МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ

УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

О.О.Кільчинський, Т.М.Семененко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №3
Для студентів денної форми навчання за напрямом 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ 2012

УДК 51:517

Кільчинський О.О., Семененко Т.М.
ВИЩА МАТЕМАТИКА. Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №3. Для студентів денної форми навчання за напрямом 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно- інтегровані технології». – К.: ДЕТУТ, 2012. – 44 с.

Розроблено варіанти розрахункових робіт з математики і методичні рекомендації для їх виконання. Робота призначена для самостійного опрацювання студентами програмного матеріалу за тематикою третього семестру: диференціальні рівняння, числові та функціональні ряди, кратні та криволінійні інтеграли. Самостійна робота з варіантами необхідна для засвоєння всіх зазначених тем на належному рівні.

Призначені для студентів денної форми навчання за напрямом

6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно - інтегровані технології».

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики (протокол №2 від 21.09.2011 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки і менежжменту (протокол №3 від 25.10.2011р.).

Укладачі: *Кільчинський О.О.*, к.ф.-м.н., доцент,

Семененко Т.М., ст. викладач

Рецензенти: *Сахацька І.К.*, к.ф.-м.н., доцент,

Андрейцев А.Ю., к.ф.-м.н., доцент.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складено для поглиблення та контролю знань, розвитку та закріплення навичок самостійної роботи студентів з вищої математики.

При виконанні розрахункової роботи студент повинен дотримуватись таких вимог:

1. Номер варіанта індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
2. Розрахункова робота виконується на аркушах паперу у форматі А4;
3. Перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписується її умова і всі конкретні дані до відповідного варіанта;
4. Розв'язування кожної задачі повинно супроводжуватись необхідними поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

1. Ознайомитись з наведеним переліком питань з дисципліни «Вища математика» і опанувати відповідний теоретичний матеріал з допомогою конспекта лекцій та рекомендованої літератури;
2. Ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до індивідуальних завдань;
3. Роботу над варіантами виконувати поетапно протягом всього семестру (в міру проходження відповідних тем лекційних та практичних занять);
4. По завершенні кожного з етапів відповідна частина роботи (що оформлена належним чином) подається на перевірку викладачу;
5. Робота оформляється рукописно – комп'ютерний набір не приймається. Писати акуратно та розбірливо.
6. Повністю завершену роботу треба здати на перевірку викладачу не пізніше ніж за два тижні до кінця семестру;
7. Студенти, які не виконали індивідуальних завдань і не здали роботу вчасно, не допускаються до іспиту з дисципліни як такі, що не виконали навчальний план.

1. ПИТАННЯ
з дисципліни «Вища математика» (2 курс, III семестр)

1. Означення, властивості та обчислення криволінійних інтегалів 1-го типу (по довжині дуги).
2. Означення, властивості та обчислення криволінійних інтегалів 2-го типу (по координатах).
3. Застосування криволінійних інтегралів.
4. Означення та властивості подвійного інтеграла.
5. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутних декартових координатах.
6. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
7. Звичайне ДР(диференціальне рівняння), його порядок та загальний розв'зок.
8. Частинний розв'язок ДР, задача та теорема Коші.
9. ДР 1-го порядку та його розв'язки.Теорема Коші.
10. ДР з відокремлюваними змінними.
11. Однорідне ДР.
12. Лінійне ДР та ДР Бернуллі.
13. ДР, що допускають пониження порядку.
14. Лінійне диференціальне рівняння (ЛДР) n-го порядку та властивості його розв'язків.
15. Лінійно залежні і незалежні системи функцій. Визначник Вронського.
16. Знаходження загального розв'язку однорідного ЛДР зі сталими коефіцієнтами.
17. Інтегрування неоднорідного ЛДР за методом варіації довільних сталих.
18. Метод добору при інтегруванні ЛДР зі сталими коефіцієнтами.
19. Числовий ряд, його сума та залишок. Необхідна ознака збіжності.
20. Теореми порівняння збіжності числових рядів з додатними членами.
21. Ознаки Даламбера та Коші для числових рядів з додатними членами.
22. Інтегральна ознака Коші для числового ряду з додатними членами.
23. Знакозмінний числовий ряд, достатня ознака збіжності.
24. Знакочергований числовий ряд, ознака збіжності Лейбніца.
25. Абсолютна та умовна збіжності знакозмінного ряду. Теорема Рімана.
26. Функціональний ряд, його сума та залишок, область збіжності.
27. Степеневий ряд, теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності.
28. Ряди Тейлора і Маклорена. Розвинення елементарних функцій.
29. Застосування степеневих рядів в наближених обчисленнях.
30. Ортогональні системи функцій. Розкладення в ряд Фур'є за системою ортогональних функцій.
31. Тригонометричні системи ортогональних функцій. Теорема Діріхле.
32. Ряди Фур'є для парних та непарних функцій, для функцій, що задані на півперіоді.

2. Т ИПОВІ ЗАДАЧІ
та приклади їх розв'язування

Задача 1. Знайти загальний інтеграл (загальний розв'язок) диференціального рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$x^2\,dx - 3\sin 2y\,dy = x^3\sin 2y dy - x^2\cos^2 y\,dx.$$

Розв'язання. Зберемо подібні з множниками dx, dy і розведемо їх по різні боки; приведемо рівняння до вигляду:

$$(x^2dx + x^2\cos^2 y)dx = (x^3\sin 2y + 3\sin 2y)dy.$$

В лівій частині винесемо за дужки спільний множник x^2, в правій – $\sin 2y$ та отримаємо таке рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x^2(1 + \cos^2 2y)dx = \sin 2y(x^3 + 3)dy.$$

Відокремимо змінні x і y, поділивши обидві частини рівняння на добуток «зайвих множників» $(1 + \cos^2 y)(x^3 + 3)$. Матимемо:

$$\frac{x^2}{x^3+3}dx = \frac{\sin 2y}{1+\cos^2 y}\,dy.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння і знайдемо його загальний інтеграл:

$$\int\frac{x^2}{x^3+3}\,dx = \int\frac{\sin 2y}{1+\cos^2 y}\,dy \Rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{d(x^3+3)}{x^3+3} = -\int\frac{d(1+\cos^2 y)}{1+\cos^2 y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln|x^3+3| = -\ln|1+\cos^2 y| + \ln|C| \Rightarrow \ln|x^3+3|^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \ln\left|\frac{C}{1+\cos^2 y}\right| \Rightarrow \sqrt[3]{x^3+3} = \frac{C}{1+\cos^2 y} \Leftrightarrow (1+\cos^2 y)\sqrt[3]{x^3+3} = C.$$

Відповідь: $(1+\cos^2 y)\sqrt[3]{x^3+3} = C.$

***Приклад* 2**. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y^2\sin^2 x\,dx + dy + \sin^2 x\,(dx - dy) = 0.$$

Розв'язання. Зберемо подібні при множниках dx , dy приведемо рівняння до вигляду:

$$(1-\sin^2 x)dy + (y^2\sin^2 x + \sin^2 x)\,dx = 0.$$

Звідси отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\cos^2 x\,dy + (y^2 + 1)\sin^2 x\,dx = 0.$$

Відокремимо змінні x і y, поділивши обидві частини рівняння на добуток $\cos^2 x\,(y^2 + 1)$. Матимемо:

$$\frac{dy}{y^2+1} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = 0.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння і знайдемо його загальний інтеграл:

$$\int\frac{dy}{y^2+1} + \int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int 0\,dx \Rightarrow \operatorname{arctg} y + \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} y + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int dx = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} y + \operatorname{tg} x - x + C = 0.$$

Таким чином, неявна залежність між змінними x і y задається у вигляді

$$\operatorname{arctg} y + \operatorname{tg} x - x + C = 0.$$

Розв’яжемо це співвідношення відносно змінної y і знайдемо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y = \operatorname{tg}(x - \operatorname{tg} x - C).$$

Відповідь: $y = \operatorname{tg}(x - \operatorname{tg} x - C)$.

Задача 2. Знайти загальний інтеграл (загальний розв’язок) диференціального рівняння:

$$xy\,dy = (2y^2 + 2xy + x^2)dx.$$

Розв’язання. Оскільки множник при *dx* не розкладається у функціональний добуток типу *N(x)M(y)*, то (на відміну від попередньої задачі) змінні не відокремлюються. Складемо вираз похідної $y' = \frac{dy}{dx}$ і дослідимо тип рівняння. Матимемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 + 2xy}{xy}.$$

Після ділення чисельника і знаменника на величину x^2 пересвідчуємось, що права частина цього рівняння є функцією вигляду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, а саме рівняння є однорідним:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x}}.$$

Зробимо підстановку $u = \frac{y}{x}$, де $u = u(x)$ – невідома функція. Тоді матимемо $y = x\,u$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ і прийдемо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u^2 + 2u + 1}{u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{2u^2 + 2u + 1}{u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 2u + 1}{u}.$$

Далі знайдемо:

$$\frac{u\,du}{(u+1)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{u\,du}{(u+1)^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{(u+1)-1}{(u+1)^2}\,du = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(u+1)}{u+1} - \int \frac{d(u+1)}{u+1^2} = \ln|x| \Rightarrow \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} + C = \ln|x|.$$

Звідси, повертаючись до старої невідомої y , отримуємо кінцевий результат:

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} + C = \ln|x|.$$

Відповідь: $\ln\left|\frac{y+x}{x}\right| + \frac{x}{y+x} + C = \ln|x|$.

Задача 3. Розв'язати задачу Коші:

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, arctg\, x, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне рівняння вигляду:

$$y' + p(x)y = f(x), \text{ де } \; p(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, arctg\, x. \tag{1}$$

Для розв'язання задачі Коші спершу знайдемо загальний розв'язок ДР (1), а потім підберемо частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові.

Загальний розв'язок здобудемо за методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа) у два етапи:

1) Складемо й розв'яжемо однорідне рівняння :

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = 0. \tag{2}$$

Після відокремлення змінних та інтегрування матимемо:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}\, y = 0, \; \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2}\, dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{x}{1+x^2}\, dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \ln|C| \Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного ДР (2) має вигляд:

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{3}$$

де C – довільна стала.

2) Замінимо у виразі (3) сталу C на поки що невідому функцію C(x), розв'язок неоднорідного ДР (1) шукатимемо у вигляді:

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{4}$$

Знайдемо похідну y':

$$y' = \left(\frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{C(x)'}{\sqrt{1+x^2}} + C(x)\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \tag{5}$$

Підставивши вирази (4),(5) у неоднорідне ДР (1), матимемо:

$$\frac{C(x)'}{\sqrt{1+x^2}} + C(x)\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + \frac{x}{1+x^2}\frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, arctg\, x \Rightarrow C(x)' = x\, arctg\, x.$$

Звідси отримаємо:

$$C(x) = \int x\, arctg\, x\, dx = \left| \begin{matrix} u = arctg\, x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = arctg\, x\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\, arctg\, x -$$

$-\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\,arctg\,x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2+1}{2}\,arctg\,x - \frac{1}{2}x + C,$

де C – довільна стала. Далі застосовуємо формулу (4) і знаходимо загальний розв'язок неоднорідного ДР (1):

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x^2+1}{2}\,arctg\,x - \frac{1}{2}x + C\right). \qquad (6)$$

Виходячи із загального розв'язку (6), підберемо тепер значення сталої C, щоб задовольнити зазначеній початковій умові $y(1) = 0$. За формулою (6) при $x = 1$ матимемо $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\,1 - \frac{1}{2} + C\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + C\right)$.

Прирівняємо цей вираз до нуля і знайдемо: $C = \frac{2-\pi}{4}$. Значення сталої C підставимо у формулу (6) і отримаємо шуканий розв'язок задачі Коші.

Відповідь: $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x^2+1}{2}\,arctg\,x - \frac{1}{2}x + \frac{2-\pi}{4}\right)$.

Задача 4. Знайти загальний розв'язок або розв'язати задачу Коші.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Розв'язання. Це однорідне лінійне диференціальне рівняння (ОЛДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами; його загальний розв'язок знаходиться по коренях характеристичного рівняння за такою схемою:

1) Замінивши у лівій частині ОЛДР похідні $y^{(s)}$ степенями r^s $(s = 0;1;2)$, складемо характеристичне рівняння; знайдемо корені рівняння та кратності цих коренів. Матимемо:

$$r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -3,\ r_2 = 2 \text{ (прості корені, дійсні й різні);}$$

По множині коренів складемо відповідну систему лінійно незалежних частинних розв'язків. Оскільки корені дійсні й різні, то ці розв'язки знайдемо у вигляді:

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{-3x},\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{2x};$$

2) Складемо загальний розв'язок ОЛДР як лінійну комбінацію частинних розв'язків з довільними сталими (C_1 та C_2). Матимемо:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв'язання. 1) Відповідне характеристичне рівняння запишемо у вигляді:

$$r^2 + 6r + 9 = 0.$$

Визначаючи корені, знайдемо $r_1 = r_2 = -3$. Отже, рівняння має один дійсний корінь $r = -3$, що повторюється двічі – кратний корінь кратності $k = 2$.

2) Оскільки характеристичне рівняння має кратний корінь $r = -3$ кратності два, то йому відповідають два лінійно незалежних розв'язки:

$$y_1 = e^{rx} = e^{-3x},\ y_2 = x\,y_1 = x\,e^{-3x}.$$

3) Загальний розв'язок ДР отримаємо у вигляді:

$$y = C_1y_1+C_2y_2 = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x}.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x}$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок ОЛДР, а потім підберемо частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам. При знаходженні загального розв'язку виконуємо потрібні операції.

1) Розв'язуючи характеристичне рівняння $r^2 + 6r + 13 = 0$, переконуємось, що воно має від'ємний дискримінант ($D = 6^2 - 4x13 = -16 < 0$). Тому його корені є комплексно спряженими:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i \qquad (i = \sqrt{-1} \text{ - уявна одиниця}).$$

2) Оскільки корені характеристичного рівняння є комплексно спряженими, мають вигляд $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де $\alpha = -3$, $\beta = 2$, то їм відповідають два лінійно незалежних розв'язки:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = e^{-3x} \cos 2x \ , \ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{-3x} \sin 2x$$

3) Загальний розв'язок ОЛДР знайдемо у вигляді:

$$y = C_1y_1+C_2y_2 = C_1 e^{-3x} \cos 2x + C_2 e^{-3x} \sin 2x = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \quad (7)$$

і матимемо:

$$y' = -3 e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-3x} (-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) =$$
$$= -3y + 2 e^{-3x} (-C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x). \quad (8)$$

З виразів (7),(8) при $x = 0$ отримаємо:

$$y(0) = C_1 \ , \quad y'(0) = -3y(0) + 2C_2 \ .$$

Звідси, враховуючи умови задачі Коші, складемо систему $\begin{cases} 3 = C_1, \\ 1 = -9 + 2C_2 \end{cases}$,

з якої визначимо $C_1 = 3$, $C_2 = 5$. Значення довільних сталих підставимо у формулу (7) і знайдемо розв'язок задачі Коші.

Відповідь: $y = e^{-3x} (3 \cos 2x + 5 \sin 2x)$.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+3n+5}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^{n+1}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$.

Розв'язання

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{2^n}$. Це додатний числовий ряд, $a_n = \frac{3n+5}{2^n}$. Для дослідження збіжності застосуємо ознаку Даламбера і знайдемо величину $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Вираз для a_{n+1} отримаємо з a_n, замінивши n на $n+1$. Матимемо: $a_{n+1} = \frac{3(n+1)+5}{2^{n+1}} = \frac{3n+8}{2^n \cdot 2}$,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+8}{2^n \cdot 2} : \frac{3n+5}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+8}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{3n+5} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+8}{3n+5} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

*Зауваження 1.*Якщо, користуючись ознакою Даламбера, знайдемо, що $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, то треба застосувати іншу ознаку (спробувати ознаки порівняння, інтегральну ознаку Коші, перевірити чи взагалі виконується необхідна ознака збіжності).

Зауваження 2. Ознаку Даламбера зручно застосовувати тоді, коли загальний член ряду містить множниками показникові вирази a^n, вирази з факторіалами $n!$ або степенево - показникові вирази n^n.

Зауваження 3. На практиці часто зустрічаються такі факторіали:
$n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n;\ \ (n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot(n+1)=n!(n+1);\ \ (2n)!=1\cdot 2\ldots\cdot 2n;\ \ (2n+2)!=(2n)!(2n+1)(2n+2).$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n^2+3n+5}$. Застосуємо ознаку Даламбера. Знайдемо:

$$a_{n+1}=\frac{3(n+1)+1}{2(n+1)^2+3(n+1)+5}=\frac{3n+4}{2n^2+7n+10},\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)(2n^2+3n+5)}{(2n^2+7n+10)(3n+1)}=1.$$

Оскільки $L=1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Щоб з'ясувати остаточно застосуємо граничну ознаку порівняння. Порівняємо цей ряд із розбіжним гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Поклавши $a_n=\frac{3n+1}{2n^2+3n+5}$, $b_n=\frac{1}{n}$,

знайдемо $K=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2+3n=5}:\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{2n^2+3n+5}=\frac{3}{2}$.Оскільки маємо $0<K<1$, то ряди поводяться однаково, тобто обидва розбігаються.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n^2}$. Застосуємо радикальну ознаку Коші і знайдемо $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+7-2}{2n+7}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{2n+7}\right)^{\frac{2n+7}{-2}}\right]^{\frac{-2n}{2n+7}}=$$

$\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{2n}{2n+7}}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1.$ Отже ряд збіжний.

Зауваження 4. Радикальна ознака Коші застосовується, як правило, тоді, коли n-й член ряду є n-м степенем деякого виразу.

Зауваження 5. При застосуванні радикальної ознаки Коші може бути корисною відома границя: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}$ – це додатний числовий ряд, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}}$.

За інтегральною ознакою Коші розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_1^b(3x+2)^{-\frac{2}{3}}d(3x+2)=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}b_n\left.\frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt[3]{3b+2}-\sqrt[3]{5}\right)=\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, отже розбігається і відповідний ряд.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{4^{n+1}} = -\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}-\frac{3}{4^4}+\frac{4}{4^5}-\ldots$ – знакочергований числовий ряд.

Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин членів цього ряду:

$\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots+\frac{n}{4^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n+1}}$. Застосуємо ознаку Даламбера: $a_n=\frac{n}{4^{n+1}}$,

$a_{n+1}=\frac{n+1}{4^{n+2}}$, $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}\cdot\frac{4^{n+1}}{n}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{4}<1.$

Оскільки ряд з абсолютних величин членів даного ряду збігається, то вихідний ряд є абсолютно збіжним.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=1-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3}}-\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\cdots$-знакочергований ряд.

Складемо ряд з абсолютних величин його членів $1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$.

Цей ряд розбіжний (узагальнений гармонійний ряд , $p=\frac{1}{5}<1$). Але вихідний знакочергований ряду задовольняє умовам теореми Лейбніца (члени ряду за абсолютною величиною монотонно спадають: $1>\frac{1}{\sqrt[5]{2}}>\frac{1}{\sqrt[5]{3}}>\frac{1}{\sqrt[5]{4}}>\cdots>\frac{1}{\sqrt[5]{n}}>\cdots$,

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}=0$) і, отже, збігається умовно.

Відповідь: 1) збіжний; 2) розбіжний; 3) збіжний; 4) розбіжний; 5) абсолютно збіжний; 6) умовно збіжний.

Задача 6. Знайти область збіжності степеневих рядів.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду**:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{3n+1}(x+3)^n. \tag{9}$$

Розв'язання. Це ряд вигляду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, де $a_n=(-1)^n\frac{4^n}{3n+1}$, $x_0=$ - 3.

Для знаходження області збіжності D цього ряду треба:

1) знайти радіус збіжності R;
2) розв'язати нерівність

$$|x-x_0|<R \tag{10}$$

та знайти інтервал збіжності $I=(x_0-R;\ x_0+R)$;

3) дослідити збіжність в кінцевих точках (при $x=x_0-R$, $x=x_0+R$) і в разі збіжності долучити їх до інтервалу збіжності.

1) *Радіус збіжності* знайдемо за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Матимемо: $|a_n|=\left|(-1)^n\frac{4^n}{3n+1}\right|=|(-1)^n|\frac{4^n}{3n+1}=\frac{4^n}{3n+1}$, $|a_{n+1}|=\frac{4^{n+1}}{3n+4}$,

$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{4^n}{3n+1}\cdot\frac{3n+4}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}\frac{3n+4}{3n+1}$, $R=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1}=\frac{1}{4}$.

Отже, радіус збіжності знайдено: $R=\frac{1}{4}$.

2) *Інтервал збіжності* знайдемо з нерівності (10), яка набуде вигляду: $|x+3| < \frac{1}{4}$. Звідси отримаємо $-\frac{1}{4} < x+3 < \frac{1}{4}$, $-3\frac{1}{4} < x < -2\frac{3}{4}$.

Таким чином, інтервалом збіжності є проміжок $I = (-3\frac{1}{4}\ ; -2\frac{3}{4})$.

3) *Дослідимо збіжність ряду в кінцевих точках* проміжку.

При $x = -3\frac{1}{4}$ отримуємо

$$\left[(-1)^n \frac{4^n}{3n+1}(x+3)^n\right]\Big|_{x=-3\frac{1}{4}} = (-1)^n \frac{4^n}{3n+1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3n+1}$$

і ряд (9) перетворюється в числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ (з додатними членами $b_n = \frac{1}{3n+1}$). Оскільки при $n \to \infty$ маємо $b_n = \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{3(n+\frac{1}{n})} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, то й ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ також розбігається.

Отже, встановлено, що при $x = -3\frac{1}{4}$ ряд (9) *розбігається.*

При $x = -2\frac{3}{4}$ отримуємо:

$$\left[(-1)^n \frac{4^n}{3n+1}(x+3)^n\right]\Big|_{x=-2\frac{3}{4}} = (-1)^n \frac{4^n}{3n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = (-1)^n \frac{1}{3n+1}$$

і ряд (9) перетворюється в знакочерговий числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$ (із загальним членом $a_n = (-1)^n\ b_n$, де $b_n = \frac{1}{3n+1} > 0$). Цей ряд збігається за теоремою Лейбніца, бо

1) його члени за абсолютною величиною монотонно спадають:

$|a_n| = b_n = \frac{1}{3n+1} < |a_{n+1}| = b_{n+1} = \frac{1}{3n+4}$ $(n \in N)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} = 0.$

Отже, при $x = -2\frac{3}{4}$ ряд (9) *збігається.*

Відповідь: ряд збігається в області $D = \left(-3\frac{1}{4}; -2\frac{3}{4}\right]$.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{2n+4}\right)^n (x-2)^n. \tag{11}$$

Розв'язання

1) *Радіус збіжності* знайдемо за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, де $a_n = \left(\frac{3n-2}{2n+4}\right)^n$.

Матимемо:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{2n+4}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n-2} = \frac{2}{3}.$$

2) *Інтервал збіжності* знайдемо з нерівності (10), яка набуде вигляду $|x-2| < \frac{2}{3}$. Звідси отримаємо $-\frac{2}{3} < x-2 < \frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3} < x < 2\frac{2}{3}$.

Таким чином, інтервалом збіжності є проміжок $I = \left(1\frac{1}{3}\ ;\ 2\frac{2}{3}\right)$.

3) *Дослідимо збіжність ряду в кінцевих точках* проміжку.

При $x = 1\frac{1}{3}$ отримуємо :

$$\left[\left(\frac{3n-2}{2n+4}\right)^n (x-2)^n\right]\Big|_{x=1\frac{1}{3}} = \left(\frac{3n-2}{2n+4}\right)^n \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{3n-2}{3n+6}\right)^n$$

і ряд (11) перетворюється в знакочергований числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$, де $b_n = \left(\frac{3n-2}{3n+6}\right)^n > 0$. Цей ряд розбігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ (не виконується необхідна ознака збіжності). Дійсно, за другою важливою границею знайдемо :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-8}{3n+6}\right)^{\frac{3n+6}{-8}\cdot\frac{-8n}{3n+6}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-8n}{3n+6}} = e^{-\frac{8}{3}} \neq 0.$$

При $x = 2\frac{2}{3}$ ряд (11) перетворюється у числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+6}\right)^n$. Цей ряд також розбігається. Отже, в точках $x = 1\frac{1}{3}$ та $x = 2\frac{2}{3}$ ряд (11) *розбігається.*

Відповідь: ряд збігається в області $D = \left(1\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$.

Задача 7. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 3, & -2 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$.

При розкладенні в ряд Фур'є будемо виходити з такої ознаки Діріхле.

Ознака Діріхле

Якщо функція $f(x)$ з періодом $T = 2\mathrm{L}$ є кусково - монотонною на проміжку [-*L* ; *L*] і має не більше, ніж скінченну кількість точок розриву першого роду, то в точках неперервності її можна розвинути у тригонометричний ряд Фур'є і має місце рівність:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\mathrm{L}} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}\right), \tag{12}$$

де коефіцієнти a_0, a_n, b_n визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_{-\mathrm{L}}^{\mathrm{L}} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_{-\mathrm{L}}^{\mathrm{L}} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_{-\mathrm{L}}^{\mathrm{L}} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}dx \quad (n=1, 2, \cdots); \tag{13}$$

в точках розриву сума S ряду (12) збігається до величини $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$,

при $x = \pm L$ сума S збігається до величини $\frac{f(-\mathrm{L}+0)+f(\mathrm{L}-0)}{2}$.

Розв'язання

На проміжку $[-2;2]$ функція є кусково-монотонною,вона неперервна всюди окрім точки $x=0$, де має розрив першого роду ($f(0-0)=3 \neq f(0+0)=0$). Отже, на проміжку $[-2;2]$ функція задовольняє умовам Діріхле і її можна розвинути в ряд Фур'є.

Оскільки функція має лише одну точку розриву першого роду $x=0$ і є кусково-монотонною, то вона задовольняє умовам Діріхле на проміжку $[-2;2]$, (за умовами завдання L=2).

За формулами (13) знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}3dx=\frac{3}{2}x\Big|_{-2}^{0}=\frac{3}{2}\cdot 2=3,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}3\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}=\frac{3}{n\pi}(\sin 0+\sin n\pi)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}3\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}=-\frac{3}{n\pi}(\cos 0-\cos n\pi)=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{3}{n\pi}\left((-1)^n-1\right).$$

Були використані формули: $\sin 0=0, \sin n\pi=0, \cos 0=1, \cos n\pi=(-1)^n$.

За формулою (12) розвинення функції в ряд Фур'є в точках неперервності має вигляд $f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$. В точці розриву, при $x=0$, для суми ряду матимемо $S=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{3}{2}$. Оскільки $f(-2+0)=3,\ f(2+0)=0,$ то в кінцевих точках відрізка, при $x=\pm 2$, сума має те саме значення $S=\frac{3}{2}$.

Відповідь: $f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Задача 8. Обчислити подвійний інтеграл.

Обчислення подвійного інтеграла здійснюється, виходячи з двох таких теорем.

Теорема 1. Якщо функція *f(x;y)* є неперервною у двовимірній області D = $\{(x;y)|\ a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, що обмежена лініями x = a, x = b, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ і, до того ж, функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ є неперервними на відрізку $[a;b]$, то подвійний інтеграл можна звести до повторного за формулою:

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x;y)\,dy. \tag{14}$$

Теорема 2. Якщо функція *f(x;y)* є неперервною у двовимірній області D = $\{(x;y)|\ c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$, що обмежена лініями y = c, y = d, $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ і, до того ж, функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ є неперервними на відрізку $[c;d]$, то подвійний інтеграл можна звести до повторного за формулою:

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x;y)\,dx. \tag{15}$$

Повторні інтеграли у правих частинах формул (14),(15) обчислюються двократним повторенням операції інтегрування, починаючи з внутрішнього інтеграла. У формулі (14) внутрішній інтеграл знаходиться інтегруванням по змінній y при припущенні $x = const$. У формулі (15) – навпаки: внутрішній інтеграл знаходиться інтегруванням по змінній x при припущенні $y = const$.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл:

$$I = \iint_D (2y - x - 2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

якщо область D обмежена параболою $y = x^2$ та прямою $x - y + 2 = 0$.

Розв'язання

1) *Зробимо рисунок області* D (рис. 1).

Зобразимо граничні криві $y = x^2$ та $x - y + 2 = 0$. Координати граничних точок A(-1; 1) B(2; 4) знайдемо як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$

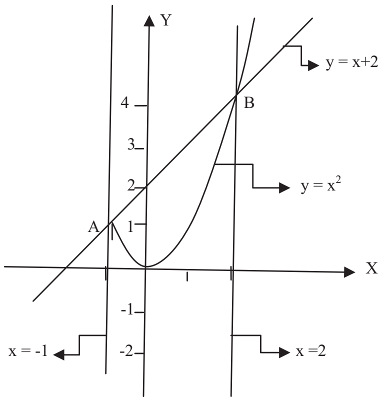


Рис.1

2) *Перейдемо від подвійного інтеграла до повторного (дворазового) інтегрування* за формулами (14),(15).

Дослідимо проекції області на координатні осі, визначимо змінні та межі інтегрування у зовнішньому та внутрішньому інтегралах.

Розглядаючи проекції області D на координатні осі, зауважимо таке:

1) проекцією області на вісь Ox є відрізок $[-1; 2]$;

2) при $\forall\, x \in [-1; 2]$ точки $(x, y) \in D$ містяться між лініями $y = x^2$ та $y = x+2$.

Отже, область D обмежена лініями $x = -1$, $x = 2$, $y = x^2$, $y = x+2$ і задається рівністю D = $\{(x; y) \mid -1 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x + 2\}$.

Оскільки (включно із неперервністю всіх функцій) задовольняються всі умови теореми 1, то відповідно до формули (14) змінною інтегрування у зовнішньому інтегралі виберемо змінну *x*, а у внутрішньому – змінну *y*. За нижню межу інтегрування у зовнішньому інтегралі візьмемо a = -1, за верхню – b = 2. За нижню межу інтегрування у внутрішньому інтегралі візьмемо $\varphi_1(x) = x^2$, за верхню – $\varphi_2(x)$ = x+2. Матимемо:

$$\iint_D (2y - x - 2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} (2y - x - 2)\,dy. \qquad (16)$$

Спершу інтегруванням по змінній *y* знаходимо внутрішній інтеграл.
Покладаючи $x = const$, отримаємо:

$$\int_{x^2}^{x+2} (2y - x - 2)\,dy = \int_{x^2}^{x+2} [(2y - (x+2)]dy = \int_{x^2}^{x+2} 2y\,dy - (x+2)\int_{x^2}^{x+2} dy =$$

$$= y^2 \Big|_{x^2}^{x+2} - (x+2)\,y \Big|_{x^2}^{x+2} = (x+2)^2 - (x^2)^2 - (x+2)(x+2-x^2) =$$

$$= x^3 + 2x^2 - x^4.$$

Підставимо цей вираз у формулу (16) і, інтегруючи по змінній *x*, знайдемо зовнішній інтеграл. Матимемо:

$$\iint_D (2y - x - 2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} (x^3 + 2x^2 - x^4)\,dx = \int_{x^2}^{x+2} (2y - x - 2)\,dy =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{20}.$$

Відповідь: $I = \frac{3}{20}$.

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл:

$$I = \iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2 + 16)^2}\,dx\,dy,$$

якщо область D є прямокутником: $D = \{(x;y) \mid 0 \le x \le 3,\ 4 \le y \le 5\}$..

Розв'язання. Перехід до повторного інтегрування можна здійснювати одним із способів:

1) $I = \int_0^3 dx \int_4^5 \frac{x}{(x^2+y^2+16)^2} dy$ або 2) $I = \int_4^5 dy \int_0^3 \frac{x}{(x^2+y^2+16)^2} dx$.

Краще застосувати другий спосіб, бо там при обчисленні внутрішнього інтеграла (у припущенні $y = const$) матимемо:

$$d(x^2 + y^2 + 16) = (x^2 + y^2 + 16)'_x\,dx = 2x\,dx,$$

що дозволяє застосувати метод підведення під знак диференціала:

$$\int_0^3 \frac{x}{(x^2 + y^2 + 16)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(x^2 + y^2 + 16)^2} = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{d(x^2 + y^2 + 16)}{(x^2 + y^2 + 16)^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 + y^2 + 16, \\ \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2+y^2+16}\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2+16} - \frac{1}{y^2+25}\right).$$

Далі, продовжуючи за другим способом і інтегруючи цей вираз по змінній y (при знаходженні зовнішнього інтеграла), отримаємо:

$$I = \frac{1}{2}\int_4^5 \left(\frac{1}{y^2+16} - \frac{1}{y^2+25}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\,arctg\frac{y}{4} - \frac{1}{5}\,arctg\frac{y}{5}\right)\Big|_4^5 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(arctg\frac{5}{4} - arctg1\right) - \frac{1}{10}\left(arctg1 - arctg\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{40}\,arctg\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{40}\,arctg\frac{1}{9}$.

Задача 9. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги) $I = \int_L (7y - 3x)ds$, де L – дуга астроїди: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ($a > 0$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$).

Розв'язання. Перейдемо від обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду до звичайного визначеного інтеграла. Застосуємо алгоритм:

1) перетворимо підінтегральний вираз, подавши координати x,y та диференціал ds через змінну t;

2) обчислимо відповідний визначений інтеграл, поклавши за нижню межу інтегрування найменше, а за верхню – найбільше значення t на дузі L.

Матимемо: 1) $7y - 3x = 7a\sin^3 t - 3a\cos^3 t$, $ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt =$

$$= \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = 3a|\sin t\cos t|dt = -3a\sin t\cos t\,dt,$$

2) $I = \int_{\pi/2}^{\pi}(7a\sin^3 t - 3a\cos^3 t)(-3a\sin t\cos t)\,dt = -21a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^4 t\cos t\,dt +$

$+ 9a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^4 t\sin t\,dt = -21a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^4 t\,d(\sin t) - 9a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^4 t\,d(\cos t) =$

$= -\frac{a^2}{5}(21\sin^5 t + 9\cos^5 t)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 6a^2.$

Відповідь: $I = 6a^2$.

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги) $I = \int_L \frac{y^2}{x^3}ds$, де L – дуга кривої: $y = \frac{1}{\sqrt{5}}x^{3/2}$ $(0 \le x \le 4)$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз, подавши координату y та диференціал ds через змінну x. За нижню межу інтегрування візьмемо найменше ($x = 0$), за нижню – найбільше її значення ($x = 4$). Матимемо:

$\frac{y^2}{x^3} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x^{3/2}\right)^2 : x^3 = \frac{x^2}{5}$, $ds = \sqrt{1 + (\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{3}{2}x^{3/2})^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{5}{4}x^3}\,dx$,

$I = \int_L \frac{y^2}{x^3}ds = \frac{1}{5}\int_0^4 x^2\sqrt{1 + \frac{5}{4}x^3}\,dx = \frac{4}{75}\int_0^4\left(1 + \frac{5}{4}x^3\right)^{1/2}d\left(1 + \frac{5}{4}x^3\right) =$

$= \frac{8}{225}\left(1+\frac{5}{4}x^3\right)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{225}\left(81^{3/2}-1\right) = \frac{5824}{225} \approx 25{,}884.$

Відповідь: $I = \frac{5824}{225} \approx 25{,}884.$

Задача 10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (по координатах) $I = \int_{AB}\frac{x^2dy-xydx}{x^2+y^2}$, де AB - дуга еліпса $x = 5\cos t,\ y = 3\sin t$ (з півосями $a = 5$, b = 4) від точки A(5; 0) до точки B(0; 3) у першому квадранті (рис.2).

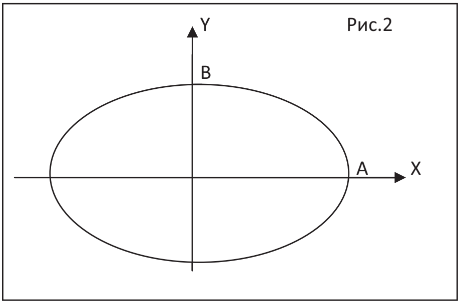


Рис.2

Розв'язання. Перейдемо від обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду до звичайного визначеного інтеграла. Оскільки положення кожної точки (x; y) на дузі AB цілком визначається значенням змінної t, застосуємо такий алгоритм:

1) перетворимо підінтегральний вираз, подавши координати x,y та диференціали dx,dy через змінну t;

2) обчислимо відповідний визначений інтеграл, поклавши за нижню межу інтегрування значення змінної t у початковій точці A, за верхню – у кінцевій точці B дуги AB.

Матимемо:

1) $dx = x'_t\,dt = -5\sin t\,dt,\ \ dy = 3\cos t\,dt,\ \ x^2dy - xydx = x(xdy - ydx) =$

$= 5\cos t\,[5\cos t\,3\cos t - 3\sin t(-5\sin t)]\,dt = 75\cos t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)dt =$

$= 75\cos t\,dt,\ \ x^2 + y^2 = 25\cos^2 t + 9\sin^2 t.$

2) Значення змінної t у початковій та кінцевій точках дуги AB знайдемо як розв'язки системи рівнянь:

$\begin{cases}5\cos t = 5,\\ 3\sin t = 0\end{cases}$ (для точки A(5; 0)) та $\begin{cases}5\cos t = 0,\\ 3\sin t = 3\end{cases}$ (для точки B(0; 3)).

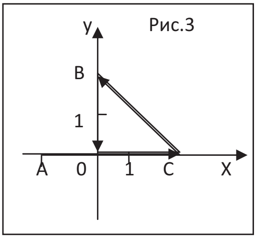
Для початкової точки (з першої системи) отримаємо $t = t_A = 0$, для кінцевої – (з другої системи) дістанемо $t = t_B = \frac{\pi}{2}$. Далі обчислюємо визначений інтеграл:

$$I = 75\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{25\cos^2 t+9\sin^2 t} = 75\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{25(1-\sin^2 t)\ +9\sin^2 t} = 75\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{25-16\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{75}{16}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t-\frac{25}{16}} = -\frac{75}{16}\int_0^{\pi/2}\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t-\left(\frac{5}{4}\right)^2} = -\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sin t-\frac{5}{4}}{\sin t+\frac{5}{4}}\right|\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{15}{8}\ln\left|\frac{1-\frac{5}{4}}{1+\frac{5}{4}}\right| = \frac{15}{8}\ln 9.$$

Відповідь: $I = \frac{15}{8}\ln 9.$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (по координатах) $I = \int_{ACBO} 2xdx - (x + 2y)\,dy$, де ACB – ламана з вершинами в точках A(-1; 0), C(2; 0) та B(0; 2) (рис. 3).



Розв'язання. За властивістю адитивності подамо вихідний інтеграл у вигляді суми трьох криволінійних інтегралів (по відрізках *AC* , *CB* та *BO*):

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BO}. \quad (17)$$

При обчисленні першого з цих інтегралів зауважимо, що на відрізку *AC* положення кожної точки цілком визначається її координатою x . Тому саме x і виберемо як змінну інтегрування. При цьому (оскільки на відрізку *AC* маємо y = 0, $dy = 0$) підінтегральний вираз набуде вигляду: $2xdx - (x + 2y)dy = 2x\,dx$.

Зважаючи, що при переміщенні з початкової в кінцеву точку відрізка змінна x пробігає значення від $x_A = -1$ до $x_C = 2$, матимемо:

$$\int_{AC} = \int_{AC} 2xdx - (x + 2y)dy = \int_{AC} 2xdx = \int_{-1}^{2} 2xdx = x^2 \Big|_{-1}^{2} = 2^2 - (-1)^2 = 3.$$

При обчисленні другого з цих інтегралів застосуємо рівняння прямої, яка проходить через точки *C* і *B* : $\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C}$. При $x_C = 2$, $y_C = 0$ і $x_B = 0$, $y_B = 2$ звідси отримаємо $\frac{x-2}{0-2} = \frac{y-0}{2-0}$ або $y = 2 - x$, $x = 2 - y$. За змінну інтегрування виберемо x . Тоді всюди на відрізку *CB* матимемо $y = 2 - x$, $dy = -dx$. Оскільки при переміщенні з початкової в кінцеву точку відрізка *CB* змінна x пробігає значення від $x_C = 2$ до $x_B = 0$, то при переході від криволінійного до звичайного визначеного інтеграла отримаємо:

$$\int_{CB} = \int_{CB} 2xdx - (x + 2y)dy = \int_{AC} 2xdx - \big(x + 2(2 - x)\big)(-dx) =$$

$$= \int_{2}^{0} (x + 4)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{2}^{0} = -10.$$

При обчисленні третього із складових інтегралів положення кожної точки відрізка *BO* визначатимемо координатою y. Її й виберемо за змінну інтегрування. Оскільки на відрізку *B*O маємо x = 0, $dx = 0$, то підінтегральний вираз набуде вигляду: $2xdx - (x + 2y)dy = 2y\,dy$. Зважаючи, що при переміщенні з початкової в кінцеву точку відрізка змінна y пробігає значення від $y_B = 2$ до $y_O = 0$, матимемо:

$$\int_{BO} = \int_{BO} 2xdx - (x + 2y)dy = \int_{BO} 2ydy = \int_{2}^{0} 2ydy = y^2 \Big|_{2}^{0} = 0^2 - (2)^2 = -4.$$

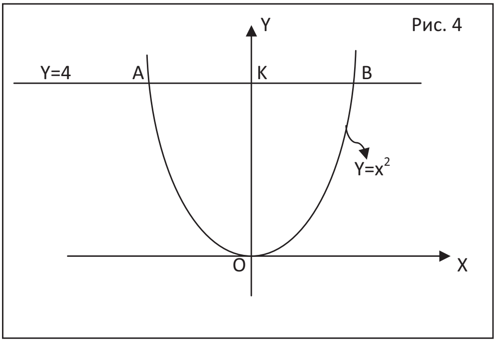
Враховуючи значення всіх трьох доданків, за формулою (17) знаходимо:

$$I = \int_{AC} + \int_{CB} + \int_{BO} = 3 - 10 - 4 = -11.$$

Відповідь: $I = -11$.

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (по координатах) $I = \oint_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L – замкнений контур, що складено з частин параболи $y = x^2$ та прямої $y = 4$.

Розв'язання. Виходячи із змісту символу циркуляції, інтегрування по замкненому контуру L тут здійснюється у додатному напрямі, по кривій *OBKA* (рис.4).



Розкладемо контур L на складові дуги *BKA*, *AOB* і подамо вихідний інтеграл у вигляді суми: $I = \oint_{BKA} + \oint_{AOB}$. Координати точок *A* і *B* знайдемо як розв'язки системи $\begin{cases} y = 4, \\ y = x^2. \end{cases}$ Матимемо $\begin{cases} x = -2, \\ y = 4 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 2, \\ y = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow A(-2; 4)$ і $B(2; 4)$.

Оскільки на всьому відрізку *BA* зберігається $y=4$, $dy = 0$ і при переміщенні по лінії *BKA* від точки *B* до *A* змінна x пробігає значення від $x_B = 2$ до $x_A = -2$, то

$$\int_{BKA}(x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_2^{-2}(x^2 - 8x)dx = -\frac{16}{3}.$$

Оскільки на дузі *AOB* маємо $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$ і при переміщенні від точки *A* до точки *B* по цій дузі змінна x пробігає значення від $x_A = -2$ до $x_B = 2$, то

$$\int_{BKA}(x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy = \int_{-2}^{2}(x^2 - 2x\,x^2)dx +$$
$$+\int_{-2}^{2}((x^2)^2 - 2xx^2)2x\,dx = \int_{-2}^{2}(x^2 - 2\,x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = \frac{16}{3} - \frac{256}{5}.$$

Складаючи отримані значення, знайдемо

$$I = \oint_{BKA} + \oint_{AOB} = -\frac{16}{3} + \left(\frac{16}{3} - \frac{256}{5}\right) = -\frac{256}{5}.$$

Відповідь: $I = -\frac{256}{5}$.

3. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
до розрахункової роботи

Варіант 1

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$e^{y}\left(1+x^{2}\right)dy-2x\left(1+e^{y}\right)dx=0.$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}.$
3. Розв’язати задачу Коші $y'-3y=e^{-2x}, \quad y(0)=0.$
4. Розв’язати задачу Коші $y''+4y'+29y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=15.$
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n+3}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n^{3}}{2^{n}}$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^{n}}{n^{2}}.$
7. Розвинути в ряд Фур’є:
$f(x)=\begin{cases}0, & -3\le x<0,\\ 5, & 0\le x\le 3.\end{cases}$
8. Обчислити:
$\iint\limits_{D}\left(12x^{2}y^{2}+16x^{3}y^{3}\right)dxdy, \quad D: x=1,\ y=x^{2},\ y=-\sqrt{x}.$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_{L}(x-y)ds,$ де L – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(4;3)$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_{AB}2ydx+(3x-y)dy$ вздовж параболи $y=\sqrt{x}$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(4;2)$.

Варіант 2

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$2xy^{2}dx-ydy=0.$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$xy'=2\sqrt{3x^{2}+y^{2}}+y.$
3. Розв’язати задачу Коші $y'-\dfrac{1}{x}y=x^{2}, \quad y(1)=0{,}5.$
4. Розв’язати задачу Коші $y''+4y'+4y=0, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=5.$

5. Дослідити на збіжність рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+5)2^n}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$f(x)=\begin{cases}2, & -2\le x<0,\\ -1, & 0\le x<2.\end{cases}$

8. Обчислити:

$\iint_D\left(9x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L – відрізок прямої $x-2y=4$ від точки $A(0;-2)$ до точки $B(4;0)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_{AB}\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy$ вздовж прямої, яка з'єднує точки $A(0;0)$ та $B(1;2)$.

Варіант 3

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$ye^{2x}dx+\left(1+e^{2x}\right)dy=0.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}.$

3. Розв'язати задачу Коші $y'+\frac{1}{x}y=e^{x^2}$, $y(1)=\frac{e}{2}$.

4. Розв'язати задачу Коші $y''+4y'=0$, $y(0)=7$, $y'(0)=8$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$f(x)=\begin{cases}5, & -4\le x<0,\\ 10, & 0\le x<4.\end{cases}$

8. Обчислити:

$\iint_D\left(36x^2y^2-96x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$ вздовж прямої від точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_{AB} xydx$ вздовж лінії $y = \sin x$ від точки $A(\pi;0)$ до точки $B(0;0)$.

Варіант 4

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$x\cos 2ydx - x^2 \sin 2ydy = 0.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0.$

3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x}y = x\sin x, \quad y(\pi) = 0.$

4. Розв'язати задачу Коші $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n^2 - 1}\right)^n$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n + 3}$.

6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{3n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:
$$f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x < 4, \\ 3, & -4 \le x < 0. \end{cases}$$

8. Обчислити:
$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$ вздовж астроїди $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ від точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_{AB}(x + y)dx + (2x - y)dy$ вздовж лінії $y = \sqrt{25 - x^2}$ від точки $A(5;0)$ до точки $B(0;5)$.

Варіант 5

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$xy^2dx - ydy = yx^2dy - xdx..$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$xy' - y = xtg\frac{y}{x}$.

3. Розв’язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x} y = xtgx, \quad y(\pi) = \pi.$

4. Розв’язати задачу Коші $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(n+3)^3}}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{(n+1)!}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+1)^{2n} (x-6)^n}{(2n-1)^{2n}}$.

7. Розвинути в ряд Фур’є:

$f(x) = \begin{cases} 3, & -3 \le x < 0, \\ 5, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

8. Обчислити:

$\iint_D \left(27x^2 y^2 + 48x^3 y^3\right) dxdy, \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds,$ де L – коло $x^2 + y^2 = ax.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_L (2x - 3y)dx + xdy$ вздовж еліпса L : $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t,$ обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 6

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

$\left(e^x + 5\right)dy - y^2 e^x dx = 0.$

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

$xy' - y = (x + y)\ln \frac{x+y}{x}$..

3. Розв’язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x} y = x^3 + 2, \quad y(1) = \frac{1}{3}$.

4. Розв’язати задачу Коші $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{7^n}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{n-1}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:
$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi \le x < 0,\\ 3, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$$
8. Обчислити:
$$\iint_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}.$$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int_L xyds,$ де L – контур трикутника з вершинами $A(-1;0)$, $B(1;0)$. , $C(0;1)$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int_L yzdx + xzdy + xydz$ вздовж гвинтової лінії L :
$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{at}{2\pi}$ від точки $A(t=0)$ до точки $B(t=2\pi)$.

Варіант 7

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$y\left(2+e^x\right)dy = e^x dx.$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right).$
3. Розв'язати задачу Коші $y' - \dfrac{1}{x}y = x^3e^{x^3}$, $y(1) = \dfrac{e}{3}$.

4. Розв'язати задачу Коші $9y'' + 4y = 0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=5$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+3)!2^n}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n-1}.$$
7. Розвинути в ряд Фур'є:
$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x < 0,\\ 1, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$$
8. Обчислити:
$$\iint_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int_L xds,$ де L – частина параболи $y = \dfrac{3}{8}x^2,\ 0 \le x \le 1.$
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int_{AB}\dfrac{y}{x}dx + xdy$ вздовж лінії $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

Варіант 8

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$x\sqrt{x^2+1}dx-\sqrt{y}dy=0.$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$\left(x^2+xy\right)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші $y'-\frac{1}{x}y=x\ln x,\quad y(2)=2.$
4. Розв'язати задачу Коші $y''+4\pi^2 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2\pi$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}(x-2)^n}{(3n-1)^{2n}}$.
7. Розвинути в ряд Фур'є:
$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ -2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$
8. Обчислити:
$\iint\limits_D\left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}.$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L yds$, де L – частина параболи $y=2\sqrt{x}$, яка міститься у верхній півплощині $(0\le x\le 1)$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_{AB}(y^2+x)dx+\frac{2x}{y}dy$ вздовж лінії $y=2^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;2)$.

Варіант 9

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$2x^2ydy=\left(3+y^2\right)dx.$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$xy'(\ln y-\ln x)=y$.
3. Розв'язати задачу Коші $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\quad y(0)=0.$
4. Розв'язати задачу Коші $5y''-6y'=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+5)2^n}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{n^2+5}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}2, & -\dfrac{\pi}{3}\le x<0,\\ -5, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint_D\left(4xy+3x^2y^2\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L (x+y)ds$, де L – права пелюстка лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\varphi.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_L ydx-(y+x^2)dy$ вздовж лінії L : $y=2x-x^2$, яка розташована в верхній півплощині, обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 10

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y^2e^xdx-\left(e^x+2\right)dy=0.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}.$$

3. Розв'язати задачу Коші $y'-\dfrac{1}{x}y=\ln x,\quad y(1)=5.$

4. Розв'язати задачу Коші $4y''-4y'+y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-1.$

5. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{3n-2}\right)^n,\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{2^n}.$$

6. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n2^n}.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1\le x<0,\\ 1, & 0\le x<1.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint_D\left(12xy+9x^2y^2\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int\limits_L y^2 ds$, де L – дуга лінії : $x = t,\ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z = t^3,\quad 0 \le t \le 1.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int\limits_L 2xdy - 3ydx$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1;2)$,$B(3;1)$., $C(2;5)$, обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 11

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$.

3. Розв'язати задачу Коші $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1,\quad y(1) = 0.$

4. Розв'язати задачу Коші $y'' + 10y' + 25y = 0,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 5$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + 3n - 1}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{n^5}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5n+1)^n (x-6)^n}{(2n-1)^n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x) = \begin{cases} -4, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

8. Обчислити:

$\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right) dxdy,\quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int\limits_L \sqrt{y^2 + z^2} ds$, де L – контур кола : $y^2 + z^2 = ay, (a > 0).$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int\limits_L x^2 ydx + x^3 dy$, де L – контур, який обмежений параболами $y^2 = x$ і $y = x^2$, обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 12

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0.$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x}y = x\sin^3 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
4. Розв'язати задачу Коші $y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2 - n + 3}\right)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n^2 - 3n}$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.
7. Розвинути в ряд Фур'є:
$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{2} \le x < 0, \\ -3, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
8. Обчислити:
$\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}.$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги:
$\int\limits_L \frac{yds}{\sqrt{x}}$, де L – дуга параболи $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ від точки $A(3; 2\sqrt{3})$ до точки $B(8; \frac{32}{3}\sqrt{2})$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L (xy - 1)dx + x^2 ydy$, вздовж чверті еліпса L : $x = \cos t,\ y = 2\sin t$,
який міститься в першій чверті від точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 2)$.

Варіант 13

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$y(1 + e^x)dy = e^x dx.$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$(xy' - y)arctg\,\frac{y}{x} = x$.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{(x-2)^2}, \quad y(1) = 0.$
4. Розв'язати задачу Коші $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^6+3}}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{2^n}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$f(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x\le 3,\\ 3, & -3\le x<0.\end{cases}$

8. Обчислити:

$\iint_D\left(12xy+27x^2y^2\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L(x^2+y^2+z^2)ds$, де L – дуга лінії : $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\quad 0\le t\le 2\pi.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_L xy^2dx+yz^2dy+zx^2dz$ вздовж відрізка прямої, яка з'єднує точки $A(3;-6;0)$ і $B(-2;4;5)$.

Варіант 14

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$2x^2yy'+y^2=2.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y$.

3. Розв'язати задачу Коші $y'+2xy=-2x^3,\quad y(1)=e^{-1}.$

4. Розв'язати задачу Коші $25y''+10y'+y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+5)^3}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{3n^2}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\frac{\pi}{2}\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

8. Обчислити:

$$\iint_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L arctg\,\dfrac{y}{x}\,ds,$ де L – частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi,$ яка знаходиться в середині круга радіусом R з центром в початку координат.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_{AB} 3x^2ydx+(x^3+1)dy,$ вздовж параболи $y=2\sqrt{x}$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

Варіант 15

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y\ln y\,dx+\frac{e^{-x^2}}{x}dy=0.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$(2x-y)y'=x+2y.$$

3. Розв'язати задачу Коші $y'-\dfrac{1+2x}{x^2}y=1,\quad y(1)=1.$

4. Розв'язати задачу Коші $16y''+8y'+y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=4.$

5. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3},\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n^2-1}.$$

6. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n3^n}.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ 1, & -\dfrac{1}{2}\le x<0.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint_D\left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L (x^2+y^2)^4\,ds,$ де L – коло $x^2+y^2=a^2.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_{OA} xydx+yzdy+zxdz$, де OA – чверть кола: $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=1$, обхід здійснювати в напрямку зростання параметра t.

Варіант 16

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$y'x = 4\left(y - \sqrt{y}\right).$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right).$
3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$
4. Розв'язати задачу Коші $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n^2-1}\right)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+2}$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{n}$.
7. Розвинути в ряд Фур'є:
$f(x) = \begin{cases} 3, & -3 \le x < 0, \\ -4, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$
8. Обчислити:
$\iint\limits_D\left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy, \quad D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}.$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L xyds$, де L – контур прямокутника з вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$., $C(0;2)$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L \frac{xdx}{y} + \frac{ydy}{y-a}$, вздовж циклоїди $L: x = a(1-\sin t), y = a(1-\cos t)$ від точки $t_1 = \frac{\pi}{6}$ до точки $t_2 = \frac{\pi}{3}$.

Варіант 17

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$\sin y\cos^3 xdx + \cos^3 y\sin xdy = 0.$
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$3x^2y' = y^2 + 10xy = 10x^2$.
3. Розв'язати задачу Коші $y' - yctgx = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
4. Розв'язати задачу Коші $9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(n+3)^6}}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(n-1)!}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n (x-2)^n}{(3n-1)^n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\frac{\pi}{2}\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$\iint_D (24xy-48x^3y^3)dxdy,\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L y^2 ds$, де L – арка циклоїди : $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_{AB}(x^2+y^2)dx$ вздовж лінії $y=x^3$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(0;0)$.

Варіант 18

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$(x^2y-y)dy-(xy^2+x)dx=0$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y^2+x^2y'=xy\,y'.$

3. Розв'язати задачу Коші $y'-2tgx\,y=4\cos^3 x \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$.

4. Розв'язати задачу Коші $y''-4y'+29y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=14$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{3n-1}\right)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n6^n}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n^2-1}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}3, & -\pi\le x<0,\\ -1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$\iint_D (6xy+24x^3y^3)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})ds,$ де L – дуга кривої : $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_{AB} xydy$ вздовж лінії $x=y-y^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(0;-1)$.

Варіант 19

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$\left(x^2y+2y\right)dy+\left(xy^2-x\right)dx=0$.
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$\left(3x^2-2xy\right)y'=x^2+3xy-y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші $y'-2tgx\,y=6\cos^2 x\sin x$ $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$.
4. Розв'язати задачу Коші $y''+2y'+2y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!2^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5n}{2n-1}\right)^n$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.
7. Розвинути в ряд Фур'є:
$f(x)=\begin{cases}-4, & -2\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le 2.\end{cases}$
8. Обчислити:
$\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}.$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, де L – відрізок прямої, яка з'єднує точки $A(1;1;1)$ і $B(2;3;4)$.

Варіант 20

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$\cos^2 x\,ydy-\left(\sin x+\sin x\,y^2\right)dx=0.$

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$xy' = y \sin \ln \frac{y}{x}$.

3. Розв’язати задачу Коші $y' + 2ctgx\, y = -2\sin^3 x \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3$.

4. Розв’язати задачу Коші $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$.

5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^3-2}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^n$.

6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^{n-1}}$.

7. Розвинути в ряд Фур’є:
$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x < 0, \\ 5, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

8. Обчислити:
$\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L (y - x)ds$, де L – дуга параболи $y = x^3$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ від точки $A(1;0)$ до $B(0;2)$ вздовж дуги параболи $4x + y^2 = 4$.

Варіант 21

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$\sin^2 x\, y\, dy = \left(2\cos x + \cos x\, y^2\right)dx = 0.$

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$.

3. Розв’язати задачу Коші $y' + 2ctgx\ y = 4\sin^2 x \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.$

4. Розв’язати задачу Коші $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$.

5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{3^n}$.

6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{2^n - 1}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1\le x<0,\\ -1, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})ds$, де L – дуга астроїди : $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $(0\le t\le 2\pi)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int\limits_{(0;0)}^{(3;6)} 4x\sin^2 y dx+y\cos^2 2x dy$ вздовж прямої лінії.

Варіант 22

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'=\frac{y^2+3xy^2}{x^2y-x^2}.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

3. Розв'язати задачу Коші $xy'+3y=x^5 \quad y(2)=1$.

4. Розв'язати задачу Коші $y''+6y'+13y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=5$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{2^n},\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{n^3+5}.$$

6. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2n^2}.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -2\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int\limits_L \frac{ds}{x-2}$, де L – відрізок прямої $y=\frac{x}{2}-2$ від точки $A(0;-2)$ до точки $B(4;0)$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int\limits_L x^2ydy-y^2xdx$, де $L:\ x=\sqrt{\cos t};\ y=\sqrt{\sin t},\ 0\le t\le \pi/2$.

Варіант 23

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$$y' = \frac{2\sin x + \sin x\, y^2}{\cos^2 x\, y}.$$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$$(xy' - y)ctg\frac{y}{x} = x.$$
3. Розв’язати задачу Коші $xy' + 2y = x^2 \quad y(2) = 3$.
4. Розв’язати задачу Коші $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n + 3},\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}.$$
6. Знайти область збіжності ряду:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+1)^n(x-6)^n}{(2n-1)^{3n}}.$$
7. Розвинути в ряд Фур’є:
$$f(x) = \begin{cases} -3, & -4 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$$
8. $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L x^2 yds,$ де L - чверть кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка лежить в першій чверті.

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L (x^2 - y^2)dx + xydy$, якщо L – ламана ОАВ , де $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

Варіант 24

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$$y' = \frac{2\cos x + \cos x\, y^2}{\sin^2 x\, y}.$$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$$xy'\left(2y^2 + 4x^2\right) = 3y^3 + 8xy^2.$$
3. Розв’язати задачу Коші $xy' + 4y = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = \frac{5}{2}.$
4. Розв’язати задачу Коші $y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 12$
5. Дослідити на збіжність ряди:
$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{2n^2 - 1}\right)^n,\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n^3 + 3n}.$$

6. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1}.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}2, & -3\le x<0,\\ -1, & 0\le x\le 3.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L y^2 ds,$ де L – дуга лінії : $x=t;\ y=\dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}, 0\le t\le 1;\ z=t^3.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_L 2xdy-3ydx,$ де L – контур трикутника з вершинами $A(1;2)$,$B(3;1).$, $C(2;5)$, обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 25

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y^2e^x dx=\left(e^x+2\right)dy.$$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$x^2y'=y^2+6xy+6x^2.$$

3. Розв'язати задачу Коші $y'-\dfrac{1}{x}y=\ln^2 x,\quad y(1)=5.$

4. Розв'язати задачу Коші $4y''-4y'+y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-2$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+3)!2^n},\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{2n^2-1}\right)^n.$$

6. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$$f(x)=\begin{cases}5, & -2\le x<0,\\ -3, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

8. Обчислити:

$$\iint_D \left(6x^2y^2+50x^4y^4\right)dxdy,\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds,$ де L – коло $x^2+y^2=ax.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L (2x-3y)dx + xdy$ вздовж еліпса L : $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t,$ обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 26

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$2xydy = \left(3 + y^2\right)dx.$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}.$
3. Розв’язати задачу Коші $y' - \dfrac{2y}{x+1} = 2(x+1)^3, \quad y(0) = 0.$
4. Розв’язати задачу Коші $5y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$.
5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^3-2}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{2n-1}{3n-2}\right)^n$.
6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}.$
7. Розвинути в ряд Фур’є:
$f(x) = \begin{cases} 3, & -4 \le x < 0, \\ -1, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$
8. Обчислити:
$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}.$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L xyds,$ де L – контур трикутника з вершинами $A(-1;0)$, $B(1;0)$., $C(0;1)$.
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L yzdx + xzdy + xydz$ вздовж гвинтової лінії L : $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{at}{2\pi}$ від точки $A(t=0)$ до точки $B(t=2\pi)$.

Варіант 27

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$y\ln ydx = \dfrac{e^{-x^2}}{x}dy.$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $xy' = y + \sin\dfrac{2y}{x}$.

3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}, \; y(1) = 1.$

4. Розв'язати задачу Коші $16y'' - 8y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{n^2+5n}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є:

$f(x) = \begin{cases} 3, & -2 \le x < 0, \\ 5, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$

8. Обчислити

$\iint_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dxdy, \quad D: x = 1, \, y = x^3, \, y = -\sqrt{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги

$\int_L xds,$ де L – частина параболи $y = \frac{3}{8}x^2, 0 \le x \le 1.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$\int_{AB} \frac{y}{x} dx + xdy$ вздовж лінії $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

Варіант 28

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$y^2 e^x dx - \left(e^x - 2\right) dy = 0.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y'x = 2y \ln \frac{2y}{x}.$

3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{3}{x} y = x, \quad y(1) = 5.$

4. Розв'язати задачу Коші $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$

5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{3n-2}\right)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{6^n}$.

6. Знайти область збіжності ряду:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n2^n}$.

7. Розвинути в ряд Фур'є

$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 \le x < 0, \\ 4, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

8. Обчислити:
$$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}.$$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L yds,$ де L – частина параболи $y = 2\sqrt{x},$ яка міститься у верхній півплощині $(0 \le x \le 1).$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_{AB} (y^2 + x)dx + \dfrac{2x}{y}dy$ вздовж лінії $y = 2^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;2).$

Варіант 29

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$$2xdy + ydx + xy\left(ydy + dx\right) = 0.$$
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:
$$xy' = y + \sin\frac{2y}{x}.$$
3. Розв’язати задачу Коші $y' - \dfrac{1}{x}y = x\sin^2 x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

4. Розв’язати задачу Коші $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

5. Дослідити на збіжність ряди:
$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n^2+3}\right)^n, \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n^2+3n}.$$
6. Знайти область збіжності ряду:
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n.$$
7. Розвинути в ряд Фур’є:
$$f(x) = \begin{cases} 4, & -2 \le x < 0, \\ -2, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$
8. Обчислити:
$$\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy, \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}.$$
9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int\limits_L (x + y)ds,$ де L – права пелюстка лемніскати $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$ вздовж лінії L : $y = 2x - x^2,$ яка розташована в верхній півплощині, обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

Варіант 30

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$y(2+e^x)dy = e^x dx.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
$xy'\sin\frac{3y}{x} + x = y\sin\frac{3y}{x}.$

3. Розв'язати задачу Коші $y' - \frac{1}{x}y = \frac{x}{(x+2)^2}, \quad y(1) = 0.$

4. Розв'язати задачу Коші $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

5. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20n-1}{2^n+3n-1}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$.

6. Знайти область збіжності ряду:
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n}.$

7. Розвинути в ряд Фур'є:
$f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \le x < 0, \\ -4, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

8. Обчислити
$\iint_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy, \quad D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}.$

9. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині дуги
$\int_L y^2 ds$, де L – дуга лінії : $x = t, \ y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, \ z = t^3, \quad 0 \le t \le 1.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду
$\int_L 2xdy - 3ydx$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1;2)$, $B(3;1)$., $C(2;5)$, обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки.

4. Л ІТЕРАТУРА

Основна література

1 Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики. – У 2-х т. Т.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 338с.

2 Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики. – У 2-х т. Т.2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335с.

3 Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч. Ч.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335с.

4 Математичний практикум/ Під ред.. проф.. Крюкова М.М.: У 2-х ч. Ч.2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.

5 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.

6 Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Збірник задач – К.: Вища школа, 2001. – 480 с.

Додаткова література

1 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970–1985; т. 1, 2.

2 Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

3 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965–1980.

4 Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов ./Под ред. Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1964–1978.

5 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.–383 с.

6 Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: ч.1, 2. – М.: Высш. шк., 1986.

Навчально- методичне видання

Кільчинський Олександр Олександрович
Семененко Тетяна Миколаївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА.
Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №3
для студентів денної форми навчання за напрямом 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Відповідальний за випуск – Кільчинський О.О.

Редактор Щербак Н.В
Макет і верстка Андрієнка В.О.

Підписано до друку 06.12.2011. Формат 60x84/16.Папір – офсетний.
Друк – на ризографі. Зам .№117-2/11 . Тираж 60 прим.

Надруковано у Видавництві Державного економіко-
технологічного університету транспорту.
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.07. Серія ДК № 3079.
03049, м. Київ – 049, вул. М. Лукашевича, 19