює $0{,}001$. Яка ймовірність того що з 5000 клієнтів даного банкомату неправильні суми грошей будуть видані: а) трьом клієнтам; б) не більше, ніж двом клієнтам?
11	У середньому 60% покупців супермаркету купують молочні продукти. За 4 години в супермаркеті було 240 покупців. Яка ймовірність того, що молочні продукти купили: а) 160 покупців; б) від 140 до 155 покупців.
12	Встановлено, що 5% імпортних телевізорів виходять з ладу через перепади напруги електромережі. Яка ймовірність того, що з п'яти придбаних телевізорів хоча б три не вийдуть з ладу? Не більше, ніж два телевізори не вийдуть з ладу?
13	Фірма, що проводить поштове опитування, встановила, що 40% одержувачів анкет повертає їх назад. Яка ймовірність того, що рівно 8 сімей повернуть анкети, якщо опитують 20 сімей? 15 сімей?
14	За результатами перевірок ДПІ встановлено, що у середньому кожне друге мале підприємство регіону має порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що із 1023 зареєстрованих малих підприємств порушення фінансової дисципліни мають: а) 490 підприємств; б) не менше 490 підприємств.
15	Всі телефонні лінії банку завантажені на 70% протягом часу проведення домовленостей. Нехай у вибраний період часу було здійснено 10 телефонних дзвінків. Яка ймовірність того, що телефонна лінія банку буде зайнята: а) тричі; б) від 2-х до 5-ти спроб?
16	У вузі 70% студентів отримує деякий вид стипендії. Якщо для перевірки випадково відібрано 10 студентів, то яка ймовірність того, що більше, ніж 8 студентів мають стипендію? Яке найімовірніше число студентів мають стипендію?
17	Підприємство має трьох оптових покупців продукції, для кожного з них ймовірність своєчасного розрахунку з підприємством дорівнює $\frac{6}{7}$. Визначити ймовірність своєчасного розрахунку за продукцію: а) усіма покупцями; б) не більше, ніж одним покупцем.
18	Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 40% усіх рахунків оплачуються повністю за їх допомогою. З попереднього року

	вибрали навмання 6 рахунків. Яка ймовірність, що 4 з них оплачені за допомогою карток VISA? Не більше чотирьох?
19	Служба податків визначила, що 50% всіх особистих декларацій про прибуток містить принаймні одну помилку. Якщо випадково відібрати 10 декларацій, то яка ймовірність того, що рівно 6 із них будуть містити принаймні одну помилку? Знайти найімовірніше число m_0 декларацій, які будуть містити принаймні одну помилку.
20	Митниця дає офіційну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються з-закордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 6 осіб, які повертаються з-закордону, то яка ймовірність того, що не менше трьох з них не задекларує товар, який обкладається податком?
21	Фірма виконує поліграфічні роботи, причому 20% замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 850 клієнтів: а) 150 замовлять візитні картки? б) не більше 100 замовлять візитні картки?
22	Імпортер постачає жалюзі вікон, причому 70% з них – горизонтальні. Яка ймовірність того, що серед відібраних жалюзі буде: а) 3 горизонтальних? б) не менше 4 горизонтальних?
23	Енергетична компанія обслуговує 800 споживачів електроенергії. Перебої у подачі енергії протягом доби виникають з ймовірністю $0{,}005$. Яка ймовірність того, що протягом доби надійде від 4 до 6 повідомлень про перебої?
24	Імовірність своєчасної реалізації одиниці продукції дорівнює $0{,}8$. Визначити ймовірність своєчасної реалізації не менше, ніж 312 одиниць продукції із 400, що надійшли на реалізацію. Яке найімовірніше число реалізованих одиниць продукції?
25	Книга видана накладом 50000 примірників. Імовірність того, що в книзі є дефект брошурування, дорівнює $0{,}0001$. Знайти ймовірність того, що наклад має від 5 до 7 невірно зброшурованих примірників.
26	Для студентського гуртожитку закуплено 10 телевізорів. Ймовірність того, що будь-який із них витримає гарантійний термін, дорівнює $0{,}95$. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну з ладу вийдуть: а) два телевізори; б) принаймні два.
27	Імовірність несплати податку для кожного із 400 підприємців дорівнює $0{,}1$. Яка ймовірність того, що не сплатять податки: 1) 37 підприємців? 2) не більше 37 підприємців?
28	Всі телефонні лінії банку завантажені на 70% протягом часу проведення домовленостей. Нехай у вибраний період часу було здійснено 10 телефонних дзвінків. Яка ймовірність того, що телефонна лінія банку буде зайнята: а) тричі; б) від 2-х до 5-ти спроб.

29	Імовірність появи випадкової події в кожному із 900 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $0{,}8$. Яке значення повинна мати величина $\varepsilon > 0$, щоб ймовірність події $\left(0{,}8 - \varepsilon < W(A) > 0{,}8 + \varepsilon\right)$, де $W(A)$ – відносна частота появи події A, була не меншою від $0{,}999$?
30	За прогнозом фахівців протягом деякого періоду часу 85% звичайних акцій промислових підприємств, які належать 10 компаніям, зростуть у своїй ринковій ціні. Знайти найімовірніше число компаній, акції яких зростуть у ціні, та відповідну ймовірність.

Розділ 5. Дискретні випадкові величини

Означення 1. Нехай задано імовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P)$. Будь-яка дійсна функція $\xi = \xi(\omega)$, визначена на просторі елементарних подій, називається **випадковою величиною (ВВ).**

Ця функція повинна бути *вимірною* відносно введеної в Ω ймовірності, тобто для довільного дійсного x повинна виконуватися умова $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\} \in S$. Множину $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\}$ надалі будемо скорочено позначати $\{\xi < x\}$. Через вимірність випадкової величини ξ забезпечується існування ймовірності цієї події $p(\xi < x)$.

Означення 2. Якщо множина всіх можливих значень ВВ є зліченною (зокрема, скінченною), то **ВВ називається дискретною (ДВВ).**

Розглянемо дискретну випадкову величину ξ з множиною можливих значень $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Означення 3. Законом розподілу дискретної випадкової величини називається будь-яка відповідність між можливими значеннями випадкової величини x_i та їх ймовірностями p_i.

Існує три способи задання закону розподілу ДВВ: табличний, аналітичний, графічний.

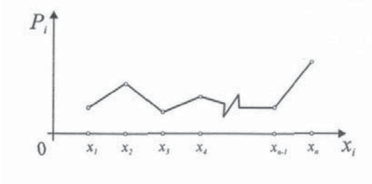
Табличний спосіб полягає в складанні таблиці відповідності x_i і p_i у вигляді:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Зауважимо, що x_i – довільні дійсні числа, $p_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Аналітичний спосіб полягає в написанні функціональної залежності між x_i і p_i в аналітичному вигляді $p_i = f(x_i)$. Прикладом такого способу задання є формула Бернуллі $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В цьому випадку ВВ приймає значення з множини $X = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Графічний спосіб полягає в побудові **багатокутника розподілу** . Цей багатокутник будується таким чином. На осі Ox декартової системи координат відкладають можливі значення x_i випадкової величини, а на осі ординат Oy ймовірності p_i цих можливих значень x_i. Суміжні точки (x_i, p_i) $(i = 1, 2, ..., n)$ з'єднуються відрізками.



Означення 4. **Функцією розподілу ВВ** ξ називається функція

$$F(x) = P\{\xi < x\} \tag{5.1}$$

Властивості функції розподілу $F(x)$

1.) $F(x)$ – неспадна, неперервна зліва функція.

2.) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0;$ $\qquad F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

3.) $F(x+0) = P\{\xi \le x\};$ $\qquad P\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x)$

4.) $P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$ (5.2)

Функція розподілу ДВВ ξ має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i\,, \tag{5.3}$$

де підсумування поширюється на ті індекси i, для яких $x_i < x$.

Графік $F(x)$ являє собою східчасту лінію з інтервалами сталості між сусідніми значеннями ξ.

Означення 5 . **Математичним сподіванням ДВВ** ξ називається число

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{5.4}$$

(ряд збігається абсолютно).

Означення 6. **Дисперсією ДВВ** ξ, називається число $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ (5.5)

Означення 7. **Середнім квадратичним відхиленням ДВВ** ξ, називається число $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.(5.6)

$M\xi$, $D\xi$, σ_ξ **– числові характеристики ДВВ** ξ.

Математичне сподівання Мξ характеризує центр розсіяння ξ, а дисперсія і середнє квадратичне відхилення є мірою розсіяння значень ВВ ξ навколо її математичного сподівання.

Для обчислення $D\xi$ зручно користуватися формулою:

$$D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \left(M\xi\right)^2 \qquad (5.7)$$

Зауважимо, що в (5.4), (5.5) суми скінчені, якщо ДВВ ξ набуває скінчене число значень.

Приклад 1. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Імовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$, а також ймовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв'язання. Подамо закон розподілу для випадкової величини ξ у табличній формі. Випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення $\xi = 1$ буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь (ймовірність цього дорівнює 0,75), а з другої – придатну. За теоремою множення ймовірностей імовірність цієї події $P(\xi = 2) = 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}1875$. Аналогічно, $\xi = 3$, якщо деталі виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки – придатна. $P(\xi = 2) = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 = 0{,}046875$. Нарешті, $\xi = 4$, якщо деталі виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P(\xi = 4) = 0{,}25^3 = 0{,}015625$. Запишемо закон розподілу

ξ	1	2	3	4
P	0,75	0,1875	0,046875	0,015625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними щойно формулами.

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}1875 + 3 \cdot 0.046875 + 4 \cdot 0{,}015625 = 1{,}3281;$$

$$D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \left(M\xi\right)^2 = 1 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}1875 + 9 \cdot 0.046875 + 16 \cdot 0{,}015625 - 1{,}3281^2 =$$

$$= 2{,}1719 - 1{,}7639 = 0{,}4080$$

Якщо подія А – «із чотирьох заготівок виготовлено одну придатну деталь», то $P(A) = 1 - 0{,}25^4 = 0{,}9960$.

Відповідь: $M\xi = 1{,}3281$; $D\xi = 0{,}4080$;

Приклад 2. За таблицею розподілу дискретної випадкової величини знайти числові характеристики, побудувати функцію розподілу та многокутник розподілу. ДВВ ξ задана законом розподілу:

ξ	– 3,7	– 1,4	1,3	3,5	5,8
P	0,17	0,22	0,27	0,23	0,11

Треба знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$, побудувати графік функції розподілу $F(x)$ та многокутник розподілу.

Розв'язання. Обчислимо числові характеристики ДВВ ξ за формулами (5.4), (5.5)

$M\xi = (-3{,}7)\cdot 0{,}17 + (-1{,}4)\cdot 0{,}22 + 1{,}3\cdot 0{,}27 + 3{,}5\cdot 0{,}23 + 5{,}8\cdot 0{,}11 = 0{,}857$

$D\xi = (-3{,}7)^2\cdot 0{,}17 + (-1{,}4)^2\cdot 0{,}22 + 1{,}3^2\cdot 0{,}27 + 3{,}5^2\cdot 0{,}23 + 5{,}8^2\cdot 0{,}11 - (0{,}857)^2 = 8{,}997$

$\sigma_\xi = \sqrt{8{,}997} \approx 3{,}0$

Побудуємо графік функції розподілу (рис. 5.1 та многокутник розподілу (рис. 5.2)

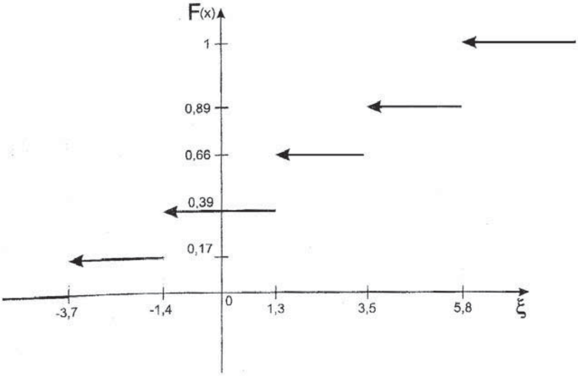


Рис. 5.1

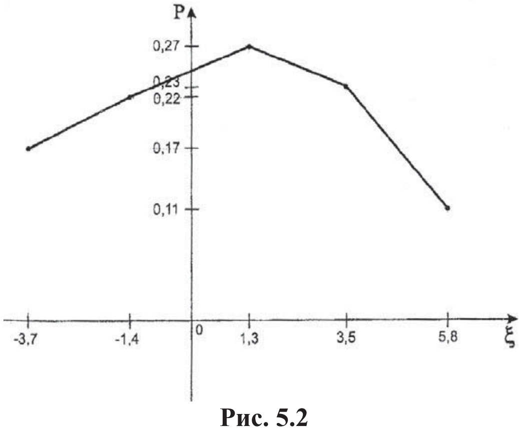


Рис. 5.2

Відповідь: $M\xi = 0{,}857$; $D\xi = 8{,}997$; $\sigma_\xi \approx 3{,}0$.

Завдання для самостійної роботи №5

ДВВ ξ задана законом розподілу.

Треба знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, побудувати графік функції розподілу $F(x)$ та многокутник розподілу.

Варіант	Закон розподілу ДВВ ξ					
1	ξ	2,3	4,2	6,1	8,5	10,4
	P	0,15	0,18	0,30	0,21	0,16
2	ξ	1,4	2,3	3,0	4,5	5,8
	P	0,11	0,17	0,22	0,23	0,27
3	ξ	– 1,3	– 2,0	– 3,4	– 4,7	– 5,1
	P	0,08	0,12	0,29	0,27	0,24
4	ξ	– 2,1	– 4,4	– 6,3	– 8,6	– 10,5
	P	0,12	0,20	0,40	0,18	0,10
5	ξ	– 1,4	1,3	3,5	5,2	7,8
	P	0,13	0,19	0,38	0,20	0,10
6	ξ	– 3,2	– 5,5	– 7,8	– 9,1	– 11,6
	P	0,10	0,18	0,29	0,23	0,20
7	ξ	0,8	1,3	2,1	3,6	4,8
	P	0,22	0,33	0,28	0,10	0,07
8	ξ	– 3,4	– 2,1	– 1,3	0,7	1,5
	P	0,13	0,27	0,25	0,20	0,15
9	ξ	– 2,1	– 1,4	0,5	1,7	2,3
	P	0,15	0,20	0,25	0,27	0,13
10	ξ	5,3	4,1	3,7	2,6	1,8
	P	0,18	0,29	0,22	0,17	0,14
11	ξ	2,4	4,3	6,2	8,6	10,3
	P	0,15	0,18	0,30	0,21	0,16
12	ξ	1,5	2,4	3,1	4,6	5,7
	P	0,11	0,17	0,22	0,23	0,27
13	ξ	– 1,4	– 2,1	– 3,5	– 4,8	– 5,0
	P	0,08	0,12	0,29	0,27	0,24
14	ξ	– 2,0	– 4,3	– 6,4	– 8,7	– 10,4
	P	0,12	0,20	0,40	0,18	0,10
15	ξ	– 1,5	1,4	3,6	5,3	7,9
	P	0,13	0,19	0,38	0,20	0,10
16	ξ	– 3,3	– 5,6	– 7,9	– 9,2	– 11,5
	P	0,10	0,18	0,29	0,23	0,20
17	ξ	0,9	1,4	2,2	3,7	4,9
	P	0,22	0,33	0,28	0,10	0,07
18	ξ	– 3,5	– 2,2	– 1,4	0,8	1,4
	P	0,13	0,27	0,25	0,20	0,15
19	ξ	– 2,2	– 1,5	0,6	1,8	2,4
	P	0,15	0,20	0,25	0,27	0,13
20	ξ	5,4	4,2	3,8	2,7	1,9
	P	0,18	0,29	0,22	0,17	0,14

21	ξ	2,3	4,2	6,1	8,5	10,4
	P	0,18	0,15	0,30	0,21	0,16
22	ξ	1,5	2,4	3,1	4,6	5,7
	P	0,17	0,11	0,22	0,23	0,27
23	ξ	– 1,4	– 2,1	– 3,5	– 4,8	– 5,0
	P	0,08	0,12	0,29	0,24	0,27
24	ξ	– 2,0	– 4,3	– 6,4	– 8,7	– 10,4
	P	0,20	0,12	0,40	0,18	0,10
25	ξ	– 1,5	1,4	3,6	5,3	7,9
	P	0,13	0,19	0,38	0,10	0,20
26	ξ	– 3,3	– 5,6	– 7,9	– 9,2	– 11,5
	P	0,18	0,10	0,29	0,23	0,20
27	ξ	0,9	1,4	2,2	3,7	4,9
	P	0,22	0,33	0,10	0,28	0,07
28	ξ	– 3,5	– 2,2	– 1,4	0,8	1,4
	P	0,13	0,25	0,27	0,20	0,15
29	ξ	– 2,2	– 1,5	0,6	1,8	2,4
	P	0,15	0,20	0,27	0,25	0,13
30	ξ	5,4	4,2	3,8	2,7	1,9
	P	0,18	0,29	0,22	0,14	0,17

Розділ 6. Неперервні випадкові величини

За щільністю розподілу неперервної випадкової величини визначити невідомий коефіцієнт, знайти функцію розподілу, числові характеристики та ймовірність потрапляння в інтервал. Побудувати графік щільності та функції розподілу.

Означення 1. Випадкова величина ξ називається **неперервною (НВВ)**, якщо множина всіх її можливих значень є скінченним проміжком функція і кожне окреме значення з цього проміжку приймається з ймовірністю, рівною нулю.

За властивістю (5.3) з цього означення випливає, що для кожної НВВ її інтегральна функція $F(x)$ є неперервною.

Означення 2. **Диференціальною функцією розподілу $f(x)$** (**щільністю розподілу ймовірностей**) НВВ ξ називається перша похідна від її інтегральної функції:

$$f(x)=F(x)' \qquad (6.1)$$

Властивості диференціальної функції розподілу:

1) $f(x)\geq 0$; 2) $P(a\leq \xi \leq b)=\int_a^b f(x)dx$; 3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}(t)\,dt$ 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

Числові характеристики НВВ ξ – математичне сподівання $M\xi$, дисперсія $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ – визначаються по її щільності розподілу $f(x)$ за формулами:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \ f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M\xi)^2, \quad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$$

Приклад 1. Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0 \\ a\cos x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6} \\ 0, & \text{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Визначити: 1) значення параметра a; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) математичне сподівання $M\xi$; 4) дисперсію $D\xi$; 5) середнє квадратичне відхилення σ_ξ; 6) ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $\left(\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{4}\right)$; 7) побудувати графік функції $f(x)$;

8) побудувати графік функцій $F(x)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо параметр a, використовуючи властивість 3) щільності розподілу. Оскільки $f(x) = 0$, коли $x \in (-\infty;0] \cup \left(\dfrac{\pi}{6};+\infty\right)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = a\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = a\sin\frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} = 1, \text{ звідки } a = 2.$$

Визначимо функцію розподілу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Маємо такі випадки:

якщо $x \in (-\infty;0]$, то $F(x) = 0$, бо $f(x) = 0$;

якщо $0 < x \le \dfrac{\pi}{6}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int_0^x \cos tdt = 2\sin t \Big|_0^x = 2\sin x$;

якщо $\left(\dfrac{\pi}{6};+\infty\right)$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos xdx + \int_{\frac{\pi}{0}}^{x} 0dx = 2\sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\dfrac{\pi}{6} = 1$,

тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0\\ 2\sin x, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}\\ 1, & \text{якщо} \quad x>\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

Визначимо числові характеристики $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ.

Маємо

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}x\cos xdx=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2;$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx-(M\xi)^2=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos xdx-\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2\right)^2=4\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}-9\approx 0{,}02;$$

$\sigma_\xi=\sqrt{D(\xi)}\approx\sqrt{0{,}02}\approx 0{,}15$.

Імовірність потрапляння випадкової величини ξ в інтервал $\left(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right)$, враховуючи властивість 4), обчислюємо так:

$$P\left(\frac{\pi}{8}<\xi<\frac{\pi}{4}\right)=P\left(\frac{\pi}{8}\le\xi\le\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}0dx=2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}=1-2\sin\frac{\pi}{8}\approx 0{,}235.$$

Графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$ зображено на рис. 6.1 та рис. 6.2.

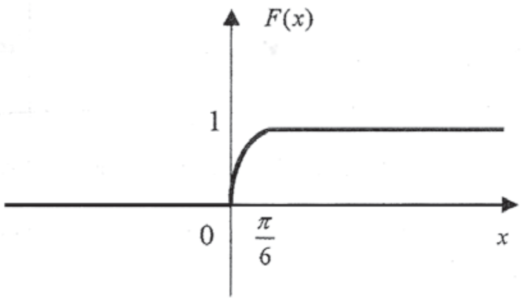


Рис. 6.1.

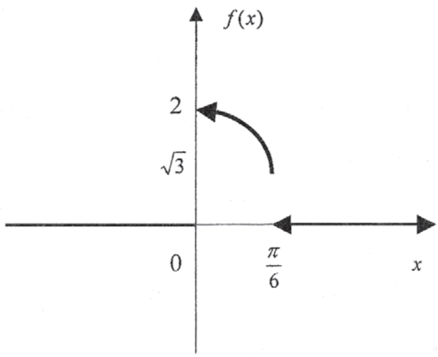


Рис. 6.2.

Відповідь: 1) $a = 2$;

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0 \\ 2\sin x, & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ 3) $M\xi = \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 \approx 0{,}25$;

4) $D\xi = 4\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3} - 9 \approx 0{,}02$; 5) $\sigma_\xi \approx 0{,}15$; 6) $P\left(\dfrac{\pi}{8} < \xi < \dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}235.$

Завдання для самостійної роботи № 6

Варіант	$f(x)$	$P(\alpha < \xi < \beta)$
1	$f(x) = \begin{cases} k(x^2 + 2x), & x \in (0;1), \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$	$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1$
2	$f(x) = \begin{cases} k(4x - x^3), & x \in (0;2), \\ 0, & x \notin (0;2) \end{cases}$	$\alpha = 1, \quad \beta = 3$
3	$f(x) = \begin{cases} k(-3x^2 + 24x - 45), & x \in (3;5), \\ 0, & x \notin (3;5) \end{cases}$	$\alpha = 2, \quad \beta = 4$
4	$f(x) = \begin{cases} k\sin 3x, & x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right), \\ 0, & x \notin \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$	$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{4}$
5	$f(x) = \begin{cases} k\, arctg\, x, & x \in (0;1), \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$	$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1$
6	$f(x) = \begin{cases} k(2x - 1), & x \in (1;2), \\ 0, & x \notin (1;2) \end{cases}$	$\alpha = 0, \quad \beta = 1{,}5$

7	$f(x)=\begin{cases} k(3x+1), & x\in\left(0;\frac{1}{3}\right), \\ 0, & x\notin\left(0;\frac{1}{3}\right) \end{cases}$	$\alpha=\frac{1}{6}, \quad \beta=1$
8	$f(x)=\begin{cases} k\ \sin 2x, & x\in\left(\frac{3}{4}\pi;\pi\right), \\ 0, & x\notin\left(\frac{3}{4}\pi;\pi\right) \end{cases}$	$\alpha=\frac{\pi}{2}, \quad \beta=\frac{5}{6}\pi$
9	$f(x)=\begin{cases} k\sin x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right), \\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2};0\right) \end{cases}$	$\alpha=-\frac{\pi}{2}, \quad \beta=-\frac{\pi}{4}$
10	$f(x)=\begin{cases} kx^2, & x\in(0;1), \\ 0, & x\notin(0;1) \end{cases}$	$\alpha=-1, \quad \beta=\frac{1}{2}$
11	$f(x)=\begin{cases} k(3x-x^2), & x\in(0;3), \\ 0, & x\notin(0;3) \end{cases}$	$\alpha=1, \quad \beta=2$
12	$f(x)=\begin{cases} k\ (x+1), & x\in(-1;2), \\ 0, & x\notin(-1;2) \end{cases}$	$\alpha=0, \quad \beta=1$
13	$f(x)=\begin{cases} k\ (x^2-7x+10), & x\in(2;5), \\ 0, & x\notin(2;5) \end{cases}$	$\alpha=3 \quad \beta=4$
14	$f(x)=\begin{cases} k\ (5x-2), & x\in(-0{,}6;3), \\ 0, & x\notin(-0{,}6;3) \end{cases}$	$\alpha=0, \quad \beta=2$
15	$f(x)=\begin{cases} k(2x-x^2), & x\in(0;2), \\ 0, & x\notin(0;2) \end{cases}$	$\alpha=0{,}5, \quad \beta=1$
16	$f(x)=\begin{cases} k\ (x^2-6x+8), & x\in(2;4), \\ 0, & x\notin(2;4) \end{cases}$	$\alpha=2{,}5, \quad \beta=3{,}5$
17	$f(x)=\begin{cases} k\,x+1, & x\in(0;2), \\ 0, & x\notin(0;2) \end{cases}$	$\alpha=0{,}5, \quad \beta=1{,}5$
18	$f(x)=\begin{cases} k(x+2)(x-1), & x\in(-2;1), \\ 0, & x\notin(-2;1) \end{cases}$	$\alpha=-1, \quad \beta=1$
19	$f(x)=\begin{cases} k\cos 2x, & x\in\left(-\frac{\pi}{4};0\right), \\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{4};0\right) \end{cases}$	$\alpha=-\frac{\pi}{6}, \quad \beta=-\frac{\pi}{8}$
20	$f(x)=\begin{cases} kx+\frac{3}{8}, & x\in(0;4), \\ 0, & x\notin(0;4) \end{cases}$	$\alpha=1 \quad \beta=3$
21	$f(x)=\begin{cases} k(x^2+2x-15), & x\in(-5;3), \\ 0, & x\notin(-5;3) \end{cases}$	$\alpha=-3, \quad \beta=1$

22	$f(x)=\begin{cases} k\,x+\dfrac{2}{3}, & x\in(0;3),\\ 0, & x\notin(0;3)\end{cases}$	$\alpha=2,\quad \beta=3$
23	$f(x)=\begin{cases} k\,(2x+1), & x\in(0;3),\\ 0, & x\notin(0;3)\end{cases}$	$\alpha=1,\quad \beta=2$
24	$f(x)=\begin{cases} k\,(x-2)(x-6), & x\in(2;6),\\ 0, & x\notin(2;6)\end{cases}$	$\alpha=3,\quad \beta=5$
25	$f(x)=\begin{cases} k\left(\dfrac{1}{3}x+3\right), & x\in(2;4),\\ 0, & x\notin(2;4)\end{cases}$	$\alpha=2{,}5,\quad \beta=4$
26	$f(x)=\begin{cases} k\,\cos 3x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right)\end{cases}$	$\alpha=-\dfrac{\pi}{18},\quad \beta=\dfrac{\pi}{6}$
27	$f(x)=\begin{cases} k\,(x^2-2x-3), & x\in(-1;3),\\ 0, & x\notin(-1;3)\end{cases}$	$\alpha=0,\quad \beta=2$
28	$f(x)=\begin{cases} k\,(x-1), & x\in(1;2),\\ 0, & x\notin(1;2)\end{cases}$	$\alpha=1{,}25,\quad \beta=1{,}5$
29	$f(x)=\begin{cases} kx+\dfrac{3}{4}, & x\in(-2;0),\\ 0, & x\notin(-2;0)\end{cases}$	$\alpha=-1{,}5,\quad \beta=-0{,}5$
30	$f(x)=\begin{cases} k(x^2+x-6), & x\in(-3;2),\\ 0, & x\notin(-3;2)\end{cases}$	$\alpha=-1,\quad \beta=1$

Розділ 7. Ланцюги Маркова

Означення 1. **Випадковим процесом** на ймовірнісному просторі (Ω, S, P) називається сім'я випадкових величин $\xi(t)=\xi(t,\,\omega)$, що залежить від часового параметра $t\in[0;+\infty)$.

Випадковий процес можна трактувати як показник стану динамічної системи, що змінюється у часі під дією випадкових факторів. Якщо стан системи розглядати лише в дискретні моменти часу, то отримаємо випадкову послідовність (випадковий процес з дискретним часом).

Протікання випадкових процесів у часі неможливо передбачити однозначно.

При будь-якому фіксованому значенні $t=t_0$ випадковий процес стає випадковою величиною $\xi(t_0)=\xi(t_0,\,\omega)$, яку називають **перерізом** випадкового процесу $\xi(t)$ в момент t_0. Якщо в будь-який момент часу перерізи є дискретними випадковими величинами (кількість станів, в яких може знаходитись система є скінченною або зліченною), то випадковий процес називають процесом з дискретними станами.

Прикладами випадкових процесів є:

1) процес зміни у часі напруги $V(t)$ електропостачання локомотива;
2) кількість $Q(t)$ відмов ЕОМ за час t;
3) коливання курсів валют $I(t)$, як функції часу;
4) кількість пасажирів $K(t)$, що обслуговуються касиром за час t і т.д.

Якщо в будь-який момент часу t_0 ймовірності станів системи в майбутньому залежать лише від її стану в момент $t = t_0$ і не залежать від того, яким чином вона потрапила в цей стан, то випадковий процес називають марковським.

Означення 2. Марковський процес називається процесом з **дискретними станами**, якщо будь-який його переріз є дискретною випадковою величиною.

Зауважимо, що в більшості прикладних задач досліджувана система може знаходитись в скінченній кількості станів.

Наприклад, телефонна лінія може перебувати в одному з трьох таких станів: працює (S_1), зайнята (S_2), не працює (S_3). При описанні функціонування залізничної каси можливі такі стани: каса не працює (S_1), каса вільна (S_2), каса обслуговує пасажира і немає черги (S_3), в черзі один пасажир (S_4), в черзі два пасажира (S_5) і т.д..

Якщо перехід системи із одного стану в інший можливий лише у фіксовані моменти часу, то марковський процес називають процесом з **дискретним часом**. Прикладом такого процесу може бути накопичення балів студентами під час навчання. Кількість станів обмежена, а переходи із одного стану в інший відбуваються в фіксовані моменти часу. Даний процес є марковським, тому що наступні оцінки не залежать від того, якими були попередні.

Моменти переходу із одного стану в інший називають **кроками** марковського процесу. Марковські процеси з дискретним часом та дискретними станами називають ще **ланцюгами Маркова**.

Позначимо через S_i^k подію, що система після кроку *k* знаходиться в стані S_i, а через $p_i(k)$ – ймовірність цієї події. Тоді, для кожного фіксованого k, події $S_1^k, S_2^k, ..., S_n^k$ утворюють повну групу подій, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} p(S_i^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k) = 1 \quad (k = 1,2,...).$$

Вектор – стовпець $\overline{P}(k)$ називають **вектором ймовірностей станів** після кроку *k*. Вектор ймовірностей станів системи в початковий момент часу позначають через $\overline{P}(0)$.

$$\overline{P}(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ ... \\ p_n(k) \end{pmatrix}, \quad \overline{P}(0) = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ ... \\ p_n(0) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо ймовірність того, що після кроку *k* система опиниться в стані *j*, при умові, що перед цим вона перебувала в стані *i*

$$p_{ij}^k = p(S_j^k \big| S_i^{k-1}).$$

Цю ймовірність називають **перехідною ймовірністю**.

Означення 3. Якщо перехідні ймовірності не залежать від кроку k, тобто $p_{ij}^k = p_{ij} = const$ для всіх $k \ge 1$, то ланцюг Маркова називають **однорідним**, в противному випадку – **неоднорідним**.

Надалі будемо розглядати лише однорідні ланцюги Маркова.

Означення 4. Квадратну матрицю P, елементами якої є перехідні ймовірності, називають **матрицею перехідних ймовірностей**.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо властивості матриці перехідних ймовірностей.

Властивість 1. Сума елементів кожного рядка матриці P дорівнює 1.

Властивість 2. Вектор ймовірностей станів після кроку k дорівнює добутку транспонованої матриці перехідних ймовірностей на вектор ймовірностей станів після кроку $k-1$, тобто

$$\overline{P}(k) = P^T \, \overline{P}(k-1)$$

Властивість 3. Вектор ймовірностей станів системи після кроку k однозначно визначається за допомогою матриць перехідних ймовірностей та вектором ймовірностей станів у початковий момент часу:

$$\overline{P}(k) = P^T \, \overline{P}(k-1) = (P^k)^T \, \overline{P}(0) \qquad (7.1)$$

У випадку однорідного ланцюга Маркова зручно використовувати розмічений граф станів.

Приклад 1. Розглянемо залізничний вагон, як систему, що може знаходитись в одному з таких станів:

S_1 – повністю справний;

S_2 – несправний, оглядається;

S_3 – ремонтується;

S_4 – списаний.

Відомо, що протягом року ймовірність виходу вагона з ладу рівна 0,2; ймовірність списання – 0,2; ймовірність відправки на ремонт – 0,7; ймовірність того, що він відремонтований – 0,4. Побудувати розмічений граф станів. Знайти вектор ймовірностей станів через три роки, якщо в початковий момент вагон справний.

Розв'язання. Кружечками позначимо стани системи. Стрілками показано напрямки переходу системи з одного стану в інший. В певний момент часу справний вагон (стан S_1) стає несправним і оглядається (стан S_2). Після огляду (стан S_2) вагон може бути списаний (стан S_4) або ремонтуватися (стан S_3) після чого знову стане справним (стан S_1). Біля стрілок, що вказують напрями переходу проставлені відповідні перехідні ймовірності.

Розмічений граф системи має вигляд рис. 7.1.

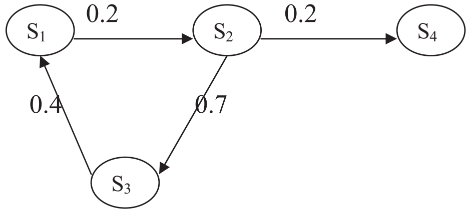


Рис. 7.1

Побудуємо матрицю перехідних ймовірностей

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Ймовірність переходу із стану S_1 в стан S_2 дорівнює 0,2 (p_{12}=0,2). Оскільки за один крок система не може перейти із стану S_2 в стан S_3 та S_4, то $p_{13}=p_{14}=0$. За властивістю 1 маємо $p_{11}+p_{12}+p_{13}+p_{14}=1$. Отже, $p_{11}=1-p_{12}-p_{13}-p_{14}=1-0{,}2=0{,}8$, тобто ймовірність того, що вагон залишиться справним дорівнює 0,8.

Ймовірності переходу із стану S_2 в стани S_3, S_4 та S_1 відповідно $p_{23}=0{,}7$, $p_{24}=0{,}2$, $p_{21}=0$. Ймовірність залишитись в стані S_2 (через те, що огляд вагона буде продовжено) розрахуємо за формулою: $p_{22}=1-p_{21}-p_{23}-p_{24}=1-0{,}7-0{,}2=0{,}1$.

Аналогічно знаходимо інші перехідні ймовірності. В початковий момент часу вагон справний, тобто $P_1(0)$=1, P_2 (0)=0, $P_3(0)$=0, $P_4(0)$=0. Таким чином

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P^T=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Зауваження 1. З властивості 1 випливає, що діагональні елементи матриці *P* (імовірності того, що система залишається в попередньому стані) можна знаходити з умови, що сума елементів кожного її рядка повинна дорівнювати одиниці.

Скориставшись формулою (7.1), знайдемо $\overline{P}(3)$:

$$\overline{P}(1)=P^T\,\overline{P}(0)=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 \\ 0{,}2\cdot 1+0{,}1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 \\ 0\cdot 1+0{,}7\cdot 0+0{,}6\cdot 0+0\cdot 0 \\ 0\cdot 1+0{,}2\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(2)=P^T\,\overline{P}(1)=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}8\\ 0{,}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}64\\ 0{,}18\\ 0{,}14\\ 0{,}4\end{pmatrix};\quad \overline{P}(3)=P^T\,\overline{P}(2)=\begin{pmatrix}0{,}568\\ 0{,}146\\ 0{,}210\\ 0{,}076\end{pmatrix}.$$

Відповідь: За три роки вагон буде справним з імовірністю 0,568; оглядатись з імовірністю 0,146; ремонтуватись з імовірністю 0,21; списаний з ймовірністю 0,076.

Зауваження 2. Для контролю розрахунків на кожному кроці необхідно переконуватись, що сума елементів вектора ймовірностей станів дорівнює одиниці.

Приклад 2. Для однорідного ланцюга Маркова з заданою матрицею перехідних ймовірностей

$$P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

побудувати розмічений граф станів та знайти ймовірності станів після третього кроку, якщо в початковий момент система перебувала в стані S_1.

Розв'язання. З умов задачі вектор ймовірностей у початковий момент часу має вигляд:

$$\overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що матриця перехідних ймовірностей має розмірність 4 х 4, робимо висновок, що система може знаходитись в чотирьох станах: S_1, S_2, S_3, S_4. Ймовірності $p_{21}, p_{31}, p_{32}, p_{42}, p_{43}$ рівні нулю, тому стрілки, що сполучають відповідні стани відсутні. Оскільки система може за один крок перейти із стану S_1 в стан S_4 ($p_{14}=0{,}1$) й із стану S_4 в S_1 ($p_{41}=0{,}5$), ці стани сполучені двома протилежно направленими стрілками. Ймовірності $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$ залишаються у відповідному стані і на графі не зображаються. Розмічений граф системи зображено на рис. 7.2.

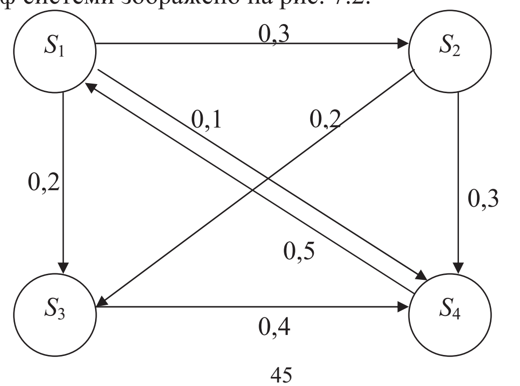


Рис. 7.2

Вектор $\overline{P}(3)$ знайдемо шляхом послідовного застосування формули (7.1):

$$P^T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(1) = P^T\,\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(2) = P^T\,\overline{P}(1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,21 \\ 0,27 \\ 0,26 \\ 0,26 \end{pmatrix};$$

$$\overline{P}(3) = P^T\,\overline{P}(2) = \begin{pmatrix} 0,214 \\ 0,198 \\ 0,252 \\ 0,336 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. Після третього кроку система з імовірністю 0,214 перебуватиме у стані S_1, з імовірністю 0,198 – в стані S_2, з імовірністю 0,252 – в стані S_3, з імовірністю 0,336 – в стані S_4.

Завдання для самостійної роботи № 7

Для однорідних ланцюгів Маркова з заданими матрицями перехідних ймовірностей та векторами ймовірностей початкових станів, побудувати розмічені графи станів та знайти $\overline{P}(1)$, $\overline{P}(2)$, $\overline{P}(3)$.

1	$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$; $\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2	$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$; $\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$
3	$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$; $\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	4	$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$; $\overline{P}(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

5	$P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$	6	$P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}4\\ 0{,}3\\ 0{,}3\end{pmatrix}$
7	$P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$	8	$P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
9	$P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$	10	$P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\end{pmatrix}$
11	$P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}8\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$	12	$P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}7\\ 0{,}3\\ 0\end{pmatrix}$
13	$P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}1\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$	14	$P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$
15	$P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}3\\ 0{,}2\\ 0\end{pmatrix}$	16	$P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\\ 0\end{pmatrix}$
17	$P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}4\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$	18	$P=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}4\\ 0{,}3\\ 0{,}3\end{pmatrix}$
19	$P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\ 0{,}3\\ 0{,}1\\ 0\end{pmatrix}$	20	$P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0\\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix}; \quad \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}3\\ 0{,}2\end{pmatrix}$

21	$P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	22	$P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}55\\0{,}25\\0{,}2\end{pmatrix}$
23	$P=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}4\\0\\0\end{pmatrix}$	24	$P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}3\\0{,}1\end{pmatrix}$
25	$P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}8\\0{,}2\\0\end{pmatrix}$	26	$P=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}4\\0{,}1\end{pmatrix}$
27	$P=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}3\\0{,}2\end{pmatrix}$	28	$P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}2\\0{,}3\end{pmatrix}$
29	$P=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}3\\0{,}1\end{pmatrix}$	30	$P=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1\end{pmatrix}; \ \overline{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Розділ 8. Системи масового обслуговування

Марковські процеси з дискретними станами та неперервним часом

Нехай маємо систему S з n станами. Позначимо через $P_i(t)$ ймовірність того, що в момент часу t система S знаходиться в стані S_i. Тоді маємо $\sum_{i=1}^{n} P_i(t)=1$ для будь-якого t. Нехай $P_{ij}(t;\ \Delta t)$ – ймовірність переходу системи із стану S_i в стан S_j в проміжок часу $[t;\ t+\Delta t]$.

Означення 1. Щільністю ймовірностей переходу (граничною інтенсивністю) в момент t будемо називати величину

$$\lambda_{ij}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(t,\Delta t)}{\Delta t}.$$

Означення 2. Марковський процес з дискретними станами називають **однорідним**, якщо щільності ймовірностей переходу не залежать від t, тобто $\lambda_{ij}(t)\equiv\lambda_{ij}=const.$

Введемо позначення:

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn}\end{pmatrix}, \quad \overline{P}(t)=\begin{pmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\\ \cdots\\ P_n(t)\end{pmatrix},$$

де елементи головної діагоналі матриці Λ визначаються рівностями

$$\lambda_{ii}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_{ij} \quad \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Матрицю Λ називають **матрицею інтенсивностей (або щільностей ймовірностей) переходу**, а вектор $\overline{P}(t)$ – **вектором ймовірностей станів системи** в момент t.

Означення 3. Марковський процес $\xi(t)\left(t\in[0;\infty)\right)$ з дискретними станами називається **ергодичним**, якщо існує

$$\overline{P}=\lim_{t\to\infty}\overline{P}(t),$$

що не залежить від стану, в якому система знаходилась в початковий момент. Вектор $\overline{P}$ називають **вектором граничних** або **фінальних ймовірностей** системи, а саму систему – **ергодичною**.

Фінальні ймовірності є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}&\Lambda^T\overline{P}=0,\\ &P_1+P_2+\ldots+P_n=1.\end{aligned} \tag{8.1}$$

Для описання системи в неперервному часі також розглядають розмічений граф станів, але біля стрілок записують відповідні інтенсивності переходів із одного стану в інший.

Система масового обслуговування (СМО)

Нехай в деяку сукупність пунктів (систему обслуговування) через певні проміжки часу надходять об'єкти (вхідний потік), над якими виконуються певні операції (обслуговування), після чого об'єкти залишають систему. Таку структуру мають процеси на транспорті, у зв'язку, у виробничій сфері (ремонт та обслуговування обладнання). Звичайно вхідні потоки мають випадковий характер, тобто надходять до системи обслуговування через випадкові моменти часу. Сукупність описаних процесів називають процесами масового обслуговування.

Об'єкти, що надходять до системи масового обслуговування (СМО) називають **заявками** або вимогами.

СМО класифікують за такими ознаками:

1) Кількість каналів (кількість заявок, що можуть одночасно обслуговуватись). Виділяють одноканальні СМО (з'єднання по телефону з конкретним абонентом) та багатоканальні (залізничні каси).

2) Наявність черги (заявок, що очікують обслуговування). В СМО з відмовами, якщо канал зайнятий, заявка не обслуговується, а залишає систему. СМО з чер-

гами поділяють на системи з обмеженнями на довжину черги та системи з необмеженою чергою.
3) Кількість етапів обслуговування. В однофазовій СМО заявка обслуговується повністю в одному пункті (придбання квитка). В багатофазовій системі заявка проходить декілька етапів обслуговування (придбання товарів у супермаркетах: зважування продуктів у різних відділах, потім обслуговування касиром).
4) Дисципліна черги (для СМО з чергою). В СМО з пріоритетами є заявки, що обслуговуються не в порядку черги. СМО з нетерплячими клієнтами включає можливість заявки залишити систему, не дочекавшись обслуговування.

Найпростіший потік подій

Означення 4. **Потоком подій** називають послідовність однакових подій, що відбуваються у випадковий момент часу.

Означення 5. Потік подій називають **стаціонарним**, якщо кількість подій, що відбувається за певний проміжок часу, залежить лише від тривалості цього проміжку і не залежить від початку його відліку.

Означення 6. Потік подій називають **ординарним**, якщо ймовірність появи двох або більше подій за досить невеликий проміжок часу є значно меншою за ймовірність появи однієї події, і нею можна знехтувати.

Означення 7. Потік подій називають **потоком без післядії**, якщо кількість подій, що відбуваються за деякий проміжок часу не залежить від кількості подій, що відбувалися за інший проміжок часу, при умові, що ці проміжки не перетинаються.

Означення 8. Стаціонарний ординарний потік подій без післядії називається найпростішим або Пуассонівським.

Зауваження 1. Дискретна випадкова величина ξ з множиною значень 0, 1, ..., n, що характеризує кількість заявок, що надходить до СМО найпростішим потоком за час t, розподілена за законом Пуассона з параметром λt, де λ – інтенсивність потоку (середня кількість заявок в одиницю часу). Тобто

$$\mathrm{P}_m(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Зауваження 2. Випадкова величина τ – час між двома заявками, що надходять до СМО найпростішим потоком з інтенсивністю λ – розподілена за експоненціальним законом розподілу із щільністю:

$$\phi_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

В теорії масового обслуговування вважається також, що час обслуговування заявки теж розподілений за експоненціальним законом з параметром μ. Тут μ – інтенсивність обслуговування (кількість заявок, що обслуговуються в одиницю часу).

Зауваження 3. Процеси масового обслуговування являють собою випадкові процеси з дискретними станами і неперервним часом. Враховуючи, що для цих процесів характерна відсутність післядії, то ми можемо зробити висновок, що вони є марковськими. У випадку стаціонарності дані марковські процеси є однорідними.

СМО з відмовами

Прикладом таких систем є обслуговування заявок за багатоканальним телефоном. Нехай n – кількість каналів обслуговування. Розглянемо можливі стани системи:

S_0 – всі канали вільні, заявка буде обслугована;

S_1 – 1 канал зайнятий, заявка буде обслугована;

…… ……….. ………… ………..

S_{n-1} – n-1 канал зайнятий, заявка буде обслугована;

S_n – n каналів зайняті, заявка отримує відмову.

Граф цієї СМО зображено на рис. 8.1

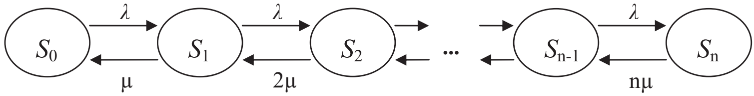


Рис. 8.1

Зауваження 4. Інтенсивність переходу системи із стану S_k в стан S_{k-1} рівна $k\mu$, тому що k каналів здійснюють обслуговування кожен з інтенсивністю μ і тому перехід в стан S_{k-1} здійснюється при звільненні будь-якого з них. Оскільки канали обслуговують заявки незалежно, то ймовірність звільнення кожного з них, а значить і інтенсивність дорівнює сумі ймовірностей (інтенсивностей) звільнення кожного з них.

Для даного процесу матриця Λ^T має вигляд:

$$\Lambda^T = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & -\mu-\lambda & 2\mu & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -2\mu-\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n\mu \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -n\mu \end{pmatrix}.$$

Розв’язавши систему рівнянь (8.1) для визначення фінальних ймовірностей, одержуємо

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0\,, \quad P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}P_0, \quad P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3}P_0, \ldots\ldots\ldots\ldots, \; P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}P_0.$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \ldots.. + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1}$$

В подальшому введемо позначення $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Величину ρ називають коефіцієнтом навантаження СМО.

Тоді $P_1 = \rho P_0$, ..., $P_n = \dfrac{\rho^n}{n!}P_0$, $P_0 = \left(1+\rho+.....+\dfrac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$

СМО з відмовами характеризують такі параметри:

1) $P_{відм}$ – імовірність відмови: $P_{відм} = P_n = \dfrac{\rho^n}{n!}P_0$ (дійсно, коли система знаходиться в стані S_n, то всі канали завантажені і заявка отримує відмову);
2) $P_{обс}$ – імовірність обслуговування або відносна пропускна спроможність: (відношення кількості обслугованих заявок до кількості усіх заявок, що надійшли до СМО) $P_{обс}=1-P_{відм}$;
3) A – абсолютна пропускна спроможність (кількість заявок, що обслуговується за одиницю часу). У випадку стаціонарного процесу $A=\lambda P_{обс}$.
4) B – число не обслугованих заявок: $B=\lambda P_{відм}$;
5) $t_з$ – час завантаженості СМО: $t_з = \dfrac{A}{n\mu}$ ($n\mu$ – інтенсивність обслуговування усієї СМО);
6) $t_{пр}$ – час простою СМО: $t_{пр} = 1 - t_з$;
7) $n_з$ – середня кількість завантажених каналів: $n_з = \dfrac{A}{\mu} = \rho P_{обс.}$;
8) $K_з$ – коефіцієнт завантаженості СМО: $K_з = \dfrac{n_з}{n} = t_з$.

Приклад 1. Нехай телефонні виклики у довідкове бюро надходять на одно- дво- або триканальний телефон з інтенсивністю 15 викликів на годину. Відповідь в середньому займає 3 хвилини. Розрахувати показники ефективності СМО, якщо обслуговування заявки коштує 5грн., а витрати на кожен канал – 20грн/год.

Розв'язання. $\lambda = 15\dfrac{викл}{год}$; $t_{обс} = 3хв = \dfrac{1}{20}год.$

Тоді $\mu = \dfrac{1}{t_{обс}} = 20\dfrac{викл}{год}$; $\rho = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Однокональне СМО

При n=1 СМО може перебувати в станах:

S_0 – канал вільний (заявка обслуговується);

S_1 – канал завантажений заявка отримує відмову.

Граф станів зображено на рис. 8.2

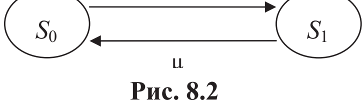


Рис. 8.2

$$P_0 = \left(1+\frac{3}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{7}; \quad P_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

$$P_{выдм} = P_1 = \frac{3}{7} \approx 0{,}43, \quad P_{обс} = 1 - P_{выдм} = \frac{4}{7} \approx 0{,}57,$$

$$A = 15\cdot\frac{4}{7} = \frac{60}{7} \approx 8{,}5 \text{ заявок / год}, \ B \approx 15 - 8{,}5 = 6{,}5 \text{ заявки /год}$$

$$t_з \approx \frac{8{,}5}{20} = 0{,}43 \text{ год}, \quad t_{пр} \approx 1 - 0{,}43 = 0{,}57 \text{ год},$$

$$\bar{n}_з \approx \frac{8{,}5}{20} = 0{,}43, \ K_з \approx \frac{0{,}43}{1} = t_з = 0{,}43.$$

Таким чином, обслугованими будуть $\frac{4}{7}$ або близько 57% заявок. При цьому 57% часу СМО буде простоювати. Зазначимо, що якби виклики не надходили кожні 3 хвилини, то відмов не було б і при цьому 15 хв. щогодини СМО була б вільною.

Двоканальне СМО

При n=2 СМО перебуватиме в таких станах:

S_0 – обидва канали вільні; S_1 – один канал завантажений;

S_2 – обидва канали завантажені, заявка отримує відмову.

Граф станів зображено на рис. 8.3

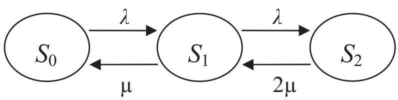


Рис. 8.3

$$P_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!}\right)^{-1} = \left(\frac{65}{32}\right)^{-1} = \frac{32}{65},$$

$$P_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{32}{65} = \frac{24}{65}, \quad P_2 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!}\cdot\frac{32}{65} = \frac{9}{65}.$$

Перевірка: $P_0 + P_1 + P_2 = \frac{32}{65} + \frac{24}{65} + \frac{9}{65} = 1$

$$P_{выдм} = P_2 = \frac{9}{65} \approx 0{,}14, \quad P_{обс} = 1 - P_{выдм} = \frac{56}{65} \approx 0{,}86,$$

$$A = 15 \cdot \frac{56}{65} = \frac{168}{13} \approx 13 \text{ заявок / год}, \quad B \approx 15 - 13 = 2 \text{ заявки /год},$$

$$t_з \approx \frac{13}{2 \cdot 20} = 0{,}325 \text{ год}, \qquad t_{пр} \approx 1 - 0{,}325 = 0{,}675 \text{ год},$$

$$\bar{n}_з \approx \frac{13}{20} = 0{,}65, \quad K_з \approx \frac{0{,}65}{2} = t_з = 0{,}325.$$

Отже, при введенні в дію другого каналу ймовірність обслуговування збільшилась з 0,57 до 0,86, а кількість заявок, що отримують відмову зменшилось втричі. Але при цьому збільшився час простою, і СМО є завантаженою всього на 32,5% проти 43% для одноканальної.

Триканальне СМО

При n=3 в стані S_2 заявка не отримує відмову і СМО може перебувати ще в одному стані S_3– всі три канали завантажені, заявка отримує відмову.

Граф станів зображено на рис. 8.4

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_2 \underset{3\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_3$$

Рис. 8.4

$$P_0 = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3!}\right)^{-1} = \left(\frac{269}{128}\right)^{-1} = \frac{128}{269},$$

$$P_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{128}{269} = \frac{96}{269}, \quad P_2 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \cdot \frac{128}{269} = \frac{36}{269}, \quad P_3 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{3!} \cdot \frac{128}{269} = \frac{9}{269}.$$

Перевірка: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{128}{269} + \frac{96}{269} + \frac{36}{269} + \frac{9}{269} = 1$.

$$P_{выдм} = P_3 = \frac{9}{269} \approx 0{,}033, \quad P_{обс} = 1 - \frac{9}{269} = \frac{260}{269} \approx 1 - 0{,}033 = 0{,}967,$$

$$A = 15 \cdot \frac{260}{269} \approx 14{,}5 \text{ заявок /год}, \quad B = 15 - 14{,}5 = 0{,}5 \text{ заявок /год},$$

$$t_з \approx \frac{14{,}5}{3 \cdot 20} \approx 0{,}24 \text{ год}, \quad t_{пр} \approx 1 - 0{,}24 = 0{,}76 \text{ год},$$

$$\bar{n}_з \approx \frac{14{,}5}{20} = 0{,}725, \quad K_з = t_з \approx 0{,}24.$$

Таким чином, кількість відмов зменшилась до 3% в порівнянні з 14% для двоканальної СМО, але зріс і час простою, а відповідно коефіцієнт завантаження зменшився до 24%.

Ми бачимо, що введення в дію другого каналу суттєво підвищило ефективність СМО. Кількість обслугованих заявок збільшилась з 57% до 86%.

Третій канал не призводить до суттєвого підвищення ефективності. Справа в тому, що при розрахунках ефективності треба враховувати і фінансовий аспект. Додатковий канал обслуговування потребує додаткових витрат (вартість обладнання; заробітна плата особи, що його обслуговує, тощо). Якщо обслуговування заявки коштує 5грн., а витрати на кожен канал – 20грн/год. То прибуток для одноканальної СМО складе: 8,5·5 – 20 = 22,5 грн/год.,
для двоканальної: 13·5 – 2·20 = 25 грн/год.,
а для триканальної: 14,5·5 – 3·20 = 12,5 грн/год.
Звідки робимо висновок, що найефективною є двоканальна СМО.

Відповідь: При n=1: $P_{выдм} \approx 0{,}43$, $P_{обс} \approx 0{,}57$, $A \approx 8{,}5$ заявок/год, $B \approx 6{,}5$ заявки /год, $t_з \approx 0{,}43$ год, $t_{пр} \approx 0{,}57$ год, $\overline{n}_з \approx 0{,}43$, $K_з \approx 0{,}43$.

При n=2: $P_{выдм} \approx 0{,}14$, $P_{обс} \approx 0{,}86$, $A \approx 13$ заявок / год, $B \approx 2$ заявки /год, $t_з \approx 0{,}325$ год, $t_{пр} \approx 0{,}675$ год, $\overline{n}_з \approx 0{,}65$, $K_з \approx 0{,}325$.

При n=3: $P_{выдм} \approx 0{,}033$, $P_{обс} \approx 0{,}967$, $A \approx 14{,}5$ заявок/год, $B \approx 0{,}5$ заявок/год, $t_з \approx 0{,}24$ год, $t_{пр} \approx 0{,}76$ год, $\overline{n}_з \approx 0{,}725$, $K_з \approx 0{,}24$.

Найефективною є двоканальна СМО.

Завдання для самостійної роботи №8

Нехай телефонні виклики у довідкове бюро надходять на одно-, дво-, або триканальний телефон з інтенсивністю λ викликів на годину. Відповідь в середньому займає t хвилини. Розрахувати показники ефективності СМО, якщо обслуговування заявки коштує P грн, а витрати на кожен канал – C грн/год.

Варіант	λ	*t*	*P*	*C*	Варіант	λ	*t*	*P*	*C*
1	15	1	4	10	**16**	10	4	6	15
2	30	1	3	15	**17**	20	4	3	25
3	90	1	3	30	**18**	25	4	3	30
4	150	1	2	40	**19**	18	4	4	30
5	20	1	4	10	**20**	75	1	2	25
6	40	1	3	15	**21**	36	1	3	10
7	80	1	2	25	**22**	48	1	4	25
8	24	1	4	10	**23**	72	1	3	30
9	15	2	4	10	**24**	100	1	2	40
10	45	2	3	25	**25**	18	1	4	10
11	75	2	3	40	**26**	18	2	4	15
12	10	2	6	10	**27**	24	2	6	30
13	20	2	4	15	**28**	36	2	4	30
14	40	2	3	30	**29**	50	2	3	40
15	12	2	6	15	**30**	9	2	6	10

Розділ 9. Статистичний розподіл дискретної ознаки

Нехай проводиться випадковий експеримент з метою дослідження певної випадкової ознаки ξ, що характерна для великої кількості однотипних об'єктів.

Означення 1. **Генеральною сукупністю (ГС)** називається множина всіх об'єктів з досліджуваною ознакою ξ. Число об'єктів N (скінченне або нескінченне) в ГС називається **об'ємом ГС.**

Означення 2. **Вибіркою об'єму n** $(n \le N)$ називається множина n об'єктів, випадково відібраних з ГС для дослідження ознаки ξ. Отримані значення $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки ξ називають **варіантами**, а відповідні їм числа n_i (кількість появ кожного значення) – **частотами.**

Означення 3. Послідовність варіант, що розташовані в зростаючому порядку, називається **варіаційним рядом**.

Означення 4. **Статистичним розподілом (статистичним рядом)** $\{(x_i, n_i), i = 1,...,k\}$ вибірки називається відповідність між варіантами та їх частотами.

Означення 5. **Відносними частотами** називається відношення частот до об'єму вибірки $w_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Найбільш повну характеристику ВВ дає її функція розподілу. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – вибірка з неперервною функцією розподілу F.

Означення 6. **Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки)** називається функція $F_n^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $\xi < x$, де n_x – число варіантів, менших x, n – об'єм вибірки. $n_x = \sum\limits_{x_i < x} n_i$, $F_n^*(x) = \sum\limits_{x_i < x} w_i$.

Статистичний ряд можна задавати у вигляді таблиці, в якій кожному варіанту x_i вибірки ставиться у відповідність число варіант n_i. (відносних частот).

x_i	x_1	x_2	…	x_n
n_i	n_1	n_2	…	n_k

або

x_i	x_1	x_2	…	x_n
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Найбільш повну характеристику ВВ дає її функція розподілу. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – вибірка з неперервною функцією розподілу F.

Тобто $F_n^*(x)$ є східчастою функцією зі стрибками, що рівні по величині $\dfrac{1}{n}$ (рис. 9.1)

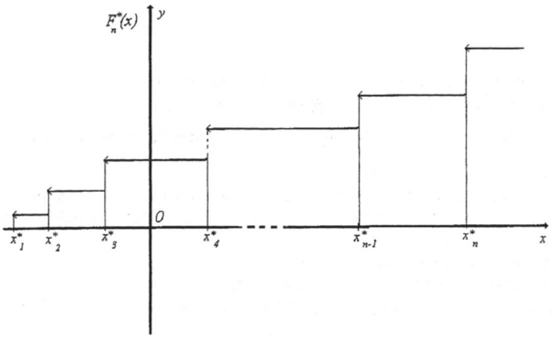


Рис. 9.1

Властивості $F_n^*(x)$: 1) $F_n^*(x) \subset [0,1]$; 2) $F_n^*(x)$ – неспадна, неперервна зліва; 3) якщо $x_1, x_2, ..., x_n$ – варіаційний ряд, то $F_n^*(x) = 0$ при $x < x_i$, $F_n^*(x) = 1$ при $x > x_n$.

Означення 8. **Полігоном частот** називається ламана, відрізки якої з'єднують суміжні точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$. Для розподілу часто використовують полігон частот. Його будують таким чином. На осі ОХ відкладають варіанти x_i, а на осі ОУ – відповідні їм частоти (відносні частоти). Одержані на координатній площині точки $\{(x_i, n_i)\}$ з'єднують відрізками прямих (рис. 9.2).

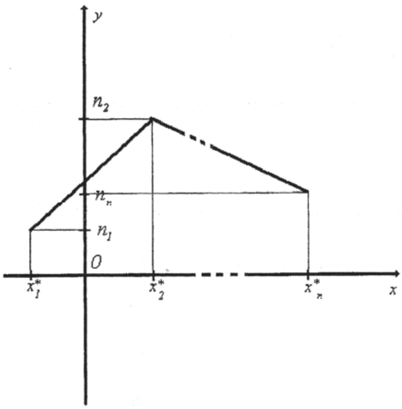


Рис. 9.2

Означення 9. **Вибірковим середнім** $\overline{x_B}$ називається середнє арифметичне значення вибіркової сукупності, тобто $\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$, або $\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i$.

Означення 10. **Вибірковою дисперсією** D_B називається середнє арифметичне квадратів відхилень спостерігаємих значень ознаки ξ від її вибіркового середнього, тобто:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 \quad \text{або} \quad D_B = \overline{x_B^2} - \left(\overline{x_B}\right)^2 \quad \text{або} \quad D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2\, n_i - \left(\overline{x_B}\right)^2 .$$

Означення 11. **Вибірковим середнім квадратичним відхиленням** σ_B називається корінь квадратним з вибіркової дисперсії, тобто $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Означення 12. **Виправленою вибірковою дисперсією** S^2 називається величина $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$.

Означення 13. **Виправленим середнім квадратичним відхиленням**

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B} .$$

Означення 14. **Модою** дискретного статистичного розподілу M_0^* називається варіанта, що має найбільшу частоту появи.

Означення 15. **Медіаною** дискретного статистичного розподілу M_e^* називається варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

Приклад 1. При вивченні кількісної ознаки ξ в результаті незалежних випробувань дістали вибірку: 4, 2, 10, 3, 5, 4, 4, 10, 7, 3, 2, 4, 3, 5, 2. Побудувати статистичний ряд цієї вибірки, полігон, емпіричну функцію та знайти числові характеристики $\overline{x_B}$, D_B , σ_B , S^2, S, M_0^*.

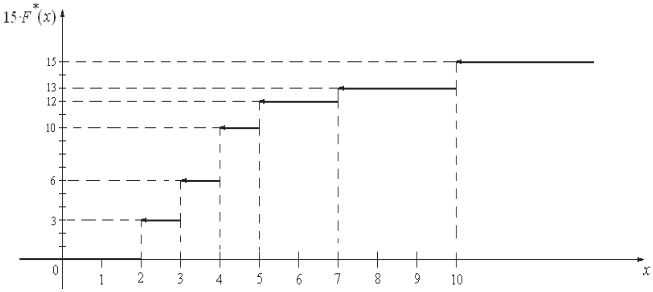
Розв'язання. Побудуємо статистичний ряд розподілу. Ми маємо 6 різних варіант, які заносимо в перший рядок таблиці x_i . Для обчислення їх частот n_i необхідно порахувати скільки разів в даній вибірці зустрічається кожна варіанта. Отже маємо:

x_i	2	3	4	5	7	10	$\sum$
n_i	3	3	4	2	1	2	$n = 15$
$w_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

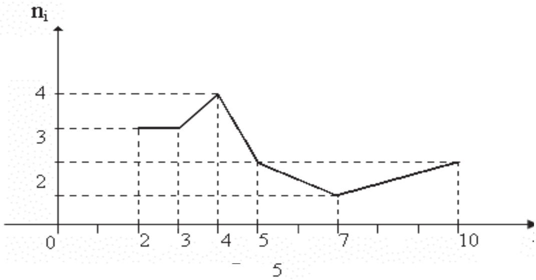
В третьому рядку наведено відносні частоти w_i . Емпіричну функцію розподілу можна записати у вигляді:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & x\le 2,\\ 3/15 & 2<x\le 3,\\ 6/15 & 3<x\le 4,\\ 10/15 & 4<x\le 5,\\ 12/15 & 5<x\le 7,\\ 13/15 & 7<x\le 10,\\ 1 & x>10.\end{cases}$$

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу



Полігон частот:



Знайдемо числові характеристики:

$$\overline{x_B}=\sum_{i=1}^{k}x_iw_i=2\cdot\frac{3}{15}+3\cdot\frac{3}{15}+4\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{2}{15}+7\cdot\frac{1}{15}+10\cdot\frac{2}{15}=\frac{68}{15}\approx 4{,}53;$$

$$D_B=\sum_{i=1}^{k}x_i^2w_i-\left(\overline{x_B}\right)^2=4\cdot\frac{3}{15}+9\cdot\frac{3}{15}+16\cdot\frac{4}{15}+25\cdot\frac{2}{15}+49\cdot\frac{1}{15}+100\cdot\frac{2}{15}-\left(\frac{68}{15}\right)^2=$$

$$=\frac{402}{15}-\left(\frac{68}{15}\right)^2\approx 26{,}8-20{,}5209=6{,}2791;$$

$\sigma_B=\sqrt{D_B}\approx 2{,}506;$ $\qquad M_0^*=4;$

$S^2=\dfrac{n}{n-1}D_B=\dfrac{15}{14}6{,}2791\approx 6{,}728;$ $\qquad S=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}D_B}=\sqrt{6{,}728}\approx 2{,}594.$

Відповідь: $\overline{x_B}\approx 4{,}53$; $D_B\approx 6{,}28$; $\sigma_B\approx 2{,}51$; $S^2\approx 6{,}73$; $S\approx 2{,}59$; $M_0^*=4$.

Завдання для самостійної роботи № 9

Задано статистичний ряд. Знайти числові характеристики: вибіркове середнє $\overline{x_B}$, вибіркову дисперсією D_B, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B, виправлену вибіркову дисперсією S^2, виправлене середнє квадратичне відхилення $S=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_B}$, моду дискретного статистичного розподілу M_0^*, медіану дискретного статистичного розподілу M_e^* та побудувати емпіричну функцію розподілу $F_n^*(x)=\frac{n_x}{n}$ і полігон частот.

Варіант					
1	x_i	2	5	7	8
	n_i	3	4	6	5
2	x_i	3	5	7	9
	n_i	5	7	9	3
3	x_i	5	6	7	10
	n_i	4	5	8	2
4	x_i	2	4	5	7
	n_i	3	5	8	4
5	x_i	3	5	7	9
	n_i	2	5	10	8
6	x_i	5	7	8	9
	n_i	2	7	11	10
7	x_i	4	6	9	10
	n_i	2	5	8	1
8	x_i	1	4	5	8
	n_i	3	6	8	2
9	x_i	3	4	5	6
	n_i	6	4	10	3
10	x_i	2	5	7	8
	n_i	3	1	4	10
11	x_i	2	5	7	8
	n_i	5	7	9	3
12	x_i	3	5	7	9
	n_i	3	4	6	5
13	x_i	5	6	7	10
	n_i	3	5	8	4
14	x_i	2	4	5	7
	n_i	4	5	8	2

15	x_i	3	5	7	9
	n_i	2	7	11	10
16	x_i	5	7	8	9
	n_i	2	5	10	8
17	x_i	4	6	9	10
	n_i	3	6	8	2
18	x_i	1	4	5	8
	n_i	2	5	8	1
19	x_i	3	4	5	6
	n_i	3	1	4	10
20	x_i	3	1	4	10
	n_i	6	4	10	3
21	x_i	3	5	6	7
	n_i	2	7	5	8
22	x_i	5	7	4	5
	n_i	2	5	5	8
23	x_i	4	6	5	7
	n_i	3	6	5	10
24	x_i	1	4	7	8
	n_i	2	5	7	11
25	x_i	3	4	6	9
	n_i	3	1	5	8
26	x_i	3	1	4	5
	n_i	6	4	6	8
27	x_i	8	9	6	9
	n_i	11	10	6	8
28	x_i	9	10	4	5
	n_i	8	1	5	8
29	x_i	5	8	4	5
	n_i	8	2	1	4
30	x_i	5	6	1	4
	n_i	10	3	4	10

Розділ 10. Статистичний розподіл вибірки неперервної кількісної ознаки

У випадку неперервної кількісної ознаки ξ зручно спочатку зробити групування даних. Область спостежуваних значень розбивається на деяку кількість інтервалів рівної довжини і підраховується число спостережень, що потрапили в кожний інтервал. Ці числа і є частотами відповідних інтервалів.

Означення 1. Перелік частинних інтервалів і відповідних їм частот, або відносних частот, називають **інтервальним статистичним розподілом вибірки**.

Для групованого статистичного ряду крок розбиття знаходиться за формулою:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \lg n}\text{ , де } n - \text{об'єм вибірки.}$$

Вибіркове середнє $\overline{x_B}$ обчислюється за формулою

$\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} w_i$, де $\overline{x_i} = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ – середини інтервалів, а вибіркова дисперсія – $D_B = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}^2 w_i - \left(\overline{x_B}\right)^2$ D_B .

Означення 2. **Вибіркова мода** M_o^* – це точка частинного інтервалу I_m (модального інтервалу) якому відповідає найбільше значення частоти n_m.

$$M_o^* = x_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} h$$

Означення 3. **Гістограмою частот** називається фігура, що є об'єднанням прямокутників з основами h та висотами n_i / h . Площа гістограми частот дорівнює n.

Означення 4. **Гістограмою відносних часто**т називається фігура, що є об'єднанням прямокутників з основами h та висотами w_i / h . Площа гістограми відносних частот дорівнює 1.

Означення 5. **Статистичною** називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу (**непараметрична гіпотеза**), або про параметри відомого розподілу (**параметрична гіпотеза**).

При перевірці гіпотез висувається для випробування як вихідна деяка гіпотеза H_0 (**нульова, основна**) у порівнянні з однією чи кількома **альтернативними** (протилежними) гіпотезами H_1, H_2, ..., які явно формулюються або маються на увазі. Гіпотези бувають прості (містять тільки одне припущення) і складні (містять скінчене або нескінченне число простих гіпотез).

Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави вважати, що він має певний вигляд $f(x)$(непараметрична гіпотеза), то перевіряють нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена за законом $f(x)$. Критерії, що використовуються з цією метою називаються **критеріями згоди**.

Критерій згоди Пірсона

Критерій згоди Пірсона дозволяє перевірити, чи описуються експериментальні дані нормальним розподілом.

Якщо досліджувана кількісна ознака ξ генеральної сукупності має нормальний розподіл, то теоретичні частоти частинних інтервалів обчислюються за формулою:

$$n_i^{'} = n\left(\Phi_0\left(z_{i+1}\right) - \Phi_0\left(z_i\right)\right),$$

де $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x_B}}{\sigma_B}$, $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}$, $\Phi_0(z_i)$ – функція Лапласа.

Як критерій перевірки гіпотези приймається випадкова величина χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}, \quad n_i^{'} \text{ – теоретичні частоти.}$$

Цей критерій є правосторонній і розподілений за розподілом χ^2 з $\nu = k - 3$ степенями свободи для нормального розподілу. Критична область K має вигляд:

$$K: \quad \chi^2 > \chi_{кр}.$$

Таким чином, якщо $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, немає підстав відкинути нульову гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо $\chi^2_{сп} > \chi^2_{кр}$ – нульова гіпотеза відкидається. Величина $\chi^2_{кр}$ визначається з табл. 5 додатків за величинами рівня значущості α та числа степенів свободи υ.

Приклад 1. За даними про прибутки (збитки) 50-ти індивідуальних господарств (в тис. грн):

а) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

б) побудувати гістограму частот;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критерієм Пірсона при рівні значущості α = 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

–24	–23	–20	–28	–32	28	12	19	18	40
–17	–39	–38	–22	–24	23	31	22	30	23
–16	–14	–24	–30	–23	12	34	27	28	22
–13	–11	–24	–8	–24	26	19	7	24	27
–22	–29	–24	–18	–26	25	24	15	20	25

Розв'язання:

а) Для побудови групованого статистичного ряду знайдемо за вибіркою крок розбиття: $x_{\min} = -39$ і $x_{\max} = 40$. Величина кроку знаходиться за формулою:

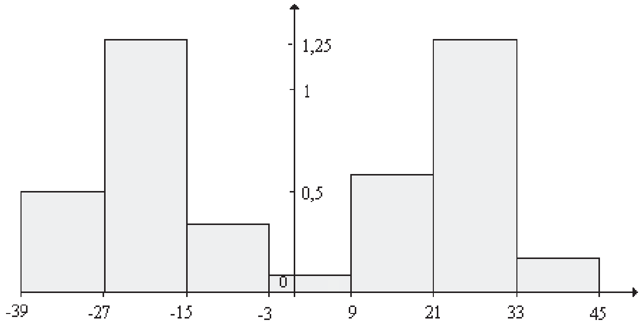
$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2\lg n} = \frac{40 + 39}{1 + 3{,}2 \cdot 1{,}7} \approx 12, \quad \lg n = \lg 50 \approx 1{,}7$$

Тоді число частинних інтервалів $k = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{h} = \dfrac{79}{12} \approx 7$.

Для кожного інтервалу підрахуємо частоти n_i, відносні частоти $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ та $\dfrac{n_i}{h}$ для відповідних частинних інтервалів I_i, дані занесемо у таблицю:

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
I_i	–39; –27	–27; –15	–15; –3	–3; 9	9; 21	21; 33	33; 45	
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
w_i	0,12	0,3	0,08	0,02	0,14	0,3	0,04	1
$\frac{n_i}{h}$	0,5	1,25	0,33	0,08	0,58	1,25	0,17	

б) Гістограма частот:



в) Для обчислення основних числових характеристик вибірки виконаємо додаткові обчислення, отримані дані занесемо в таблицю:

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
I_i	–39; –27	–27; –15	–15; –3	–3;9	9; 21	21; 33	33; 45	
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
w_i	0,12	0,3	0,08	0,02	0,14	0,3	0,04	1
$\overline{x_i}$	–33	–21	–9	3	15	27	39	
$\overline{x_i}\, w_i$	–3,96	–6,3	–0,72	0,06	2,1	8,1	1,56	0,84
$\overline{x_i}^{\,2} w_i$	130,68	132,3	6,48	0,18	31,5	218,7	60,84	580,68

Отже, вибіркова середня, вибіркова дисперсія і виправлена дисперсія і середнє квадратичне відхилення дорівнюють:

$$\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} w_i \approx 0{,}84\,, \quad \text{де} \quad \overline{x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{-27-39}{2} = -33\,;$$

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 w_i - \left(\overline{x_B}\right)^2 \approx 580{,}68 - (0{,}84)^2 = 579{,}97\,; \qquad \sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 24{,}08\,;$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49} \cdot 579{,}97 \approx 591{,}81\,; \qquad S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B} = \sqrt{591{,}81} \approx 24{,}33\,;$$

Найбільше значення частоти $n_m = 15$, отже ми маємо два модальних інтервали $[-27;\ -15]$, $[21;\ 33]$. Тоді мода буде дорівнювати

$$M_o^* = x_{i-1} + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} h = -27 + \frac{15\text{-}6}{2 \cdot 15\text{-}6 + 4} 12 = -23{,}14$$

$$M_o^* = x_{i-1} + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}} h = 21 + \frac{15-7}{2\cdot 15 - 7 + 2} 12 = 24{,}84$$

г) Висунемо гіпотезу, що досліджувана ознака генеральної сукупності має нормальний розподіл. Обчислимо теоретичні частоти частинних інтервалів за формулою

$$n_i^{'} = n\left(\Phi_0\left(z_{i+1}\right) - \Phi_0\left(z_i\right)\right), \quad \text{де} \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x_B}{\sigma_B}, \quad z_i = \frac{x_i - x_B}{\sigma_B}.$$

Дані обчислення занесемо в таблицю:

I_i	–39; –27	–27;-15	-15;-3	-3;9	9;21	21;33	33;45	$\sum$
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
x_i	–39	–27	-15	-3	9	21	33	45
z_i	–1,65	–1,16	-0,66	-0,16	0,34	0,84	1,34	
z_{i+1}	–1,16	–0,66	-0,16	0,34	0,84	1,34	1,83	
$\Phi_0(z_i)$	–0,4505	–0,3770	-0,2454	-0,0636	0,1331	0,2995	0,4099	
$\Phi_0(z_{i+1})$	–0,3770	–0,2454	-0,0636	0,1331	0,2995	0,4099	0,4664	
n'_i	3,675	6,58	9,09	9,835	8,32	5,52	2,825	45,845

Перевіримо, чи узгоджуються результати спостережень з гіпотезою про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності при рівні значущості α = 0,05, за критерієм згоди Пірсона.

Обчислимо емпіричне значення статистики Пірсона за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}.$$

Дані обчислення занесемо в таблицю:

I_i	-39;-27	-27;-15	-15;-3	-3;9	9;21	21;33	33;45	$\sum$
n_i	6	15	4	1	7	15	2	50
n'_i	3,675	6,58	9,09	9,835	8,32	5,52	2,825	45,845
$\left(n_i - n_i^{'}\right)^2$	5,406	70,896	25,908	78,057	1,742	89,870	0,681	
$\frac{\left(n_i - n_i^{'}\right)^2}{n_i}$	1,471	10,775	2,850	7,937	0,209	16,281	0,241	$\chi^2_{сп}$ = 39,764

Кількість груп вибірки $k = 7$. Тому число степенів свободи $\nu = k - 3 = 7 - 3 = 4$.

Знайдемо значення $\chi^2_{кр}$ в таблиці критичних точок розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ та числом степенів свободи $\nu = 4$:

$$\chi^2_{кр}(0{,}05; 4) = 9{,}5.$$

Оскільки $\chi^2_{сп} > \chi^2_{кр}$ (дійсно, 39,764>9,5) – відмінність емпіричних та теоретичних частот значима, отже дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Відповідь: $\overline{x_B} \approx 0{,}84$; $D_B \approx 578{,}97$; $\sigma_B \approx 24{,}08$; $S^2 \approx 591{,}81$; $S \approx 24{,}33$; $M_0^* = -23{,}14$; $M_0^* = 24{,}84$; гіпотеза про нормальний розподіл відхиляється.

Завдання для самостійної роботи №10

За результатами 50-ти вимірів значень деякої неперервної випадкової величини:

а) згрупувати результати спостережень (побудувати інтервальний статистичний ряд);

б) побудувати гістограму частот;

в) знайти точкові оцінки числових характеристик;

г) за критерієм Пірсона при рівні значущості $\alpha =$ 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки генеральної сукупності.

Варіант	Результати вимірів
1	27 41 21 31 45 39 41 31 39 37 29 34 40 43 40 27 32 36 34 33 36 26 38 44 38 38 37 37 27 39 25 36 36 29 36 35 42 32 29 28 30 37 32 40 25 27 29 33 34 35
2	61 64 62 53 89 66 54 62 57 64 62 54 75 52 59 72 54 66 46 44 59 54 83 53 71 64 60 48 77 47 54 66 64 82 78 70 88 61 63 77 64 66 80 71 53 59 58 63 43 56
3	95 96 73 89 72 85 85 85 91 71 80 85 91 87 70 94 98 85 82 94 89 83 70 86 85 95 95 83 87 92 93 88 77 92 92 83 85 90 83 86 85 85 80 95 91 93 70 83 93 95
4	76 62 89 48 62 50 47 80 67 87 75 61 88 46 57 65 60 72 28 75' 77 63 57 61 64 85 49 61 62 63 66 92 60 63 52 80 68 70 76 62 65 81 90 38 58 60 79 79 50 64
5	70 44 42 25 48 55 58 44 74 55 57 70 52 74 65 61 60 72 69 68 55 38 68 55 74 50 39 35 55 52 49 68 68 81 66 64 41 45 48 68 47 44 72 58 58 60 61 55 66 36
6	52 47 48 55 58 72 53 69 42 41 54 52 60 47 55 48 64 63 72 51 63 59 60 70 54 40 58 49 66 59 41 68 54 48 52 52 50 67 59 43 63 63 65 60 47 72 58 55 52 53
7	67 37 53 49 42 57 49 20 45 83 49 27 56 49 26 46 72 41 38 29 42 71 55 46 71 68 37 67 36 33 45 55 45 54 87 72 68 44 33 47 67 54 56 39 40 61 73 50 49 72

8	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97
	89	80	88	85	93	79	95	90	77	93
	88	91	95	94	88	80	66	93	77	71
	90	86	93	91	98	65	83	84	91	99
	95	87	89	85	87	72	77	90	97	87
9	66	54	62	57	64	66	55	53	73"	57
	72	54	66	46	44	57	63	86	63	61
	64	60	48	77	47	51	54	60	67	85
	70	88	61	63	77	41	62	69	60	64
	59	58	63	43	56	51	70	73	76	73
10	52	87	81	67	65	81	70	78	58	60
	58	77	73	54	58	77	86	52	61	62
	72	58	68	94	54	58	58	81	57	70
	57	68	70	58	72	57	62	63	87	61
	50	63	86	48	75	66	83	64	55	75
11	82	76	84	47	44	72	58	58	80	61
	88	88	73	59	70	70	55	51	69	50
	65	85	63	59	52	88	64	60	61	51
	62	42	76	81	76	70	76	75	53	66
	44	61	53	46	69	71	58	63	73	56
12	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71
	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43
	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47
	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71
	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71
13	50	41	39	61	70	44	42	43	71	57
	71	37	48	49	48	72	48	53	28	44
	36	45	55	39	72	61	68	42	48	72
	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52
	37	53	49	42	57	49	60	45	83	35
14	95	91	88	91	81	88	78	75	80	97
	91	78	87	92	73	77	70	66	71	90
	97	75	95	88	84	96	79	89	94	80
	92	70	79	96	80	84	89	82	93	92
	74	87	90	85	89	83	84	98	81	97
15	60	58	59	67	53	56	74	71	86	50
	73	85	50	63	50	74	78	60	76	68
	51	76	65	64	72	72	70	70	78	50
	65	59	64	58	71	76	51	52	67	71
	63	53	76	58	58	77	68	67	60	69
16	56	76	65	66	76	62	89	48	62	50
	55	67	51	73	75	61	88	46	57	65
	69	68	65	34	77	63	57	61	42	85
	62	65	75	56	66	92	60	43	52	80
	42	87	81	67	65	81	90	38	58	60
17	75	66	83	64	55	75	65	67	54	70
	73	71	46	86	68	79	50	58	66	69
	46	71	71	74	79	65	61	62	84	53
	50	60	83	61	83	67	67	58	46	73
	66	83	73	71	70	60	68	52	51	63

18	55	58	72	53	69	42	41	59	56	48
	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65
	70	54	40	58	49	66	59	55	50	46
	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71
	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43
19	56	46	50	67	37	53	49	42	57	49
	43	82	54	49	47	56	49	26	46	72
	61	41	52	42	71	55	46	71	68	37
	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68
	52	67	66	47	54	56	39	40	61	73
20	97	75	88	96	79	89	94	80	87	70
	92	70	96	84	89	82	93	92	85	80
	74	87	85	83	84	98	81	97	86	81
	96	82	73	81	86	84	86	88	90	94
	81	99	81	88	90	87	97	90	71	94
21	65	81	90	78	58	60	79	79	50	64
	58	77	86	52	61	62	70	93	54	65
	54	58	58	81	57	70	71	78	52	93
	72	57	62	63	87	61	91	57	57	66
	75	66	83	64	55	75	65	67	54	70
22	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71
	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43
	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47
	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71
	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71
23	99	75	88	96	71	89	94	80	87	70
	92	70	96	84	89	82	93	92	85	80
	72	87	85	83	84	98	81	97	66	81
	96	82	73	81	86	84	86	88	90	94
	81	69	81	88	90	87	97	90	71	94
24	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58
	54	63	60	57	70	52	74	65	61	60
	62	81	56	55	38	68	55	74	50	39
	50	62	80	49	68	68	81	66	64	41
	62	76	64	47	44	72	58	58	80	61
25	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47
	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45
	52	60	58	47	41	60	44	38	44	59
	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50
	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54
26	83	86	85	95	95	83	87	92	92	79
	85	95	91	93	70	83	93	95	95	78
	95	84	64	87	85	87	67	81	82	97
	83	91	95	94	88	80	96	93	77	71
	97	86	93	91	98	65	83	84	91	99
27	76	51	52	67	71	61	73	45	82	64
	77	68	67	60	69	64	53	70	79	79
	63	74	45	73	70	92	79	82	73	64
	62	67	49	58	73	52	64	67	57	40
	51	86	74	72	43	53	65	53	98	64

28	66 61 59 50 51 60 47 50 43 62 63 51 65 55 55 61 45 50 44 45 47 41 60 44 38 44 59 42 43 60 53 50 55 60 50 51 50 55 57 58 52 61 52 65 51 58 54 55, 64 58
29	40 63 86 48 75 66 83 64 55 75 51 86 67 58 73 71 46 86 68 79 64 78 78 60 46 71 71 74 79 65 83 43 64 67 50 60 83 61 83 67 47 76 81 72 66 83 73 71 70 60
30	47 44 72 58 58 60 61 55 66 36 39 70 70 35 51 69 50 59 35 43 59 52 88 64 60 61 31 64 48 49 61 76 70 76 75 53 66 57 74 61 46 69 71 58 63 73 56 65 53 77

Розділ 11. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії

Нехай вивчається двовимірна система кількісних ознак $(\xi,\ \eta)$ генеральної сукупності. Коли дослідник спостерігає дві змінні ξ і η, то дуже часто він зображує свої результати графічно. Якщо при цьому виявляються ознаки зв'язку між спостереженнями, то звичайно він будує деяку криву, частіше пряму лінію, або, що буває рідше, параболу другого або третього порядку. Цей побудований графік можна використовувати для передбачення по заданому ξ результату експерименту η і навпаки. Для побудови графіка використовується метод найменших квадратів, а сама лінія, що побудована за цим методом, називається *лінією регресії.*

Оскільки строга функціональна залежність реалізується рідко, між змінними може існувати статистична залежність.

Означення1. Статистичною називають залежність, при якій змінювання однієї з величин приводить до змінювання розподілу другої. У тому випадку, коли при змінюванні однієї з величин змінюється середнє значення другої, статистичну залежність називають *кореляційною*.

Означення2 Умовним середнім $\overline{y_x}$ називають середнє арифметичне спостережених значень η, що відповідають $\xi = x$. Наприклад, якщо при $x = 1$ величина η прийняла значення $y_1 = 3$, $y_2 = 7$, $y_3 = 8$, то умовна середня $\overline{y_x} = \dfrac{(3+7+8)}{3} = 6.$

В економічній і соціальній статистиці значення x_i з'являються, як правило, просто як задані в статистичних даних не випадкові числа. З іншого боку, в експериментальних роботах значення x_i часто можуть бути вибрані експериментатором.

Нехай ми досліджуємо кількість y товару A, що споживається на даному ринку, і ціни $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ самого товару A і деякої кількості інших товарів. В цьому випадку законно можна вважати y випадковою величиною з розподілом, що визначається цінами $x_1, x_2, ..., x_n$. При цьому явища, що обумовлюють значення цін, можуть не бути схожі на випадковий експеримент. Тоді числа x_i можна вважати просто заданими числами.

З іншого боку, нехай ми досліджуємо вплив якості сировини і технологічного процесу, що характеризується величинами $x_1, x_2, ..., x_n$ на продуктивність y деякого заводу. Тоді можна вибирати певним чином системи значень x_i і спостерігати відповідні значення y. Як і раніше, будемо вважати y випадковою величиною, розподіл якої містить параметри x_i.

Розглянемо випадок, коли змінна ξ приймає значення, визначені експериментатором, а змінна η буде репрезентувати результати його спостережень в експерименті, що відповідають значенням змінної ξ.

Нехай існує теоретичне рівняння регресії η на ξ та ξ на η, які мають відповідно вигляд :

$$M\left(\frac{\eta}{\xi}=x\right)=f(x); \qquad M\left(\frac{\xi}{\eta}=y\right)=\varphi\,(y). \tag{11.1}$$

За оцінку умовного математичного сподівання $M\left(\frac{\eta}{\xi}=x\right)$ візьмемо умовне середнє $\overline{y_x}$, яке є функцією від x.

Одержимо *вибіркове рівняння регресії η на ξ:*

$$\overline{y_x}=f^*(x), \tag{11.2}$$

де функцію $f^*(x)$ називають *вибірковою регресією η на ξ*, а її графік – *вибірковою лінією регресії η на ξ*.

Аналогічно визначається вибіркове рівняння регресії ξ на η :

$$\overline{x_y}=\varphi^*(y). \tag{11.3}$$

В подальшому будемо вважати, що $\overline{y_x}$ є лінійна функція від x. Тоді вибіркове рівняння регресії η на ξ має вигляд

$$\overline{y_x}=\alpha_0+\alpha_1 x. \tag{11.4}$$

Нехай в результаті n незалежних випробувань одержано $\xi=x_j$ з частотою n_{x_j}, $\eta=y_i$ з частотою n_{y_i}, а пара $(x_j,\, y_i)$ – з частотою $n_{i\,j}$.

Спостереження групують, тобто підраховують частоти n_{x_j}, n_{y_i}, $n_{i\,j}$ або відносні частоти w_{x_j}, w_{y_i}, $w_{i\,j}$ спільного спостереження варіант.

Тоді двовимірний статистичний розподіл можна задати у вигляді кореляційної табл. 11.1.

Таблиця 11.1

$y_i \diagdown x_j$	x_1	…	x_j	…	x_m	n_y
y_1	n_{11}	…	n_{1j}	…	n_{1m}	n_{y1}
…	…	…	…	…	…	…
y_i	n_{i1}	…	n_{ij}	…	n_{im}	n_{yi}
…	…	…	…	…	…	…
y_k	n_{k1}	…	n_{kj}	…	n_{km}	n_{yk}
n_x	n_{x1}	…	n_{xj}	…	n_{xm}	n

де $n_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \quad (j = \overline{1,\ m})$; $\quad n_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \quad (i = \overline{1,\ k})$; $\quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} n_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} n_{x_i} = n$

(n – об'єм вибірки). Замість частот n_{ij} можуть використовуватися відносні частоти $w_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{n}$ спільного спостереження варіант y_i, x_j.

$$w_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} w_{ij} \quad (j = \overline{1,\ m}); \quad w_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} \quad (i = \overline{1,\ k}); \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} = \sum_{i=1}^{k} w_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} w_{x_i} = 1.$$

Наведемо формули для обчислення числових характеристик двовимірного статистичного розподілу.

1) Вибіркові середні ознак ξ та η

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} x_j n_{ij}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} x_j n_{x_j}, \qquad \text{або} \qquad \overline{x} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} x_j w_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_j w_{x_i}.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} y_i n_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} y_i n_{y_i}, \qquad \text{або} \qquad \overline{y} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} y_i w_{ij} = \sum_{i=1}^{k} y_i w_{y_i}.$$

2) Вибіркові дисперсії ознак ξ та η

$$D_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} x_j^2 n_{ij} - (\overline{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 n_{x_j} - (\overline{x})^2, \quad \text{або}$$

$$D_x = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} x_j^2 w_{ij} - (\overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 w_{x_j} - (\overline{x})^2;$$

$$D_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} y_i^2 n_{ij} - (\overline{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} y_i^2 n_{y_i} - (\overline{y})^2, \quad \text{або}$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} y_i^2 w_{ij} - (\overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 w_{y_i} - (\overline{y})^2.$$

3) Вибіркові середні квадратичні відхилення ξ та η : $\sigma_x = \sqrt{D_x}$; $\quad \sigma_y = \sqrt{D_y}$.

4) Вибіркова (емпірична) коваріація ξ та η

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j n_{ij} - \overline{xy}, \quad \text{або} \quad K_{xy}^* = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j w_{ij} - \overline{xy}.$$

5) Вибірковий (емпіричний) коефіцієнт кореляції (ВКК) ξ та η:

$$r_B = r_{xy}^* = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j n_{ij} - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Для коефіцієнта кореляції має місце нерівність: $|r| \le 1$.
Якщо величини ξ і η незалежні, то $r = 0$.

Якщо $r = 0$, то величини ξ і η називають некорельованими, але вони можуть бути залежними у випадках, коли їх розподіл відрізняється від нормального. При лінійній функціональній залежності величин ξ і η коефіцієнт кореляції $r = 1$ або $r = -1$.
Тому вважають, що цей коефіцієнт при $|r| < 1$ характеризує ступінь тісності лінійної ймовірності залежності між випадковими величинами ξ і η.

Вибірковий коефіцієнт кореляції r_B є оцінкою коефіцієнта кореляції r ГС

Застосування методу найменших квадратів приводить до наступного рівняння регресії η та ξ має вигляд:

$$\overline{y}_x = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) + \overline{y}. \qquad (11.5)$$

Аналогічно знаходять рівняння регресії ξ на η:

$$\overline{x}_y = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}) + \overline{x}. \qquad (11.6)$$

Довірчий інтервал для r у випадку нормальної ГС

У випадку, коли ГС з ознаками (ξ, η) має нормальний розподіл, можна побудувати довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r. Вибірковий коефіцієнт кореляції r_B є точковою оцінкою невідомого коефіцієнта кореляції $r\ (r_{\xi\eta})$. Нехай задано γ (надійність). Тоді відомо, що при великих обсягах вибірки має місце наближена формула для обчислення довірчого інтервалу:

$$r_B - t\frac{1-(r_B)^2}{\sqrt{n}} \le r \le r_B + t\frac{1-(r_B)^2}{\sqrt{n}}, \qquad (11.7)$$

де t – критична точка нормального розподілу: $2\Phi_0(t) = \gamma$.

Перевірка гіпотези про значущість r_B

Виникає також задача перевірки гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції, тобто чи істотно відрізняється коефіцієнт кореляції r ГС від нуля (чи є лінійний кореляційний зв’язок). Тобто при заданому рівні значущості α перевіримо нульову гіпотезу $H_0: r = 0$ при $H_1: r \ne 0$.

Якщо H_0 відхиляється, то це означає, що коефіцієнт кореляції істотно відрізняється від нуля, а ξ та η пов'язані лінійною залежністю; якщо H_0 не відхиляється від нуля, то ξ та η некорельовані (не пов'язані лінійною залежністю).

За критерій перевірки гіпотези H_0 приймаємо двобічний критерій $T = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$, який має розподіл Стьюдента з $k = n-2$ ступенями свободи.

Приклад 1. Нехай задана кореляційна таблиця спостережених значень ознак (ξ, η) генеральної сукупності.

y_i \ x_j	-2	-1	0	1	2	3	n_y
-2	2	4	-	-	-	-	6
-1	-	6	2	-	-	-	8
0	-	-	3	50	2	-	55
1	-	-	1	10	6	-	17
2	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

Треба побудувати вибіркові рівняння регресії η на ξ та ξ на η, знайти довірчий інтервал для невідомого коефіцієнта кореляції r та перевірити гіпотезу про істотність кореляційного зв'язку.

Розв'язання:

Обчислимо вибіркові числові характеристики двовимірного статистичного розподілу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{6} x_j n_{x_j} = \frac{1}{100}(-4-10+64+30+9) = 0{,}89;$$

$$\nu_{2x}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{6} x_j^2 n_{x_j} = \frac{1}{100}(8+10+64+60+27) = 1{,}69;$$

$$\sigma_x^2 = 1{,}69 - (0{,}89)^2 = 0{,}90; \quad \sigma_x = \sqrt{0{,}90} \approx 0{,}95;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5} y_i n_{y_i} = \frac{1}{100}(-12-8+17+28) = 0{,}25;$$

$$\nu_{2y}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 n_{y_i} = \frac{1}{100}(24+8+17+56) = 1{,}06;$$

$$\sigma_y^2 = 1{,}06 - (0{,}25)^2 \approx 1{,}00; \quad \sigma_y = 1{,}00;$$

$$K_{xy}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} x_j y_i n_{ij} - \overline{xy} = \frac{1}{100}\left(-2(-4-4)-(-6)+10+12+2(4+14+9)\right)-$$

$$-0{,}89 \cdot 0{,}25 = \frac{1}{100}(16+28+54) - 0{,}22 = 0{,}76;$$

$$r_B = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0,76}{0,95 \cdot 1} = 0,8.$$

Підставимо необхідні числові характеристики в (11.5) і (11.6) і отримаємо вибіркові рівняння регресії η на ξ та ξ на η:

$$\overline{y_x} = 0,8\frac{1}{0,95}(x - 0,89) + 0,25 = 0,84x - 0,50,$$

або $$\overline{y_x} = 0,84x - 0,50. \qquad (11.8)$$

$$\overline{x_y} = 0,8\frac{0,95}{1}(y - 0,25) + 0,89 = 0,76y + 0,70,$$

або $$\overline{x_y} = 0,76y + 0,70. \qquad (11.9)$$

Графіки вибіркових прямих регресії будуються в одній координатній системі (рис. 11.1) за рівняннями регресії (11.8) і (11.9).

За кореляційною таблицею розподілу умовні середні дорівнюють:
$\overline{y_{x_1}} = -2$; $\overline{y_{x_2}} = -1,4$; $\overline{y_{x_3}} = -0,33$; $\overline{y_{x_4}} = 0,28$; $\overline{y_{x_5}} = 1,33$; $\overline{y_{x_6}} = 2$
(відповідні точки позначено чорними квадратами);
$\overline{x_{y_1}} = -1,33$; $\overline{x_{y_2}} = -0,75$; $\overline{x_{y_3}} = 0,98$; $\overline{x_{y_4}} = 1,29$; $\overline{x_{y_5}} = 1,93$ (відповідні точки позначено чорними кружками).

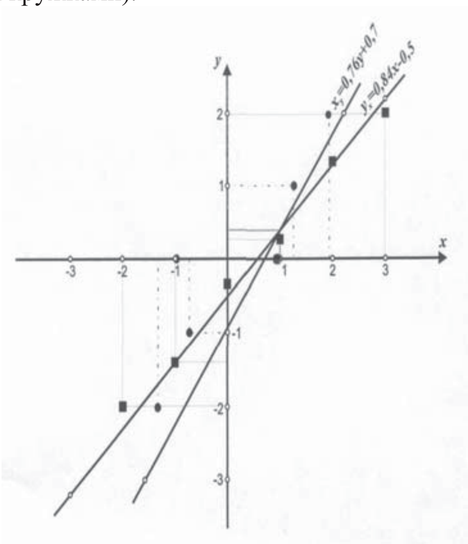


Рис. 11.1

Знайдемо довірчий інтервал для r.
Оскільки $r_B = 0,8$; $n = 100$; $\gamma = 0,95$, з табл. за формулою $2\Phi_0(\mathrm{t}) = \gamma$ знайдемо $t = 1,96$. Тоді, за формулою (11.7) знайдемо

$$r_B - t\frac{1-(r_B)^2}{\sqrt{n}} = 0,8 - 1,95\frac{1-0,64}{10} \le r \le 0,8 + 1,95\frac{1-0,64}{10} = r_B + t\frac{1-(r_B)^2}{\sqrt{n}},$$

або $$0{,}73 < r < 0{,}87\,.$$

За допомогою статистики T перевіримо гіпотезу про значущість r_B, тобто
$$H_0: r = 0;\;\; H_1: r \neq 0\,.$$

Спостережене значення статистики T дорівнює
$$T_{\text{спостер}} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}} = \frac{0{,}8\sqrt{98}}{\sqrt{1-0{,}64}} = 13{,}20\,.$$

З табл. 6 знаходимо критичну точку розподілу Стьюдента для $\alpha = 0{,}05$ і $k = 100 - 2 = 98$. Маємо $T_{\text{кр}}(0{,}05;\ 98) = 1{,}98$. Оскільки $T_{спостер} = 13{,}20 > 1{,}98 = \text{T}_{\text{kp}}$ нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Отже η та ξ пов'язані лінійною кореляційною залежністю.

Завдання для самостійної роботи №11

За заданим двомірним статистичним розподілом вибірки потрібно (табл. 11.2): знайти рівняння прямих ліній регресії; побудувати графіки одержаних функцій регресії; обчислити умовні середні значення за одержаними функціями та за таблицею розподілу; побудувати довірчий інтервал для вибіркового коефіцієнта кореляції та перевірити гіпотезу про його вагомість.

Таблиця 11.2

Статистичний розподіл (ξ, η)							
y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
15	3	3	–	–	–	–	6
18	1	α	4	–	–	–	$5+\alpha$
21	–	2	β	35	4	–	$41+\beta$
24	–	–	5	γ	5	1	$11+\gamma$
27	–	–	–	4	δ	5	$9+\delta$
n_x	4	$5+\alpha$	$9+\beta$	$39+\gamma$	$9+\delta$	6	$n = 72+\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Значення величин α, β, γ, δ для варіантів задачі в табл.11.3.

Таблиця 11.3

Варіант	α	β	γ	δ	Варіант	α	β	γ	δ
1	1	6	8	1	**16**	2	11	22	1
2	1	7	9	2	**17**	2	12	21	2
3	1	8	10	3	**18**	2	13	20	3
4	1	9	11	1	**19**	2	14	19	1
5	1	10	12	2	**20**	2	15	18	2
6	1	11	13	3	**21**	3	6	17	3
7	1	12	14	1	**22**	3	7	16	1
8	1	13	15	2	**23**	3	8	15	2

9	1	14	16	3
10	1	15	17	1
11	2	6	18	2
12	2	7	19	3
13	2	8	20	1
14	2	9	21	2
15	2	10	22	3
24	3	9	14	3
25	3	10	13	1
26	3	11	12	2
27	3	12	11	3
28	3	13	10	1
29	3	14	9	2
30	3	15	8	3

Список літератури

1. *Крюков М. М.*, *Крижановська Т. В.* Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.

2. *Крюков М. М.*, *Крижановська Т. В.* Курс вищої математики. – Т. 2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 334 с.

3. *Крюков М. М.*, *Крижановська Т. В.* Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 335 с.

4. *Крюков М. М.*, *Крижановська Т. В.* Математичний практикум. – Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.

5. *Дюженкова Л. І.*, *Дюженкова О. Ю.*, *Михалін Г. О.* Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 623 с.

Додаткова література

1. *Васильченко І. П.* Математика для економістів. – К.: Кондор, 2006.
2. *Грисенко М. В.* Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
3. *Ляшенко О.*, *Черняк О.*, *Кравець Т.* та ін. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 547 с.
4. *Рудницький О. Г.* Математика для економістів: Конспект лекцій для студентів денної та заочної форми навчання. – К.: ДЕТУТ, 2010. – 265 с.