Міністерство транспорту та зв’язку України
Державний економіко-технологічний
університет транспорту

Кафедра вищої математики

М. П. Андросенко

Конспект лекцій з дисципліни «дослідження операцій» для студентів спеціальності «менеджмент організацій»

Київ · 2009

УДК 517.93

Андросенко М. П. Конспект лекцій з дисципліни «дослідження операцій». Київ: Державний економіко-технологічний університет транспорту, 2009.- 120 с.

Посібник написаний відповідно до навчальної програми дисципліни «дослідження операцій», що викладається студентам-менеджерам факультету економіки та менеджменту. Розглядаються постановки прикладних задач дослідження операцій, їх практичне застосування, методи розв'язання. До кожної лекції подано список запитань для самоперевірки знань.

Конспект розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 8 від 25.03.2009 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки та менеджменту (протокол № 6 від 31.03.2009 р.).

Призначено для студентів усіх форм навчання напряму підготовки «менеджмент організацій».

Укладач: М. П. Андросенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензенти: П. Й. Дудніков, кандидат фізико-математичних наук;
Т. В. Крижановська, кандидат фізико-математичних наук

Зміст

Вступ

Даний конспект лекцій є обробкою лекцій з дослідження операцій, які автор читав протягом останніх років для студентів напряму підготовки «менеджмент організацій» Державного економіко-технологічного університету транспорту.

Мета видання лекцій – дати студентам невеликий за обсягом, але достатньо повний за висвітленням методів і моделей дослідження операцій посібник з курсу «Дослідження операцій», передбаченого нині діючою програмою підготовки фахівців напряму «Менеджмент організацій».

Лекції містять основні поняття, означення, моделі та методи розв'язання задач дослідження операцій.

Кожна тема навчальної програми дисципліни «дослідження операцій» висвітлена в даному посібнику.

Розглянуто предмет та задачі дисципліни, методи економіко-математичного моделювання, задача про призначення, задачу про розкрій матеріалів та оптимізації виробничої програми, модель Леонтьєва «затрати-випуск», задачу про розподіл інвестиційних ресурсів, статичні та стохастичні моделі керування запасами, моделі масового обслуговування, сітьове планування, задачу про комівояжера, задача Джонсона про два та про три верстати, модель заміни обладнання тривалого користування та модель заміни обладнання на однотипне на протязі обмеженого періоду, задачі та моделі з умовами невизначеності та конфлікту, основні теореми про матричні ігри, моделі та методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.

Таким чином, особлива увага приділяється моделям та методом дослідження операцій, які використовуються в практичній діяльності менеджерів.

В посібнику більша увага приділяється статичним моделям дослідження операцій, які є найбільш корисними при розв'язання проблем керування складними економічними процесами.

Кожна лекція містить приклади відповідних моделей з економічним змістом, методи знаходження оптимальних рішень відповідних оптимізаційних задач та список запитань для самоперевірки знань.

Посібник містить список рекомендованої навчальної літератури, виданої українською та російською мовами.

Для розуміння матеріалу посібника необхідне знання курсу вищої математики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Конспект лекцій може бути рекомендований студентам усіх форм навчання напряму підготовки «менеджмент організацій» при вивченні дисципліни «дослідження операцій».

Лекція 1
Предмет та задачі дисципліни

Потреба в найкращому або хоча б сприйнятливому керуванню складними технологічними та економічними процесами викликала появу наукових методів, які об'єднують під назвою «Дослідження операцій».

Дослідження операцій – напрям в дослідженні та проектуванні систем, що базується на математичному моделюванні процесів та явищ; в більш вузькому сенсі – комплекс засобів та методів призначених для створення математичних моделей реальних явищ та систем, для формального отримання висновків, які дозволяють створювати або змінювати систему заданим чином.

Спочатку дослідження операцій було пов'язане із задачами військового характеру, але вже з 50-х років XX сторіччя воно використовується для розв'язання технічних, техніко-економічних задач, а також задач керування на різних рівнях.

Вибір цілей керування складним об'єктом чи процесом (які відображаються у виборі цільової функції) визначається зовнішніми та внутрішніми факторами, насамперед потребами суб'єкта (колективу, держави, суспільства).

До основних понять дослідження операцій належать такі : фактор, операція, модель операції, розв'язок (рішення), оптимальний розв'язок (рішення), критерій.

Фактор – це умова, рушійна сила деякого процесу, явища, чинник. За типами фактори бувають матеріальні, інформаційні, енергетичні, кадрові, фактори збурення та інші. За ступенем визначеності розрізняють детерміновані, випадкові та невизначені фактори.

Операція – це будь-яка дія (захід, система заходів), яка направлена на досягнення деякої цілі. Учасники операції, які намагаються досягти цілі, називаються оперуючою стороною або особою (суб'єктом), що приймає рішення. Ціль операції максимізувати (мінімізувати) деякий критерій ефективності.

Всі рішення при проведенні операції (в тому числі і оптимальні) приймаються завжди опираючись на інформацію, яку має в своєму розпорядженні суб'єкт, що приймає рішення.

Якщо прийняття рішення відбувається в наперед відомому та незмінному інформаційному стані, то задача називається статичною. В цьому випадку процес прийняття рішення може бути зведеним до єдиного миттєвого акту.

Якщо інформаційні стани при прийнятті рішення змінюють один одного, то задача називається динамічною. В такій задачі часто буває доцільним приймати поетапні, «багатокрокові» рішення або навіть розгорнути прийняття рішення у неперервний у часі процес.

Інформаційні стани (інформаційна забезпеченість) суб'єкта, що приймає рішення, можуть по-різному характеризувати справжній («фізичний») стан. Може виявитися, що один інформаційний стан суб'єкта допускає цілу множину фізичних станів. В цьому випадку задача прийняття рішення називається невизначеною.

Якщо інформаційна множина містить кілька (або нескінченне число) фізичних станів, але при цьому суб'єкт, що приймає рішення, крім їх сукупності знає також апріорні ймовірності кожного з цих фізичних станів, то задача називається стохастичною

Нарешті, якщо інформаційний стан складається з єдино можливого фізичного стану, то задача називається детермінованою.

Проблема критерію ефективності операції відіграє важливу роль в соціально-економічних системах, що пов'язано з їх мінливістю, невизначеністю, розвитком, можливими протиріччями між локальними цілями окремих представників організації (суб'єкта, що приймає рішення) та задачами організації в цілому.

Приведення у відповідність бажаних та реальних цілей часто вимагає істотних організаційних перебудов і виводить за межі обсягу питань, які розглядаються в рамках дослідження операцій. Це в свою чергу вимагає проектувати операцію ніби-то заново, використовуючи весь арсенал методів вдосконалення організацій, включаючи системний аналіз, методи системотехніки, інженерної психології, групової динаміки та інші.

На практиці часто застосовують таку раціоналізацію операцій, яка виражається не в зміні критерію або структури організації, а в зміні інтенсивності та характеру використання тих чи інших ресурсів, засобів, в зміні послідовності умов виконуваних дій, робіт.

Фактори, які є в розпорядженні особи, що приймає рішення, для досягнення цілі, називаються контрольованими (керованими) факторами (змінними). Множину контрольованих факторів $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ будемо позначати M_0.

Фактори, які впливають на хід операції, але не контролюються, називаються неконтрольованими (некерованими). Неконтрольовані фактори поділяють за інформованістю про них на невизначені та випадкові.

Про невизначені фактори $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ досліднику операції відома лише множина їх значень M_1, тобто відомо, що $y \in M_1$.

Про випадкові фактори $z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)$ вважаємо, що досліднику відома множина значень Z випадкового вектора z і закон розподілу (p,ω) (тобто функція розподілу або ймовірності елементарних подій для дискретного випадку) цього випадкового вектора або лише відомо, що $(p,\omega)\in P$, де P – деяка множина законів розподілу.

Критерій ефективності є деяка функція $F(x,y,z)$ або, якщо виконано усереднення за випадковостями , $W(x,y)=\int\limits_Z F(x,y,z)\,d\omega(z)$.

Інформація, яка є в наявності в сторони, що проводить операцію, називається інформаційною гіпотезою. Стратегіями оперуючої сторони називають дозволені інформаційною гіпотезою способи дій.

Якщо оперуючи сторона не має додаткової інформації про неконтрольовані фактори, то її стратегіями є самі контрольовані фактори із M_0. Стратегії із M_0 називаються стратегіями-константами.

В загальному випадку стратегіями оперуючої сторони є всеможливі відображення $\tilde{x}:M_1\times Z\to M_0$. Множину таких відображень будемо позначати $\tilde{M}$. Критерій ефективності, визначений на множині $M_0\times M_1\times Z$, природним чином до означається на множині :

$$F\left(\tilde{x}, y, z\right) = F\left(\tilde{x}\left(y, z\right), y, z\right), \quad \tilde{x} \in M .$$

Якщо в операції всі неконтрольовані фактори є випадковими і допускається усереднення критерію, то оцінкою ефективності стратегії називають величину

$$\overline{F}\left(\tilde{x}, \omega\right) = \int_Z F\left(\tilde{x}, z\right) d\omega\left(z\right).$$

Якщо в операції відсутні випадкові фактори або критерій вже був усереднений за випадковостями, то оцінкою ефективності стратегії $\tilde{x}$ називається величина

$$\underline{W}\left(\tilde{x}\right) = \inf_{y \in M_1} W\left(\tilde{x}, y\right).$$

Часто $\underline{W}\left(\tilde{x}\right) = \min\limits_{y \in M_1} W\left(\tilde{x}, y\right)$ (наприклад, якщо множина M_1 скінчена).

Приклад. Продавець газет купує k газет для продажі і за кожну продану газету отримує прибуток, що дорівнює a гривень. Непродані газети він повертає, втрачаючи при цьому b гривень. Попит, тобто кількість людей, які купують газету, є неконтрольованим фактором, який приймає значення на відрізку $[\alpha, \beta]$, де α, β – відомі натуральні числа. Ціль продавця газет – так вибрати кількість газет для продажі, щоб по можливості збільшити прибуток від продажу.

Складемо модель операції та знайдемо оцінку ефективності довільної стратегії.

За умовою задачі єдиним контрольованим фактором є $k \in M_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Неконтрольованим фактором є $z \in \{\alpha, \alpha+1, \cdots, \beta\}$. Продавець продасть всі газети, якщо $z \le k$, або поверне $k - z$ газет, якщо $z \le k$. Виходячи з цього, запишемо критерій ефективності

$$W\left(k, z\right) = a \min\{k, z\} + b \min\{0, z - k\}.$$

Критерій ефективності довільної стратегії має вигляд

$$W\left(k\right) = \begin{cases} ak, & \textit{якщо} \quad k \le \alpha, \\ a\alpha + b\left(\alpha - k\right), & \textit{якщо} \quad k > \alpha \end{cases}.$$

У випадку, коли відомий закон розподілу попиту (числа покупців) $\left(p, \omega\right) = \left(p_\alpha, p_{\alpha+1}, \cdots, p_\beta\right)$, продавцю можна рекомендувати купувати кількість газет, яка дорівнює середньому значенню кількості покупців, тобто $k_c = \sum\limits_{z=\alpha}^{\beta} z p_z$ газети.

Якщо про закон розподілу кількості покупців відомо лише, що він має математичне сподівання $\bar{z}$ та дисперсію d, то критерій усередненої ефективності має вигляд

$$\overline{W}\left(k, \omega\right) = \begin{cases} \sum\limits_{z=\alpha}^{k-1} \left(\left(a+b\right)z - kb\right) p_z + \sum\limits_{z=k}^{\beta} a\, k\, p_z, & \alpha < k < \beta, \\ \bar{z}\left(a+b\right) - bk, & k \ge \beta, \\ ak, & k \le \alpha \end{cases}.$$

Найбільш вивченими класами задач дослідження операцій є такі: розподіл ресурсів, керування запасами, заміна обладнання, масове обслуговування, вибір маршруту, змагання, пошук інформації.

В задачах розподілу треба знайти такий варіант розподілу ресурсів, при якому або мінімізуються витрати або максимізується одержуваний в результаті прибуток.

Задача керування запасами – це визначення оптимальних розмірів запасів, щоб загальні витрати на їх зберігання були мінімальними (витрати на зберігання – функція величини запасів та часу зберігання, нестача карається штрафом).

Задача заміни обладнання полягає в необхідності вибрати такі терміни заміни, при яких мінімізуються сумарні витрати на виробництво продукції при заданому обсязі.

Задача масового обслуговування – це мінімізація витрат, пов'язаних з очікуванням обслуговування та втрат від простою засобів обслуговування. Більшість задач масового обслуговування ще не набули вигляду оптимізаційних задач.

Задача вибору маршруту полягає в виборі такого шляху, що пов'язує декілька вузлів, при якому досягається максимум або мінімум деякого критерію ефективності.

Задача змагання виникає тоді, коли дві особи (команди, компанії, держави) намагаються досягти деякі свої цілі, використовуючи такі стратегії, при яких зростання шансів одного учасника змагання приводить до зменшення шансів іншого. Пошук розв'язку в конфліктних ситуаціях виконується методами теорії ігор.

Задача пошуку інформації полягає у визначенні кількості, складу, засобів отримання та обробки інформації за умови однозначності розв'язку. Мета задачі – мінімізація витрат пошуку інформації та вартості помилки. Математична модель – це сукупність співвідношень (формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів), що визначають характеристики станів системи (а через них і інтегровану вихідну інформацію) залежно від вхідної інформації, початкових умов та параметрів системи.

Основні задачі дослідження операцій показані на блок-схемі.

Характерною особливістю оптимізаційних математичних моделей є наявність однієї або кількох цільових функцій. Модель з однією цільовою функцією називається монокритеріальною, а з кількома – багатокритеріальною.

В загальному випадку монокритеріальна оптимізаційна математична модель має вигляд

$$z = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots y_{m,} c_1, c_2, \cdots c_k\right) \to \max\left(\min\right) , \qquad (1.1)$$

$$g_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots y_{m,} c_1, c_2, \cdots c_k\right) \le 0 \;\left(\ge 0, = 0\right)\; i = \overline{1, s} , \qquad (1.2)$$

де $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – керовані фактори (змінні), $y_1, y_{2,} \cdots, y_m$ – некеровані фактори (змінні), $c_1, c_2, \cdots, c_k$ – сталі параметри системи.

Розв'язання задачі (1.1)–(1.2) – це знаходження значень керованих змінних $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$, які задовольняють умовам зв'язку (обмеженням) $g_i, i = \overline{1, s}$ і при яких цільова функція набуває свого максимального (мінімального) значення.

В економічних задачах найчастіше ставиться питання про максимізацію прибутку, мінімізацію витрат, пов'язаних із експлуатацією системи або мінімізацію часу виконання виробничого проекту.

Досить вивченими є математичні моделі багатокритеріальних задач вигляду

$$\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\right) \to \left(\max(\min), \max(\min), \cdots, \max(\min)\right) , \qquad (1.3)$$

$$x \in D \subseteq R^n . \qquad (1.4)$$

Створення оптимізаційних монокритеріальних (багатокритеріальних) математичних моделей керованих систем передбачає знаходження цільової функції, відшукання обмежень, що визначають границі допустимих значень параметрів системи (об'єкта) і подання результатів дослідження у вигляді задачі (1.1)–(1.2) (або відповідно задачі (1.3)-(1.4)).

При створенні моделей потрібно відшукати в системі (об'єкті) ієрархію, структуризацію та обернені зв'язки.

Основне завдання дослідження операцій – запис операції у вигляді задачі (1.1)–(1.2) або у вигляді аналогічних, більш складних в математичному сенсі задач.

При оцінці результатів застосування математики для розв'язання економічних задач в сучасному не достатньо структурованому та недостатньо збалансовану світі, проявляється деякий скептицизм. Згадаємо визначення Т.Л. Сааті (одного з класиків дослідження операцій) : «Дослідження операцій – мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які даються ще гірші відповіді іншими методами».

Запитання для самоперевірки знань

1. Що стимулювало розвиток теорії дослідження операцій ?
2. В чому полягає суть поняття операції ? Наведіть приклади операцій. Навіщо потрібні математичні моделі операцій ?
3. Що називають розв'язком, оптимальним розв'язком, критерієм ефективності операції ?
4. Назвіть основні класи задач теорії дослідження операцій.
5. Що найчастіше вибирають за критерій ефективності в монокритеріальних оптимізаційних задачах ?
6. Яка принципова різниця між статичними та динамічними моделями дослідження операцій ?

Лекція 2
Методи економіко-математичного моделювання

Модель – це умовний образ якого-небудь об'єкта або процесу за допомогою деякого понятійного апарату.

Економіко-математична модель – математичний опис досліджуваного процесу або об'єкта. Найважливішими параметрами економіко-математичної моделі є технологічні параметри та параметри, які характеризують сторону, що проводить операцію, та інших учасників операції.

Імітаційна модель – це результат аналізу інформації і проведення на комп'ютері модельних експериментів, які відображають уявлення дослідника про можливе функціонування об'єкта дослідження.

Економіко-математичні моделі розглядаються для теоретичних потреб економічного аналізу та для практичних потреб планування, керування та прогнозування. У зв'язку з цим їх класифікують за такими типами: моделі планування (зокрема, моделі оптимального планування) ; моделі керування ; моделі прогнозування ; моделі розвитку (росту) ; моделі рівноваги.

Змістовна економіко-математична модель об'єднує такі основні процеси: виробництво, споживання, планування, фінанси. Але в більшості існуючих моделей перевага віддається якомусь одному процесу (наприклад, процесу планування), в той час як інші подаються в спрощеному вигляді. Використовуються і багатокритеріальні економіко-математичні моделі, в яких однакова увага приділяється кільком процесам. Крім того, одночасно з економіко-математичною моделлю може використовуватись більш гнучка, але дорожча, імітаційна модель. Різниця між математичною та імітаційною моделями в тому, що в останній відношення між «входом» та «виходом» може бути явно не задано.

Залежно від того, якому процесу (процесам) приділяється увага при побудові та аналізі економіко-математичної моделі, використовують відповідний математичний апарат.

Задачі планування вирішують балансову ув'язку виробництва та споживання (виробничого та невиробничого) різних складових частин, що математично виражається у вигляді рівнянь та нерівностей. Тому моделі планування опираються на теорію систем алгебраїчних (переважно, лінійних) рівнянь та нерівностей.

Моделі оптимального планування являють собою екстремальні задачі з обмеженнями. Як правило, це задачі лінійного програмування або їх узагальнення.

Моделі керування базуються на різного роду екстремальних задачах, зокрема, задачах оптимального керування в розумінні Понтрягіна.

Моделі розвитку (росту) розглядають специфічні екстремальні задачі. Вони базуються на тезі про конструктивний характер економіки, про керованість економічними процесами.

В моделях прогнозування використовують апарат кореляційного та регресійного аналізу, ймовірнісні процеси.

Моделі рівноваги базуються на теорії ігор.

При побудові економіко-математичної моделі важливо не тільки знаходити взаємодії та взаємозв'язки, а й виділити серед виявлених залежностей ті, які розкривають властивості цілісності системи і є істотними для розв'язання задачі, заради якої була створена економічна система. Отже, ставиться питання про межі системи. Якщо межі, враховані в моделі, виявляться досить вузькими, то не можна буде досягти необхідних для досягнення мети спостерігача результатів. Якщо ж включити в модель багато неістотних зв'язків, то можуть виникнути технічні труднощі при аналізі одержаної інформації через збільшення обсягу інформації для опрацювання та осмислення. Крім того, неадекватне формування моделі часто виводить на хибний шлях по дослідженню економічної системи.

Методи «чорного» та «білого ящика»

«Чорний ящик» – це система, в якій спостерігачу досяжні лише вхідні та вихідні сигнали, а внутрішня будова системи і процеси, які там відбуваються, невідомі.

Ряд важливих висновків можна зробити спостерігаючи лише вихідні сигнали в залежності від вхідних. Такий підхід, зокрема, надає можливість вивчати системи, будова яких або невідома, або занадто складна для того, щоб можна було за властивостями складових частин та структурі зв'язків між ними робити висновки про поведінку системи.

Метод, який використовує «ч. я.», широко застосовується для задач моделювання керованих систем в тих випадках, коли дослідника цікавить поведінка системи, а не її будова.

«Білий ящик» – це об'єкт (система), внутрішня структура якого нам практично повністю відома, наприклад, створений нами прилад або комп'ютерна програма. Метод «білого ящика» – тестування і налагодження програмного забезпечення (системи), являє собою набір тестів. Метод «білого ящика» застосовується для знаходження конструктивних недоліків об'єкта, для перевірки логіки програми. Аналіз методом «білого ящика» дозволяє швидко знайти вразливі місця. Досліднику необхідно об'єкт «чорний ящик» трансформувати в об'єкт «білий ящик», тобто досягти його «інформаційної прозорості».

В об'єктно-орієнтованому програмуванні, як правило, кожному класу об'єктів відповідає один модульний тест. При застосуванні методу «білого ящика» відбувається аналіз функціональності, продуктивності та безпеки системи, тестується надійність, перевіряється зручність користування системою. Застосовується, як правило, часткове тестування на відміну від повного, яке передбачає перевірку всіх можливих віток. Найбільш ефективні методи розробки програмного забезпечення використовують комбіновані методи «білого ящика » та «чорного ящика».

Практичне використання двоїстих оцінок в аналізі економічних задач

Розглянемо один цикл робіт підприємства із технологічною матрицею $A=\left(a_{ij}\right)$, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$ (a_{ij} – витрати i-го ресурсу на одиницю j–ї продукції), вектором питомих прибутків c та запасів ресурсів b, тобто задачу :

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \quad \to \max \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} . \qquad (2.2)$$

Припустимо, що власнику підприємства покупець запропонував продати частину ресурсів. В цій ситуації відбувається торг навколо цін на ресурси (або, що точніше, навколо оцінок ресурсів).

Позначимо оцінку i-го ресурсу через y_i. Покупець, очевидно, хоче заплатити якомога менше, тобто $w=y_1b_1+y_2b_2+\cdots+y_mb_m \quad \to \min$. Але у власника підприємства свої аргументи. Оскільки за одиницю j-ї продукції він отримає c_j прибутку, витративши $a_{1j}, a_{2j,\cdots,}\ a_{mj}$ відповідних ресурсів, то йому резонно оцінити ресурси так, що $y_1a_{1j}+y_2a_{2j}+\cdots+y_m\,a_{mj}\ge c_j$. Враховуючи побажання покупця та аргументи власника, приходимо до нової задачі лінійного програмування :

$$w=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m \quad \to \min \qquad (2.3)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \ge c_m \end{cases} . \qquad (2.4)$$

Ця задача називається двоїстою до задачі (2.1)-(2.2), а разом задачі (2.1))-(2.2) та (2.3)-(2.4) утворюють задачу торгу.

В теорії двоїстості розрізняють чотири пари задач (наведемо їх в матричній формі запису).

	Пряма задача	Двоїста задача
	Симетричні пари	
1.	$z(x)=cx \quad \to \max$, $Ax\le b$, $x\ge\theta$.	$w(y)=yb \quad \to \min$, $yA\ge c$, $y\ge\theta$.
2.	$z(x)=cx \quad \to \min$, $Ax\ge b$, $x\ge\theta$.	$w(y)=yb \quad \to \max$, $yA\le c$, $y\ge\theta$.

Несиметричні пари

$$3.\quad \begin{aligned} &z(x)=cx \to \max, \\ &Ax=b, \\ &x\ge\theta . \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &w(y)=yb \to \min, \\ &yA\ge c, \\ &y\in(-\infty,\infty) . \end{aligned}$$

$$4.\quad \begin{aligned} &z(x)=cx \to \min, \\ &Ax=b, \\ &x\ge\theta . \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &w(y)=yb \to \max, \\ &yA\le c, \\ &y\in(-\infty,\infty) . \end{aligned}$$

Тут $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Нерівність $x\ge\theta$ треба розуміти як по координатну, θ – вектор, всі координати якого дорівнюють нулю.

Розглянемо пару симетричних задач

$$\begin{aligned} &z(x)=cx \to \max, \\ &Ax\le b, \\ &x\ge\theta \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} &w(y)=yb \to \min, \\ &yA\ge c, \\ &y\ge\theta . \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Доведемо, що для будь-яких допустимих розв'язків x вихідної та y двоїстої задачі виконується нерівність

$$z(x)\le w(y) \qquad (2.6)$$

Справді, оскільки змінні в обох задачах невід'ємні, то маємо : $z(x)=cx\le yA\cdot x=y\cdot(Ax)\le yb=w(y)$, що й треба було довести.

Нерівність (2.6) називається основною нерівністю теорії двоїстості. Зауважимо, що знак рівності досягається в нерівності (2.6) тоді і тільки тоді, коли плани x та y є одночасно оптимальними планами відповідних задач.

Із нерівності (2.6) випливає, що якщо допустима множина однієї із задач пари порожня, то цільова функція другої задачі обмежена в напрямку екстремуму на своїй допустимій області.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то і двоїста до неї задача має оптимальний розв'язок; причому значення цільових функцій задач на своїх оптимальних розв'язках співпадають.

Якщо одна із пари двоїстих задач не має розв'язку внаслідок необмеженості цільової функції, то друга не має розв'язку внаслідок несумісності системи обмежень.

Доповнення до теореми. Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок x^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний розв'язок двоїстої задачі y^* визначається із співвідношення $y^*=c_{баз}\cdot D^{-1}$, де $c_{баз}$ – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при тих змінних, які є базисними в оптимальному розв'язку; D^{-1} – матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального розв'язку, компоненти якої взято з початкового допустимого розв'язку задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася матриця з нулів та одиниць.

Друга теорема двоїстості. Для того, щоб допустимі розв'язки x^* та $y*$ прямої та двоїстої задач були оптимальними необхідно і достатньо виконання кожної із трьох груп співвідношень (x – вектор стовпчик, y – вектор рядок) :

а) $y^*\left(B - Ax^*\right) = 0$ та $\left(y^*A - c\right)x^* = 0$;

б) $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^*\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right) = 0$ та $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right)x_j^* = 0$;

в) для будь-якого $i = 1,2,\cdots,m$, якщо $y_i^* > 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i$; для будь-якого $j = 1,2,\cdots,n$, якщо $x_j^* > 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j$.

Доповнення до теореми. Для будь-якої симплекс-ітерації прямої або двоїстої задачі коефіцієнт при j-й змінній в рядку для Δ_j однієї задачі дорівнює різниці між лівою та правою частиною j-ї нерівності другої задачі.

Третя теорема двоїстості. Розглянемо задачу оптимального планування

$$z\left(x\right) = cx \quad \to \max ,$$
$$Ax \le b ,$$
$$x \ge \theta \qquad .$$

при заданому векторі запасу ресурсів. Назвемо цю задачу *B*-задачею. Припустимо, що приданому конкретному значенні b^0 вектора запасів ресурсів b компоненти оптимального плану $x^*\left(b^0\right) = \left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)$ строго додатні. Позначимо через $y^*\left(b^0\right) = \left(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*\right)$ оптимальний розв'язок задачі, двоїстої до $B^0 -$ задачі . Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що якщо $\left| b - b^0 \right| < \varepsilon$, то :

а) асортимент продукції, яка випускається, в оптимальному плані *B*-задачі залишився таким, як і раніше (але, цілком можливо, що кількісно змінився);

б) крім того, оптимальний розв'язок задачі, двоїстої до *B*-задачі, залишився незмінним, тобто, тобто $y^*\left(b\right) = y^*\left(b^0\right)$;

в) Крім того, максимальний прибуток в *B*-задачі виражається формулою $z^*\left(b\right) = z^*\left(b^0\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*\left(b_i - b_i^0\right)$, де $z^*\left(b^0\right)$ – максимальний прибуток в $B^0 -$ задачі .

Економічний зміст теорем двоїстості. Оптимальні значення змінних двоїстої задачі називаються двоїстими оцінками (цінами) ресурсів. Крім того, інколи їх називають тіньовими цінами або симплексними мультиплікаторами.

Перша теорема двоїстості стверджує, що при оптимальному плані зиск із ресурсів рівно такий, який в них міститься.

З'ясуємо економічний зміст другої теореми. Назвемо j-у технологію невигідною (нерентабельною), якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j$. Сенс зрозумілий, оскільки прибуток c_j з одиниці продукції, зробленої за j-ю технологією, менший за оцінку $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$ витрачених ресурсів. Отже, 3-а група співвідношень стверджує, що в оптимальному плані жодна невигідна технологія не використовується.

Ресурс з додатною двоїстою оцінкою називається вузьким місцем виробництва. Співвідношення «для будь-якого $i = 1, 2, \cdots n$ …» 3-ї групи стверджують, що ресурс, який є вузьким місцем виробництва, обов'язково повністю використовується в оптимальному плані.

Третя теорема двоїстості стверджує, що додаткове залучення у виробництво одиниці i-го ресурсу збільшує максимальний прибуток на величину його двоїстої оцінки.

Зрозуміло, що зміна асортименту продукції, яка виробляється, є болісною для виробництва – треба витрачати кошти на рекламу нової продукції; пояснювати покупцями тієї продукції, випуск якої припиняється; необхідно перебудувати виробництво – частину верстатів законсервувати, а іншу переобладнати, здійснити перепідготовку працівників і т.п. Але третя теорема двоїстості стверджує, що у певних умовах, при зміні величини запасів, асортимент продукції не зміниться, відбудуться лише деякі кількісні зміни.

Все сказане про оцінки ресурсів стосується використання ресурсів в одному циклі виробництва. Це є елементом умовності, абстрактності, що не зовсім відбиває реальність.

Приклад. Розглянемо задачу розподілу ресурсів :

$$z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 \quad \to \max ,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 45 \end{cases} .$$

Розв'язання цієї задачі виконаємо симплекс-методом.
Для знаходження початкового опорного плану виконаємо відповідні перетворення матриці системи обмежень :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 45 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 15 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{3} & 30 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 5 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 10 \end{array}\right).$$

Тепер можемо записати симплекс-таблицю з початковим опорним планом $x_0 = (5;0;0;10)$ та вектором ресурсів $b = (5;10)$.

Базові змінні	C_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	θ_2
x_1	2	5	1	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	0	15
x_4	4	10	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	30
Δ_j		50	0	–2	–1	0	

Оскільки серед Δ_j є від'ємні, то $x_0=(5;0;0;10)$ не є оптимальним планом, то для просування в напрямку максимуму цільової функції згідно з алгоритмом симплекс-методу виконаємо перетворення симплекс-таблиці. Маємо :

Базові змінні	C_b	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
x_2	4	15	3	1	2	0
x_4	4	5	–1	0	–1	1
Δ_j		80	6	0	3	0

.

З одержаною таблиці видно, що $x_1=x^*=(0;15;0;5)$ є оптимальним планом, а відповідне йому максимальне значення прибутку дорівнює $z^*=z\left(x^*\right)=80$.

З останньої симплекс-таблиці знаходимо матрицю $D^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, а з першої симплекс-таблиці беремо вектор $b=A_0=(5;10)$.

Оптимальний план двоїстої задачі знаходимо за формулою $y^*=c_b\cdot D^{-1}$. Отже, $y^*=(4;4)\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=(8;4)$. Звідси можна зробити висновок, що залучення у виробництво додаткової одиниці першого (другого) ресурсу збільшує прибуток на 8 (на 4) одиниць.

Базові компоненти оптимального плану прямої задачі можна завжди обчислити за формулою $x^*=D^{-1}b$. В нашому випадку справді $x^*=\left(x_2^*,x_4^*\right)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ 5\end{pmatrix}$.

Формула $x^*=D^{-1}b$ використовується для аналізу стійкості оптимального плану відносно зміни компонент вектора ресурсів. Нехай перший ресурс був змінений на Δb_1. Тоді новий оптимальний план повинен бути допустимим, тобто має виконуватися нерівність $x_н^*=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5+\Delta b_1\\ 10\end{pmatrix}\geq 0$. Звідси $5+\Delta b_1\geq 0$, $5-\Delta b_1\geq 0$ або $-5\leq\Delta b_1\leq 5$, тобто $0\leq b_1\leq 10$. Це означає що при варіації першого ресурсу від 0 до 10 оптимальний план буде допустимим і можна збільшити прибуток збільшенням використання першого ресурсу. На практиці, звичайно, цього не може статися через нестачу ресурсу та обмежений попит на продукцію.

Запитання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення понять : модель, економіко-математична модель, моделювання.
2. Які є методи економіко-математичного моделювання ?
3. Наведіть приклади відомих лінійних економіко-математичних моделей.
4. Як використовуються двоїсті оцінки в аналізі економічних проблем ?

Лекція 3
Задача про призначення

Задача про призначення. Нехай керівництву підприємства необхідно призначити на виконання n робіт фахівців таким чином, щоб вартість виконання всіх робіт була мінімальною. При цьому відомо, що i-й фахівець бажає отримати за виконання j-ї роботи оплату, що дорівнює c_{ij} ($i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,n$). Кількість працівників збігається з кількістю посад. Крім того, вважається, що кожен працівник може бути призначений лише на виконання однієї роботи і на виконання кожної роботи має бути призначений лише один працівник.

Для побудови математичної моделі введемо змінні x_{ij}, $i,j=1,2,\cdots,n$:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i-\text{й працівник призначається на виконання } j-\text{ї роботи};\\ 0, & \text{якщо } i-\text{й працівник не призначається на виконання } j-\text{ї роботи}.\end{cases}$$

Неважко упевнитися, що дана задача є частинним випадком транспортної задачі і відповідна їй математична модель має вигляд :

$$T(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\quad\to\min\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n\quad ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n\quad .$$

Особливості задачі про призначення дозволяють розв'язувати її за допомогою більш простих методів, ніж методи розв'язання транспортної задачі. Справді, відповідно до постановки задачі необхідно з матриці

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$$

вибрати n елементів по одному з кожного рядка (працівники) та кожного стовпчика (роботи) так, щоб сума цих елементів (вартість виконання всіх робіт) була мінімальною.

Задачу про призначення можна звести до вибору n нульових елементів з деякої матриці з невід'ємними елементами, яка має нулі в кожному рядку та кожному стовпчику.

Матриці $C=\left[c_{ij}\right], i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ та $D=\left[d_{ij}\right], i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ називаються еквівалентними, якщо $d_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, u_i, v_j - деякі числа.

Оптимальні розв'язки задач з еквівалентними матрицями співпадають.

Задачу про призначення можна розв'язувати так званим **угорським методом**, який складається з підготовчого етапу та не більше, ніж $n-2$ ітерацій.

Підготовчий етап

1. У кожному рядку матриці C знаходимо мінімальний елемент та віднімаємо його від елементів відповідного рядка. В результаті отримаємо матрицю C_1, в кожному рядку якої є хоча б один нуль.

2. У кожному стовпчику матриці C_1 знаходимо мінімальний елемент та віднімаємо його від елементів відповідного стовпчика. В результаті отримаємо матрицю C_2 , в кожному рядку якої є хоча б один нуль.

Основний етап

1. Відмічаємо знаком «$^{\otimes}$» нулі в стовпчиках, починаючи з першого, так, щоб в кожному рядку був тільки один такий знак. Якщо кількість нулів із знаком «$^{\otimes}$» дорівнює n, то знайдено оптимальний розв'язок : місця нулів із знаком «$^{\otimes}$» відповідають координатам оптимального розв'язку $x_{ij}^* = 1$, а всі інші координати $x_{ij}^* = 0$.

Якщо кількість нулів із знаком «$^{\otimes}$» менше n, то по позначаємо знаком «+» стовпчики матриці, в яких є $0^{\otimes}$ і вважаємо ці стовпчики зайнятими. У процесі розв'язування задачі будуть з'являтися незайняті рядки. Елементи матриці, які стоять на перехресті незайнятих стовпчиків та рядків, будемо називати незайнятими., решту елементів матриці зайнятими.

2. Переглядаємо рядки матриці, починаючи з першого, зліва направо. Якщо незайнятих нулів немає, то переходимо до пункту 4.

Якщо незайнятий нуль є , то відмічаємо його знаком «$^{\square}$» і якщо в цьому рядку немає $0^{\otimes}$, то переходимо до пункту 3. Якщо ж в цьому рядку є $0^{\otimes}$, то знімаємо позначку «+» зі стовпчика, що містить $0^{\otimes}$ (тобто виводимо стовпець із списку зайнятих; на практиці - обведенням знаку «+»), і позначаємо знаком «+» рядок з елементом $0^{\square}$. Після цього повертаємося на початок пункту 2, поки не переглянемо всі рядки матриці.

3. Утворюємо ланцюг, рухаючись по вертикалях та горизонталях : від елемента $0^{\square}$ по стовпчику до $0^{\otimes}$, від нього по рядку до $0^{\square}$ і т. д., доки це можливо. Отриманий ланцюг може складатися навіть з одного елемента $0^{\square}$. Далі знімає знаки «$^{\otimes}$» і змінюємо знак «$^{\square}$» на знак «$^{\otimes}$» у нулів з ланцюга. В результаті число нулів зі знаком «$^{\otimes}$» збільшиться на одиницю. Після цього повертаємося до пункту 1, знявши всі позначки «$^{\square}$» з матриці, залишивши тільки позначки $0^{\otimes}$.

4. Знаходимо мінімальний елемент матриці серед незайнятих. Віднімемо цей елемент від всіх незайнятих рядків та додамо до всіх зайнятих стовпчиків. При цьому позначки нулів та всіх зайнятих стовпчиків та рядків залишаємо без змін. Отримавши нові незайняті нулі, повертаємося до пункту 2.

Якщо в задачі цільова функція максимізується, то на першому кроці підготовчого етапу потрібно вибрати максимальний елемент з кожного рядка матриці C і відняти від нього елементи відповідного рядка, тобто виконати перетворення матриці $c_{ij} \to \max_j c_{ij} - c_{ij}$, а далі діяти за тими ж самими правилами.

Сформульований алгоритм угорського методу використовується для програмної реалізації. Якщо задача розв’язується вручну, то етапи алгоритму можна виконувати простіше.

Підготовчий етап. Всі операції такі ж як і в розглянутому раніше варіанті алгоритму.

Основний етап. Очевидно, що розв’язок задачі про призначення є допустимим, якщо з кожного рядка та кожного стовпчика вибрано тільки один елемент. Оптимальному розв’язку відповідає допустимий набір з одних лише нулів.

1. Знаходимо рядок матриці D, який містить тільки один нульовий елемент і позначаємо цей елемент знаком «$\otimes$». Якщо такі рядки відсутні, а є рядки з більшою кількістю нульових елементів, то вибираємо будь-який нульовий елемент рядка і також позначаємо його знаком «$\otimes$». Переходимо до пункту 2.

2. Якщо у рядку та стовпчику, які містять позначений нуль, є інші нульові елементи, то їх треба закреслити. Повертаємося до пункту 1 і повторюємо операції пунктів 1 та 2 доти, поки це можливо.

Якщо кількість позначених подібним чином елементів дорівнює n , то знайдено оптимальний розв’язок задачі. Якщо ця кількість менша за n, то переходимо до пункту3.

3. Проводимо мінімальне число горизонтальних та вертикальних ліній через рядки та стовпчики так, щоб всі нульові елементи стали викресленими.

4. Знайти мінімальний елемент серед не викреслених.

5. Відняти цей елемент від усіх невикреслених елементів матриці та додати до всіх елементів матриці, які лежать на перехресті прямих. При цьому всі елементи матриці через які проходить одна пряма залишаться без змін.

Далі повертаємося до пункту 1.

Приклади

1. Розглянемо задачу про призначення, в якій цільова функція мінімізується, а технологічна матриця

$$T=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

причому t_{ij} – швидкість виконання j-ї роботи i-м працівником в од. часу.

Виконаємо підготовчий етап розв’язання цієї задачі угорським методом. Маємо :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі згідно з основною версією алгоритму відмітимо знаком «$\otimes$» нулі та позначимо зайняті стовпці знаком «+» і після цього відмітимо всі незайняті нулі знаком «$\square$», знімаючи позначення «+» із стовпців і позначаючи таким знаком відповідні рядки доти, поки це можливо. Дістанемо :

$$\begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0^{\otimes} & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0^{\otimes} \\ 0 & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ + & + & & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0^{\square} & 0 & 1 & + \\ 1 & 1 & 1 & 0^{\otimes} & 0 & \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0^{\otimes} & \\ 0 & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 & \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & \\ \boxed{+} & + & & + & + & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0^{\square} & 0 & 1 & + \\ 1 & 1 & 1 & 0^{\otimes} & 0 & \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0^{\otimes} & \\ 0^{\square} & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 & + \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & \\ \boxed{+} & \boxed{+} & & + & + & \end{pmatrix}.$$

В одержаній матриці серед незайнятих елементів, які стоять на перехресті 1, 2, 3-го стовпців та 2, 3 і 5-го рядків немає незайнятих нулів. Тому серед незайнятих елементів знаходимо мінімальний

$$\min\{t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{51}, t_{52}, t_{53}\} = \min\{1, 1, 1, 4, 4, 4, 2, 2, 3\} = 1.$$

Віднімемо це число від усіх незайнятих рядків та додамо до всіх незайнятих стовпців. В результаті дістанемо матрицю, яка містить незайняті нулі і продовжимо алгоритм розв'язання, повернувшись до пункту 2. Дістанемо

$$\begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0^{\square} & 0 & 1 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0^{\otimes} & 0 & \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0^{\otimes} & \\ 0^{\square} & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 & + \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & \\ & & & + & + & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0^{\square} & 0 & 1 & + \\ 0 & 0 & 0^{\square} & 0^{\otimes} & 0 & + \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0^{\otimes} & \\ 0^{\square} & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 & + \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & \\ & & & \boxed{+} & + & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0^{\square} & 0 & 1 & + \\ 0 & 0 & 0^{\square} & 0^{\otimes} & 0 & + \\ 3 & 3 & 3 & 0^{\square} & 0^{\otimes} & + \\ 0^{\square} & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 & + \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & \\ & & & \boxed{+} & \boxed{+} & \end{pmatrix}.$$

В одержаній матриці залишився один незайнятий нуль a_{54}, причому в 5-му рядку, де знаходиться цей елемент, немає $0^{\otimes}$. Тому відмічаємо a_{54} знаком «$\square$» і, починаючи з цього елемента, утворюємо ланцюг $a_{54} \to a_{24} \to a_{23}$. Далі знімає знак «$\otimes$» і змінюємо знак «$\square$» на «$\otimes$» в нулів з ланцюга. Знімаємо всі позначки в матриці, крім «$\otimes$», дістаємо

$$\begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0^{\otimes} & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0^{\otimes} \\ 0 & 0^{\otimes} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0^{\otimes} & 1 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, число відмічених нулів дорівнює розмірності матриці і таким чином знайдено оптимальний розв'язок задачі :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мінімальний сумарний час виконання сукупності робіт дорівнює

$t = t_{11} + t_{23} + t_{35} + t_{42} + t_{54} = 3+4+2+3+1 = 13$ од. часу.

2. Розглянемо задачу про призначення, в якій цільова функція максимізується, а платіжна матриця

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо підготовчий етап розв’язання цієї задачі угорським методом. Маємо :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі згідно з основною версією алгоритму відмітимо знаком «$\otimes$» нулі та позначимо зайняті стовпці знаком «+» і після цього відмітимо всі незайняті нулі знаком «$\square$», знімаючи позначення «+» із стовпців і позначаючи таким знаком відповідні рядки доти, доки це можливо. Дістанемо :

$$\begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0^{\otimes} & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0^{\otimes} & 0 \\ 4 & 3 & 0^{\otimes} & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ + & + & + & + & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 1 & 4 & 4 & 0 & + \\ 0 & 0^{\otimes} & 1 & 3 & 0^{\square} & + \\ 3 & 0 & 2 & 0^{\otimes} & 0^{\square} & + \\ 4 & 3 & 0^{\otimes} & 0^{\square} & 4 & + \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & \\ \boxed{+} & \boxed{+} & \boxed{+} & \boxed{+} & & \end{pmatrix}.$$

В одержаній матриці залишився один незайнятий нуль p_{52}. Починаючи з нього, утворюємо ланцюг $p_{52} \to p_{22} \to p_{25}$. Знявши знак «$\otimes$» в елемента p_{22} та замінивши знак «$\square$» на «$\otimes$» в елементів p_{52} та p_{25}, дістанемо матрицю з п’ятьма відміченими нулями :

$$\begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0^{\otimes} \\ 3 & 0 & 2 & 0^{\otimes} & 0 \\ 4 & 3 & 0^{\otimes} & 0 & 4 \\ 3 & 0^{\otimes} & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знайдено оптимальний розв’язок задачі :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальне значення цільової функції $p = p_{11} + p_{25} + p_{34} + p_{43} + p_{52} = 22$.

Як бачимо, при розв'язуванні задачі не використовувався пункт 4 основної версії алгоритму.

3. Якщо застосувати спрощений варіант алгоритму угорського методу до розв'язування задачі з пункту 2, то дістанемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 0^{\otimes} & 1 & 4 & 4 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 3 & 0^{\otimes} \\ 3 & \cancel{0} & 2 & 0^{\otimes} & \cancel{0} \\ 4 & 3 & 0^{\otimes} & \cancel{0} & 4 \\ 3 & 0^{\otimes} & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

яка зразу дозволяє знайти оптимальний розв'язок, тобто задача розв'язується ще простіше.

Запитання для самоперевірки знань

1. В чому полягає суть задачі про призначення ?
2. Опишіть алгоритм угорського методу розв'язання задачі про призначення.
3. Як видозмінюється алгоритм угорського методу розв'язання задачі про призначення при максимізації цільової функції ?
4. Опишіть алгоритм спрощеного методу розв'язання задачі про призначення.

Лекція 4
Оптимальне використання сировини та оптимізація виробничої програми

Задача про розкрій промислових матеріалів. Однією з задач оптимального використання сировини та матеріалів є задача про розкрій промислових матеріалів.

Існує N одиниць вихідного матеріалу (моток дроту, листовий прокат, дошки, тканина і т. п.) довжиною d чи площею s.

Необхідно розкроїти цей матеріал на m видів заготівок d_j чи площею s_j, де $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ – номер заготівки. Число заготівок j-го виду входить у план нарізки, що дорівнює b_j.

Розкрій матеріалу може бути зроблений n способами. При цьому відомо, що при розкрої матеріалу i-м способом утвориться a_{ij} заготівок j-го виду.

Для кожного способу розкрою відомий розмір відходів c_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Через x_i позначимо кількість вихідного матеріалу, розрізаного i-м способом.

Може передбачатися комплектація нарізок $b_1 : b_2 : \cdots : b_m = k_1 : k_2 : \cdots : k_m$.

Математична модель цієї задачі формулюється таким чином.

Треба знайти набір цілочислових величин $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, що задовольняють умовам:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to min, \qquad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq N, \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j, \; j = 1, 2, \cdots, n \;. \qquad (4.3)$$

Якщо передбачається комплектація числа заготівок, то добавляється умова (4.4) :

$$\frac{НСК(k_1, k_2, \cdots, k_m)}{k_1} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i = \frac{НСК(k_1, k_2, \cdots, k_m)}{k_2} \sum_{i=1}^{n} a_{i2} x_i = \cdots = \frac{НСК(k_1, k_2, \cdots, k_m)}{k_m} \sum_{i=1}^{n} a_{im} x_i \;.$$

Крім задачі (4.1)-(4.4) можлива постановка задачі із декількома видами вихідного матеріалу. Можна ставити задачу максимізації кількості комплектів, які утворюються внаслідок розкрою. Така задача розглядається далі в конкретній постановці.

Приклад. Для виготовлення виробу меблевої фабрики потрібно 6 планок: 2 планки завдовжки 2,5 м та 4 по 1,5 м кожна. Запас підприємства складає 300 рейок завдовжки 5,5 м та 200 рейок завдовжки 7 м. Визначити як треба різати ці рейки, щоб одержати найбільшу кількість комплектів для виготовлення вказаних виробів.

Наявний на фабриці запас рейок можна різати на планки потрібної довжини різними способами. Розглянемо ці способи.

Для рейки завдовжки 5,5 м :

Спосіб 1. 2 планки завдовжки 2,5 м. Позначимо кількість рейок розрізаних цим способом через x_1.

Спосіб 2. 1 планка завдовжки 2,5 м та 2 планки завдовжки 1,5 м. Позначимо кількість рейок розрізаних цим способом через x_2.

Спосіб 3. 3 планки завдовжки 1,5 м. Позначимо кількість рейок розрізаних цим способом через x_3.

Для рейки завдовжки 7 м :

Спосіб 4. 2 планки завдовжки 2,5 м та 1 планка завдовжки 1,5 м. Позначимо кількість рейок розрізаних цим способом через x_4.

Спосіб 5. 1 планка завдовжки 2,5 м та 3 планки завдовжки 1,5 м. Позначимо кількість рейок розрізаних цим способом через x_5.

Спосіб 6. 4 планки завдовжки 1,5 м.

Оскільки загальна кількість рейок завдовжки 5,5 м дорівнює 300, то

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300 \ .$$

Внаслідок аналогічних міркувань

$$x_4 + x_5 + x_6 = 200 \ .$$

Число планок завдовжки 2,5 м, одержаних внаслідок розрізання рейок, повинно бути вдвічі менше числа планок завдовжки 1,5 м. Звідси випливає рівність

$$2\left(2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5\right) = 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 4x_6 \ .$$

Число одержаних комплектів вдвічі менше кількості планок завдовжки 2,5 м. Таким чином, дістаємо математичну модель даної задачі :

$$z = \frac{1}{2}\left(2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5\right) \to \max , \qquad (4.5)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 300 , \\ x_4 + x_5 + x_6 = 200 , \\ 2\left(2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5\right) = 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 4x_6 , \\ x_i \ge 0 , \ i = 1,2,3,4,5,6 - \textit{цілі числа} \end{cases} \qquad (4.6)$$

Задача (4.5.)-(4.6) розв’язується методами цілочисельного лінійного програмування.

До найвідоміших методів розв’язання задач цілочисельного лінійного програмування належать метод відтинаючих площин Гоморі та метод розгалужень і меж.

Про доцільність використання на практиці розглянутої задачі свідчить такий факт. На одній із паперових фабрик Торонто (Канада) модель була використана для визначення оптимального розрізу рулонів газетного паперу стандартної ширини. Цей метод забезпечив 97,3% корисного витрачання матеріалу, що на 1,5% більше, ніж було раніше, а це становило 15 т паперу на день.

Оптимізація виробничої програми

Припустимо, що на n верстатах промислового підприємства можна виготовляти m видів продукції, причому на жодному з них неможливо виготовляти різні види продукції.

Нехай за t одиниць часу роботи будь-якого j-го верстата на ньому можна виготовити $a_{ij}t$ одиниць продукції i-го виду ($a_{ij} > 0$, причому рівність $a_{ij} = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли на j-му верстаті продукція i-го виду не може бути виготовлена), $i = 1, 2, \cdots, m,$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Вважатимемо, що для кожного $i = 1, 2, \cdots, m$ серед чисел $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ принаймні одне додатне. Це припущення рівносильне тому, що найбільше з чисел $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ додатне, тобто

$$a_i^* = \max_{1 \le j \le n} a_{ij} > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, m \,. \qquad (4.7)$$

Вимога існування додатного елемента в кожному рядку матриці продуктивностей верстатів $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ є формалізацією можливості виготовлення будь-якого із m видів продукції принаймні на одному із наявних верстатів.

Нехай підприємство отримало замовлення на виготовлення продукції у кількостях $b_1, b_2, \cdots, b_m$ одиниць. Це зумовлює проблему визначення для кожного верстата видів та обсягів продукції, яка на ньому виготовлятиметься.

Позначимо через x_{ij} час роботи j-го верстату при виготовленні на ньому i-го виду продукції. Тоді на j-му верстаті буде виготовлено $a_{ij}x_{ij}$ одиниць продукції i-го виду , а на всіх n верстатах буде виготовлено $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$ одиниць.

Отже, умова замовлення на виготовлення продукції у кількостях $b_1, b_2, \cdots, b_m$ одиниць полягає у виконанні для mn невід'ємних значень $\left\{x_{ij}\right\}$ рівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i \,, \; i = 1, 2, \cdots, m \,. \qquad (4.8)$$

Припущення (4.7) є достатньою умовою існування принаймні одного невід'ємного розв'язку $\left\{x_{ij}\right\}$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.8).

Справді за умови виконання (4.7) для кожного $i = 1, 2, \cdots, m$ знайдеться принаймні один верстат $j_i \in \left\{1, 2, \cdots, n\right\}$ на якому можна виготовляти i-й вид продукції ($a_{ij} > 0$). Саме на цьому j_i-му верстаті можна виконати все замовлення з виготовлення b_i одиниць i-го виду продукції. Це потребуватиме $\overline{x_{ij}} = \dfrac{b_i}{a_{ij}}$ одиниць роботи j_i-го верстата. На всіх інших верстатах i-й вид продукції не виготовлятиметься взагалі, тобто $\overline{x_{ik}} = 0$, $k \ne j_i$.

Позначимо через T_j загальний час роботи j-го верстата з виготовлення на ньому різних видів продукції, передбачених у замовленні. Тоді $T_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, а найменша можлива для заданих $\{x_{ij}\}$ тривалість $T(x)$ виконання на підприємстві замовлення дорівнюватиме найбільшому із чисел $T_1, T_2, \cdots, T_n$, тобто

$$T(x) = \max_{1 \le j \le n} T_j \ . \qquad (4.9)$$

Отже, виникає задача пошуку такої виробничої програми, тобто матриці $\{x_{ij}^*\}$, за якої виконання замовлення на виготовлення заданих кількостей продукції потребуватиме найменшого можливого часу. Дамо формальну постановку задачі.

Задача 1. Із множини невід'ємних розв'язків $\{x_{ij}\}$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.4) вибрати такий, що надає найменшого значення функції (4.9).

Проте керівник підприємства може визначити номенклатуру та обсяги виробництва продукції іншим чином.

Якщо, наприклад, ринкова ціна одиниці i-го продукту дорівнює c_i грошовим одиницям, то за умови виготовлення цього продукту на всіх верстатах підприємства у кількості $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$ одиниць буде отримано прибуток $c_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$, а з урахуванням продажу всієї виготовленої продукції загальний прибуток складатиме

$$C(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i a_{ij} x_{ij} \ . \qquad (4.10)$$

Кількість виготовленої продукції, а, отже, і отриманий від її продажу прибуток $C(x)$ залежать від тривалості роботи T_j кожного j-го верстата. Тому, зважаючи на мету отримання найбільшого прибутку від продажу виготовленої продукції, інший спосіб вибору виробничої програми підприємства приводить до розв'язання такої задачі.

Задача 2. За відомих характеристик $\{a_{ij}\}$ наявних на підприємстві верстатів, тривалості $\{T_j\}$ їх роботи та цін $\{c_j\}$ на вироблену продукцію визначити невід'ємні компоненти $\{x_{ij}\}$, при яких за умови виконання рівностей

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = T_j \ , \ j = 1, 2, \cdots, n \qquad (4.11)$$

функція $C(x)$, визначена рівністю (4.10), досягає найбільшого значення.

Можливі також інші способи вибору виробничої програми, в яких враховуються наявні на підприємстві ресурси, необхідні для виготовлення продукції, витрати, пов'язані з додатковою закупкою таких ресурсів, найменші обов'язкові обсяги виготовлення певної продукції, штрафні санкції за невчасне або неповне виконання замовлення тощо.

При прийнятті рішення керівник підприємства має ініціювати проведення досліджень групою фахівців, до складу якої мають входити економісти, математики, юристи, маркетологи.

Запитання для самоперевірки знань

1. Наведіть конкретний приклад задачі про розкрій матеріалів.
2. Сформулюйте задачу про розкрій матеріалів для випадку мінімізації відходів.
3. Якими методами можна розв’язати задачу про розкрій матеріалів?
4. Сформулюйте задачу про вибір виробничої програми з критерієм оптимізації часу виконання замовлення.
5. Сформулюйте задачу про вибір виробничої програми з оптимізацією загального доходу.

Лекція 5
Модель «затрати-випуск» Леонтьєва

Статична модель міжгалузевого балансу Леонтьєва. Припустимо, що економіко-виробничу систему поділено на n «чистих» галузей. Поняття чистої галузі є економічною абстракцією, тобто це умовна галузь, яка об'єднує все виробництво даного виду продукції. Вважатимемо, що кожна галузь випускає лише один вид продукції, тобто різні галузі випускають різну продукцію. В процесі виробництва кожна галузь потребує продукції, виробленої в інших галузях.

Метою міжгалузевого балансу є оцінки обсягів виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі. При цьому кожна галузь виступає , з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Основні припущення статичної моделі Леонтьєва :

а) в економічній системі виробляються, купуються і споживаються та інвестуються n видів продукції, які позначаються індексами $i = 1, 2, \cdots, n$.

б) кожна галузь виробляє лише один вид продукції. Різні галузі виробляють різні товари, й тому галузь, що виробляє продукцію виду i, позначатимемо тим самим індексом.

в) під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких видів продукції, взятих у певних обсягах, на деякий обсяг продукції того чи іншого виду. При цьому припускається, що співвідношення витраченої та випущеної продукції є сталим.

г) всі показники та зв'язки виробництва беруться за певний проміжок часу (найчастіше за рік).

Введемо такі позначення : X_i – обсяг валової продукції i-ї галузі $(i = 1, 2, \cdots, n)$ за одиницю часу (наприклад, за рік) ; x_{ij} – обсяг продукції i-ї галузі, що потребує j-та галузь у процесі виробництва $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$; Y_j – обсяг кінцевої продукції i-ї галузі, призначеної для невиробничого споживання.

Оскільки, згідно з припущеннями моделі, обсяг валової продукції будь-якої i-ї галузі дорівнює сукупному обсягові продукції, що споживається n галузями, то виконується система рівнянь

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \,, i = 1, 2, \cdots, n . \qquad (5.1)$$

Рівняння системи (5.1) називають співвідношеннями балансу.

Розглянемо міжгалузевий баланс у вартісній формі, тобто за припущення, що всі величини, які входять до системи (5.1) виражають вартість.

Під час побудови та практичного використання моделі використовують коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок i-ї галузі в j-ту поділити на обсяг продукції j-ї галузі, дістанемо шуканий норматив :

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},\ i,j = 1,2,\cdots,n, \qquad (5.2)$$

де a_{ij} – коефіцієнти прямих витрат продукції i-ї галузі на одиницю обсягу валової продукції j-ї галузі.

Коефіцієнти a_{ij} утворюють квадратну матрицю коефіцієнтів витрат (технологічну матрицю), яка містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи.

Використовуючи рівність $x_{ij} = a_{ij}X_j$, систему (5.1) можна переписати у вигляді

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + Y_i,\ i = 1,2,\cdots,n \qquad (5.3)$$

Запишемо її в матричній формі

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

або

$$X = AX + Y\ . \qquad (5.4)$$

Співвідношення (5.4) називають рівнянням лінійного міжгалузевого балансу, або (в указаних позначеннях) моделлю Леонтьєва.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такої матриці обсягів валової продукції X, яка за відомої матриці прямих витрат забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції Y.

Систему (5.4) перепишемо у вигляді

$$(E - A)X = Y, \qquad (5.5)$$

де E – одинична матриця.

Якщо матриця $E - A$ не вироджена, то шукана матриця обсягів валової продукції дорівнює

$$X = (E - A)^{-1}Y\ . \qquad (5.6)$$

Матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають матрицею повних витрат.

Економічний зміст елементів матриці B такий : кожен елемент b_{ij} матриці B є обсягом валової продукції i-ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці продукції j-ї галузі ($i,j = 1,2,\cdots,n$).

За економічним змістом $X_i \geq 0$, $i = 1,2,\cdots,n$. Тому з математичної точки зору питання про сумісність системи (5.4) зводиться до існування оберненої матриці $(E - A)^{-1}$, складеної з невід'ємних елементів.

Рівняння міжгалузевого балансу може можна використовувати в двох випадках. Y простішому випадку, коли відома матриця обсягів валової продукції X, потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції Y. В другому випадку рівняння міжгалузевого балансу використовується для планування.

Матриця A, всі елементи якої невід’ємні, і відповідна їй модель Леонтьєва називається продуктивною, якщо для довільної матриці Y із невід’ємними елементами існує розв’язок рівняння (5.4) – матриця X, усі елементи якої невід’ємні.

Умова продуктивності матриці еквівалентна одному з таких тверджень :

1) максимальне власне число матриці менше одиниці ($\lambda_{\max}(A)<1$) ;

2) матриця $E-A$ має обернену матрицю, яка не має від’ємних елементів ;

3) матричний ряд $E+\sum_{n=1}^{\infty}A^n$ збігається і при цьому $E+\sum_{n=1}^{\infty}A^n=(E-A)^{-1}$;

4) всі послідовні головні мінори визначника матриці $(E-A)^{-1}$ додатні ;

Найбільш практичний спосіб перевірки продуктивності матриці дає така теорема: матриця A продуктивна, якщо виконуються умови:

а) $\max\limits_{j=1,2,\cdots,n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\le 1$, $i,j=1,2,\cdots,n$; б) існує номер j такий, що $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}<1$.

Приклад. Для двогалузевої економічної системи на плановий період в умовних одиницях задані матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат і вектор кінцевої продукції

$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,3\end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix}180\\ 260\end{pmatrix}.$$

Необхідно обчислити планові обсяги валової продукції, матрицю повних матеріальних витрат, значення міжгалузевих потоків, умовну чисту продукцію і подати результати у формі міжгалузевого балансу.

Для розрахунку валової продукції складемо систему рівнянь моделі «затрати-випуск».

$$\begin{cases}X_1=0,2X_1+0,1X_2+180\,,\\ X_2=0,1X_1+0,3X_2+260\end{cases}.$$

Перепишемо систему в стандартному вигляді

$$\begin{cases}0,8X_1-0,1X_2=180\,,\\ -0,1X_1+0,7X_2=260\end{cases}.$$

і розв’яжемо її . Маємо

$$\begin{cases}0,8X_1-0,1X_2=180\,,\\ -8,1X_1+5,6X_2=2260\end{cases};\quad \begin{cases}X_2=\dfrac{226}{0,55}=410,91\,,\\ X_1=\dfrac{180+0,1X_2}{0,8}=276,36\end{cases}.$$

Отже, $X=\begin{pmatrix}276,36\\ 410,91\end{pmatrix}$ – вектор валової продукції.

Знайдемо матрицю повних матеріальних витрат. Маємо

$$E-A=\begin{pmatrix}0,8 & -0,1\\ -0,1\text{\`} & 0,7\end{pmatrix}\ ;\ (E-A)^{-1}=\frac{1}{0,55}\begin{pmatrix}0,7 & 0,1\\ 0,1 & 0,8\end{pmatrix}.$$

Використовуючи знайдену матрицю, ще раз обчислимо вектор валової продукції.

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\frac{1}{0,55}\begin{pmatrix}0,7&0,1\\0,1&0,8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}180\\260\end{pmatrix}=\frac{1}{0,55}\begin{pmatrix}152\\226\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}276,36\\410,91\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, результат співпав, що підтверджує правильність обчислень.

Для обчислення значень міжгалузевих потоків скористаємося формулою

$$x_{ij}=a_{ij}X_j\,,\ i,j=1,2,\cdots,n\ .$$

Маємо

$$x_{11}=0,2\cdot 276,36=55,27\ ;\ x_{21}=0,1\cdot 276,36=27,64\ ;$$

$$x_{12}=0,1\cdot 410,91=41,09\ ;\ x_{22}=0,3\cdot 410,91=123,27\ .$$

Умовно чиста продукція знаходиться як різниця між показником валової продукції та сумою відповідних міжгалузевих потоків. Маємо для першої та другої галузей-споживачів

$$276,36-(55,27+27,64)=193,45\ ;\ 410,91-(41,09+123,27)=246,55\ .$$

Використовуючи результати обчислень, складаємо таблицю міжгалузевого балансу.

Галузі-виробники	Галузі споживачі		Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2		
1	55,27	41,09	180	276,36
2	27,64	123,27	260	410,91
Умовно чиста продукція	193,45	246,54	440	
Валова продукція	276,36	410,91		687,27

Формалізований В. Леонтьєвим на початку 30-х років двадцятого сторіччя метод міжгалузевого балансу, або, іншими словами метод витрат-випуску, був вперше запропонований у СРСР при розробці міжгалузевого балансу країни на 1923/1924 господарчий рік. На тепер аналіз міжгалузевого балансу широко використовують усі провідні економічно розвинуті країни. Так, у Японії та Нідерландах звітні види міжгалузевих балансів розробляються щороку. При цьому матриця міжгалузевого балансу, яку використовують японські економісти, має приблизно розмір 600×600.

Основна модель міжгалузевого балансу Леонтьєва, яка була розглянута, отримала різні узагальнення. Одне з цих узагальнень полягає у врахуванні показників фондомісткості продукції. В найпростішому випадку модель доповнюється вектором, який подає у вартісному вираженні обсяги виробничих фондів Φ_j, $j=1,2,\cdots,n$, що задіяні в кожній j-й галузі. На підставі цих даних та обсягів валової продукції всіх галузей визначаються коефіцієнти прямої фондомісткості продукції j-ї галузі

$$f_j=\frac{\Phi_j}{X_j},\ j=1,2,\cdots,n\ . \quad (5.7)$$

Коефіцієнт прямої фондомісткості відображає обсяг виробничих фондів, безпосередньо задіяних у виробництві даної галузі у розрахунку на одиницю її валової продукції. На відміну від цього показника коефіцієнт повної фондомісткості F_j характеризує обсяг фондів, необхідних у всіх галузях для випуску одиниці кінцевої продукції j-ї галузі. Для коефіцієнта повної фондомісткості буде виконуватися рівність

$$F_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} F_i + f_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad . \qquad (5.8)$$

Якщо ввести до розгляду вектор-рядок коефіцієнтів прямої фондомісткості $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ і вектор-рядок коефіцієнтів повної фондомісткості $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$, то систему рівнянь можна подати у матричній формі.

$$F = FA + f \quad .$$

Звідси випливає співвідношення

$$F = f \cdot B, \qquad (5.9)$$

де $B = (E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат.

Інше узагальнення основної моделі міжгалузевого балансу Леонтьєва пов'язане із урахуванням тієї обставини, що за умови закритого виробництва необхідні вихідні ресурси для початку виробництва, які під час функціонування економічної системи можуть відтворюватися, але в стартовій ситуації мають бути в наявності як складова частина виробництва.

Будемо вважати, що крім балансових рівнянь Леонтьєва у нашій моделі є критерій оптимальності

$$L = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \ ,$$

який характеризує сумарний прибуток об'єкта економічної діяльності. Тут $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ вектор вартостей, $c_i, i - 1, 2, \cdots, n$ - вартість одиниці продукції i- го типу.

Крім того, відомий вектор $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$, що характеризує запаси стартових ресурсів на виробництві. Відома також технологічна матриця $b = \{b_{ij}\}_{m \times n}$ з невід'ємними елементами причому b_{ij} − нормативний коефіцієнт, який задає кількість i-го ресурсу необхідного для виготовлення одиниці j-го продукту із застосуванням заданого технологічного циклу у виробництві.

Задача розподілу ресурсів полягає у знаходженні вектора $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$ для якого виконується умова максимізації прибутку

$$L^0 = (c, y^0) \ge L = (c, y) \qquad (5.10)$$

при

$$x^0 = Ax^0 + y^0 \qquad (5.11)$$

та

$$Bx^0 \le b, \, x^0 \ge 0, \, y^0 \ge 0 \ . \qquad (5.12)$$

Якщо матриця A продуктивна, то із співвідношення балансу можна знайти $x^0 = (E-A)^{-1} y^0$ і, підставивши це значення у нерівність $Bx^0 \le b$, $x^0 \ge 0$, $y^0 \ge 0$, прийти до задачі лінійного програмування

$$L^0 = \left(c, y^0\right) \to max \ , \qquad (5.13)$$

$$B(E-A)^{-1} y^0 = Ry^0 \le b \ , \qquad (5.14)$$

де $R = B(E-A)^{-1} = \left\{r_{ij}\right\}_{m\times n}$

Динамічна модель Леонтьева. Ця модель включає додатково матрицю коефіцієнтів капіталомісткості B і визначає траєкторії збалансованого економічного розвитку. Якісні властивості цих траєкторій залежать від матриці $B(E-A)^{-1}$. При деяких умовах величина, обернена найбільшому власному значенню матриці, визначає максимально можливий («технологічний») темп приросту економіки, а відповідний цьому значенню власний вектор характеризує необхідні пропорції між об'ємами виробництва продукції на «магістральній» (з максимальним темпом приросту) ділянці економічного розвитку.

Динамічна модель Леонтьєва Описується системою диференціальних рівнянь

$$Y(t) = K\frac{dY(t)}{dt} + C(t). \qquad (5.15)$$

Тут $Y(t)$ – вектор-стовпець національного доходу, $C(t)$ – вектор-стовпець споживання, $K = B(E-A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повної приросної капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого накопичення на одиничні прирости елементів використовуваного національного доходу, $(E-A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних потреб у випуску продукції для отримання одиниць відповідних видів кінцевої продукції.

Отже, на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу, коефіцієнти динамічної моделі включають також витрати на поновлення основних виробничих фондів.

Приклад. Розглянемо двогалузеву економічну систему. Нехай $C(t) = 0$ (економіка замкнута, тобто все споживається самими галузями). Відомо, що

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0,8 \end{pmatrix} \ , \ Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} \ .$$

Необхідно визначити динаміку зростання національного доходу із урахуванням галузевої структури.

Обчислимо матриці $(E-A)^{-1}$ та $K = B(E-A)^{-1}$:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,54 & 0,77 \\ 0,77 & 2,05 \end{pmatrix} \ , \ K = \begin{pmatrix} 1,16 & 1,41 \\ 2,16 & 2,41 \end{pmatrix} .$$

Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь

$$Y(t) = K\frac{dY(t)}{dt} \ , \ Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} ,$$

знаходимо розв’язок

$$Y(t) = 40,4\begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,61 \end{pmatrix} e^{0,275t} + 9,6\begin{pmatrix} 1,15 \\ -1,00 \end{pmatrix} e^{-14,2t} \quad .$$

Проаналізуємо отриманий розв’язок. Технологічний темп зростання дорівнює 0,275. Другий доданок дуже швидко прямує до нуля. Тому темпи зростання національного доходу швидко з великою точністю описуються першим доданком. Вже при $t = 30$ різниця між точним розв’язком та наближеним

$$\overline{Y(t)} = 40,4\begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,61 \end{pmatrix} e^{0,275t}$$

стає меншою за 0,001.

Запитання для самоперевірки знань

1. В чому полягає суть моделі Леонтьєва багатогалузевої економіки ?
2. Яка основна задача міжгалузевого балансу ?
3. Як визначаються матриці прямих, повних та посередницьких витрат ?
4. Які існують критерії продуктивності моделі Леонтьєва ?
5. В чому суть узагальнення моделі Леонтьєва із урахуванням показників фондомісткості продукції?
6. Як визначається матриця повної приросної капіталомісткості динамічної моделі Леонтьєва ?

Лекція 6
Задача про розподіл інвестиційних ресурсів між об'єктами

Припустимо, що в розпорядженні власника компанії є деяка величина c вільних грошей, які він хоче вкласти в розвиток виробництва, виділивши інвестиції для k об'єктів. Відомі функції прибутку $f_i(x_i)$ при виділенні i-му об'єкту грошей в кількості x_i у.о. Математична модель такої економічної задачі може бути записана таким чином:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max \ , \qquad (6.1)$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = c \, , \qquad (6.2)$$

$$x_i \in \{0, 1, 2, \cdots\} \ . \qquad (6.3)$$

Така задача розв'язується методом динамічного програмування. Потрібно визначити функції $\varphi_i(x_i)$ як максимальний прибуток, використовуючи рекурентні співвідношення: $\varphi_k(d) = 0$ для всіх можливих d, тобто $0 \le d \le c$, та $\varphi_i(d) = \max\limits_{x_i} \{ f_i(x_i) + \varphi_{i+1}(d - x_i) \}$ для всіх $i < k$.

Пояснимо сказане на конкретному прикладі. Планується діяльність трьох промислових підприємств на наступний рік. Грошові кошти для розвитку виробництва складають $s_0 = 6$ у.о. Розміри інвестицій в кожне підприємство кратні 1 у.о. Грошові кошти x, інвестовані в k- е підприємство ($k = 1,2,3$), приносять в кінці року прибуток $f_k(x)$. Функції $f_k(x)$ задані таблично :

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	6	4	5
2	9	6	8
3	12	8	11
4	16	10	13
5	20	13	16
6	25	16	20

Припускається, що :

1) прибуток $f_k(x)$ не залежить від інвестування інших підприємств;

2) прибуток кожного підприємства виражається в однакових умовних одиницях;

3) сумарний прибуток дорівнює сумі прибутків від кожного з трьох підприємств.

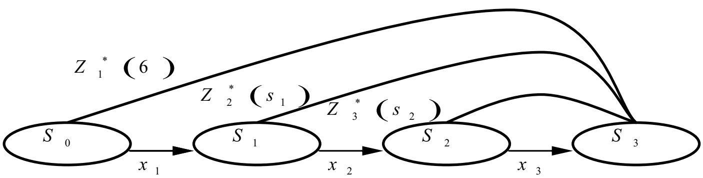
Треба визначити величину виділених коштів кожному підприємству, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Позначимо через x_k кількість грошових коштів, виділених k-му підприємству. В даній задачі вимагається знайти максимум функції сумарного прибутку $Z=\sum_{k=1}^{3} f_k\left(x_k\right)$ за умови, що змінні x_k цілі невід'ємні числа, які задовольняють обмеженню $\sum_{k=1}^{3} x_k = 6$. Таким чином, маємо задачу динамічного програмування:

$$Z=\sum_{k=1}^{3} f_k\left(x_k\right) \rightarrow \max, \qquad (6.4)$$

$$\sum_{k=1}^{3} x_k = 6, \quad x_k \in Z_+, k=1,2,3 \qquad (6.5)$$

Схема розв'язання цієї задачі має такий вигляд: процес розподілу коштів $s_0=6$ можна розглядати як три кроковий, номер кроку співпадає з номером підприємства; вибір змінних x_1, x_2, x_3 – керування відповідно на k- му кроці, $s_1, s_2, s_3 = 0$ – стани процесу після k-го кроку. Вибір змінних в алгоритмі динамічного програмування здійснюється в зворотному напрямку. Схема розподілу коштів показана на рисунку.



Рівняння станів для задачі мають вигляд :

$$s_k = s_{k-1} - x_k, \; k=1,2,3, \qquad (6.6)$$

де s_k – параметр стану – кількість грошових коштів, які залишилися після k- го кроку. На рисунку через $Z_k^*\left(s_{k-1}\right)$ позначений умовний оптимальний прибуток, отриманий від k-го підприємства за умови, що кошти $s_k \left(0 \le s_{k-1} \le 5\right)$ між ними розподілялися оптимально. Зрозуміло, що допустимі керування на k-му кроці задовольняють умову $0 \le x_k \le s_{k-1}$.

Рекурентні рівняння методу динамічного програмування в нашому випадку мають вигляд :

$$Z_3^*\left(s_2\right) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} f_3\left(x_3\right), \; k=3, s_3=0, \qquad (6.7)$$

$$Z_2^*\left(s_1\right) = \max_{0 \le x_2 \le s_1} \left\{ f_2\left(x_2\right) + Z_3^*\left(s_2\right) \right\}, \qquad (6.8)$$

$$Z_1^*\left(s_0=6\right) = \max_{0 \le x_1 \le 6} \left\{ f_1\left(x_1\right) + Z_2^*\left(s_1\right) \right\}. \qquad (6.9)$$

Третій крок. Оскільки прибутки $f_3(x)$ зростають при зростанні вкладених коштів, то всі кошти, що залишаються на початок 3-го кроку слід вкласти в 3-тє підприємство. Отже, при всіх можливих значеннях $s_2 = 0,1,\cdots,6$ маємо $Z_3^*\left(s_2\right) = f_3\left(s_2\right)$ і $x_3^*\left(s_2\right) = s_2$.

Другий крок. Робимо всі можливі припущення відносно залишку коштів на початок другого кроку ($s_1 = 0,1,2,3,4,5,6$). Залежно від s_1 вибираємо $0 \le x_2 \le s_1$, знаходимо $s_2 = s_1 - x_2$ і порівнюємо при різних x_2 при фіксованому s_1 значення суми $f_2(x_2) + Z_3^*(s_2)$. Для кожного s_1 найбільшим з цих значень є $Z_2^*(s_1)$ – умовний оптимальний прибуток,

s_{k-1}	x_k	s_k	$k=1$			$k=2$		
			$f_2(x_2)+Z_3^*(s_2)$	$Z_2^*(s_1)$	$x_2^*(s_1)$	$f_1(x_1)+Z_2^*(s_1)$	$Z_1^*(s_0)$	$x_1^*(s_0)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+5=5	5	0	0+5=5	6	1
	1	0	4+0=4			6+0=6		
	0	2	0+8=8			0+9=9		
2	1	1	4+5=9	9	1	6+5=11	11	1
	2	0	6+0=6			9+0=9		
3	0	3	0+11=11			0+12=12		
	1	2	4+8=12			6+9=15		
	2	1	6+5=11	12	1	9+4=13	15	1
	3	0	8+0=8			12+0=12		
4	0	4	0+13=13			0+15=15		
	1	3	4+11=15			6+12=18		
	2	2	6+8=14	15	1	9+9=18	18	1, 2
	3	1	8+5=13			12+5=17		
	4	0	10+0=10			16+0=16		
5	0	5	0+16=16			0+17=17		
	1	4	4+13=17			6+15=21		
	2	3	6+11=17			9+12=21		
	3	2	8+8=16	17	1, 2	12+9=21	21	1, 2, 3
	4	1	10+5=15			16+5=21		
	5	0	13+0=13			20+0=20		
6	0	6	0+20=20			0+20=20		
	1	5	4+16=20			6+17=23		
	2	4	5+13=18			9+15=24		
	3	3	8+11=19	20	0, 1	16+9=25	25	4, 5, 6
	4	2	10+8=18			20+5=25		
	5	1	13+5=18			25+0=25		
	6	0	16+0=16					

отриманий, отриманий за оптимального розподілу коштів s_1 між 2-м та 3-м підприємствами.

Перший крок. Здійснюється аналогічно другому кроку з урахуванням знайдених значень $Z_2^*(s_1)$ та при відомому $s_0 = 6$.

Всі обчислення подані в таблиці.

В результаті знайдені три оптимальні розв'язки задачі $X_1 = (6,0,0)$, $X_2 = (5,0,1)$, $X_3 = (4,1,1)$. Економічний зміст, наприклад, третього розв'язку полягає в тому, що в перше підприємство треба інвестувати 4 у.о., в друге 1 у.о., в третє 1 у.о. і отримати максимальний можливий прибуток, що дорівнює 25 у.о. Такий прибуток можна отримати, якщо інвестувати підприємства згідно із значеннями x_k першого та другого оптимального розв'язку.

Запитання для самоперевірки знань

1. Сформулюйте задачу про розподіл інвестиційних ресурсів між підприємствами.
2. Опишіть основні етапи методу динамічного програмування розв'язання задачі про розподіл інвестиційних ресурсів.
3. Скільки оптимальних розв'язків може мати задача про розподіл інвестиційних ресурсів ?

Лекція 7
Статичні моделі керування запасами

Будь-який виробничий процес економіки пов'язаний з необхідністю накопичення, зберігання та використанням сировини, комплектуючих виробів, устаткування, виробленої продукції. Відсутність запасів або їх нестача викликають порушення ритмічності виробництва і, як наслідок, до невиробничих збитків. З іншого боку, надмірне накопичення запасів призводить до морального старіння ресурсів, їх псування при зберіганні та переповнення складських приміщень. Тому розглядаються задачі визначення оптимальної кількості запасів, найбільш вигідної стратегії їх поповнення та витрачання.

Розглянемо основні поняття моделей керування запасами. Ці поняття характеризуються кількісними та часовими показниками.

Попит. Попит на деякий продукт, яким запасається об’єкт економіки, може бути детермінованим (детермінованою функцією часу) або випадковим. Випадковість попиту проявляється або випадковими моментами попиту на нього або випадковим об’ємом попиту в детерміновані чи випадкові моменти часу.

Поповнення складу. Поповнення складу відбувається або періодично, тобто через деякий період часу T, або релаксаційним способом, тобто коли нова партія запасів постачається після зниження запасів до деякого рівня.

Обсяг замовлення. Обсяг замовлення може залежати від величини запасу в той момент, коли відбувається замовлення. Але частіше замовлення подається на одну і ту саму величину при зменшенні запасів до деякого заданого рівня – так званої точки замовлення.

Час постачання. В більшості моделей припускається, що замовлення виконується миттєво. В деяких моделях розглядається затримка постачання на детермінований чи випадковий інтервал часу.

Вартість постачання. Припускається, що вартість постачання складається з одноразових витрат, які не залежать від обсягу партії, що замовляється, та витрат, які залежать від обсягу партії.

Витрати на зберігання. В більшості моделей об’єм складу вважається практично необмеженим. За зберігання кожної одиниці продукції за одиницю часу береться визначена плата.

Штраф за дефіцит. Відсутність запасу в потрібний момент приводить до збитків і тому в такій ситуації накладається штраф визначеної величини.

Номенклатура запасів. Найчастіше розглядаються однопродуктові склади. Але можуть досліджуватися і моделі багатопродуктових складів.

В задачах оптимізації керування запасами цільова функція мінімізує сумарні затрати на оформлення та отримання замовлення, на зберігання продукції, на штрафи при відсутності запасів.

Нехай процеси поповнення запасів, їх витрачання та попит на них за проміжок часу $[0,T]$ описуються відповідно функціями $A(t)$, $B(t)$ та $R(t)$.

Похідні цих функцій називаються відповідно інтенсивностями поповнення, витрачання та попиту і позначаються через $a(t)$, $b(t)$ та $r(t)$.

Якщо функції $a(t)$, $b(t)$ та $r(t)$ детерміновані, то модель керування запасами вважається детермінованою. Якщо хоча б одна з них є випадковою величиною, то модель вважається стохастичною.

У випадку, якщо всі параметри моделі не змінюються з часом, то вона називається статичною, в противному разі – динамічною. Статичні моделі використовуються у випадку періодичного поповнення запасів у випадку корегування часу та обсягу поповнення запасів.

В будь-який момент часу рівень запасу визначається так званим основним рівнянням запасів

$$J(t) = J_0 + A(t) - B(t), \qquad (7.1)$$

де J_0 – початковий запас.

Частіше основне рівняння запасів використовується в інтегральній формі :

$$J(t) = J_0 + \int_0^t a(t)\,dt - \int_0^t b(t)\,dt, \qquad (7.2)$$

Статична детермінована однопродуктова модель без дефіциту. Нехай загальний обсяг продукту, що складується, за проміжок часу τ, дорівнює N. Розглянемо найпростішу модель, в якій припускається, що споживання запасу відбувається неперервно зі сталою інтенсивністю, тобто $b(t) = b = const$. Ця інтенсивність знаходиться за формулою $b = \frac{N}{\tau}$. Припускається також, що поповнення відбувається партіями однакового обсягу, який позначимо через n. Тоді час використання всієї партії дорівнює $T = \frac{n}{b}$, тобто поповнення запасу відбувається в моменти часу $0, T, 2T, \dots$, а функція інтенсивності запасів має вигляд $a(t) = \begin{cases} n, \text{ якщо } t = 0, T, 2T, \dots, \\ 0, \text{ в інших випадках} \end{cases}$.

На проміжку $[0, T]$ рівень запасу зменшується з $J(0) = J_0 = n$ до $J(T) = 0$ за законом $J(t) = n - bt$. В момент часу T відбувається миттєве поповнення запасу до рівня n за рахунок надходження нової партії замовлення. Аналогічно процес зміни величини запасу $J(t)$ повторюється на кожному наступному часовому проміжку тривалістю T.

Зміст задачі керування запасами у тому, щоб визначити такий обсяг партії n_0, при якому сумарні витрати на створення та зберігання запасу були б мінімальними.

Позначимо сумарні витрати через C, витрати на створення запасу через C_1, витрати на зберігання через C_2 і, враховуючи зроблені припущення, знайдемо ці величини за весь проміжок часу T.

Нехай витрати на доставку однієї партії продукту дорівнюють c_1, а витрати на зберігання однієї одиниці продукту за одиницю часу дорівнюють c_2. Оскільки за час τ необхідно отримати в запас N одиниць продукту, який постачається партіями обсягу n, то кількість таких партій дорівнює $k=\frac{N}{n}=\frac{\tau}{T}$. Звідси дістаємо $C_1=c_1k=c_1\cdot\frac{N}{n}$. Миттєві витрати на зберігання всього запасу складають $c_2\cdot J(t)$ і за проміжок часу $[0,T]$ вони складуть $C_{2,T}=c_2\int\limits_0^T J(t)\,dt=c_2\int\limits_0^T(n-bt)\,dt=\begin{bmatrix}\text{оскільки}\\ b=\dfrac{N}{T}\end{bmatrix}=c_2\int\limits_0^T\left(n-\frac{N}{T}t\right)dt=c_2\left(nt-\frac{N}{2T}t^2\right)\Bigg|_{t=0}^{t=T}=\frac{c_2nT}{2}$.

Звідси випливає, що витрати на зберігання всього запасу при лінійному (за часом) споживанні за проміжок τ складуть $C_2=C_{2,T}\cdot k=\frac{c_2nT}{2}\cdot k=\frac{c_2nT}{2}\cdot\frac{N}{n}=\frac{c_2TN}{2}=\frac{c_2\tau n}{2}$.

З’ясувалося, що витрати на створення запасу C_1 обернено пропорційні, а на зберігання прямо пропорційні обсягу партії n. Функція сумарних витрат

$$C=\frac{c_1N}{n}+\frac{c_2\tau}{2}n\ . \qquad (7.3)$$

Вважаючи обсяг партії неперервною величиною, зайдемо мінімум цієї дробово-раціональної функції. З рівності $C'(n)=-\frac{c_1N}{n^2}+\frac{c_2\tau}{2}=0$ дістаємо $n\overset{def}{=}n_0=\sqrt{\frac{2c_1N}{c_2\tau}}=\sqrt{\frac{2c_1b}{c_2}}$. Отже,

$$n_0=\sqrt{\frac{2c_1b}{c_2}}\ . \qquad (7.4)$$

Формула (7.4) називається формулою Уілсона або формулою найбільш економічного обсягу партії.

Оскільки $C_1C_2=\frac{1}{2}c_1c_2N\tau=const$, то мінімум досягається, якщо $C_1=C_2$, тобто коли $\frac{c_1N}{n}=\frac{c_2n\tau}{2}$. Економічний зміст одержаної рівності такий : мінімум загальних витрат досягається тоді, коли витрати на створення запасу дорівнюють витратам на зберігання запасу.

При цьому мінімальні сумарні витрати дорівнюють

$$C_0=C(n_0)=\frac{2c_1N}{n}=\sqrt{2c_1c_2\tau N}=\tau\sqrt{2c_1c_2b}\ . \qquad (7.5)$$

Число оптимальних партій за час τ дорівнює

$$k_0=\frac{N}{n_0}=\sqrt{\frac{c_2N\tau}{2c_1}}=\sqrt{\frac{c_2b}{2c_1}}\ . \qquad (7.6)$$

Час споживання оптимальної партії дорівнює

$$T_0=\frac{n_0}{b}=n_0\frac{\tau}{N}=\sqrt{\frac{2c_1\tau}{c_2N}}=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2b}}\ . \qquad (7.7)$$

Статична детермінована однопродуктова модель з дефіцитом. В такій моделі припускається наявність дефіциту, тобто при відсутності продукту ($J(t)=0$), попит на нього зберігається з тією ж інтенсивністю $r(t)=b$. Це означає, що починаючи з першого моменту часу $T_1, J(T_1)=0$ і до моменту постачання нової партії продукту kT, встановлюється дефіцит із швидкістю b. Таким чином, кожен часовий проміжок тривалістю $T=\frac{n}{b}$ поділяється на два: T_1 – час, протягом якого відбувається споживання продукту, та T_2 – час, коли запас відсутній і відбувається накопичення дефіциту. Внаслідок необхідності повертати дефіцит в момент надходження нової партії обсягом n максимальний рівень запасу в цей момент становить s, тобто менший обсягу партії на величину дефіциту $n-s$.

Оскільки споживання продукту відбувається за законом $J(t)=s-bt$, то звідси знаходимо

$$T_1=\frac{s}{b}=\frac{s}{n}T\,,\quad T_2=T-T_1=\frac{n-s}{n}T\,.$$

В моделі, яка розглядається, функція сумарних затрат $C=C_1+C_2+C_3$, де C_1 – витрати на поповнення запасу, C_2 – витрати на зберігання запасу, C_3 – штраф за наявність дефіциту.

Як і в моделі без дефіциту

$$C_1=c_1\cdot\frac{N}{n}\,.$$

Скориставшись тим, що при лінійному законі споживання витрати на зберігання дорівнюють витратам на зберігання середнього запасу, який за час T_1 дорівнює $\frac{sT_1}{2}$, знаходимо

$$C_2=\frac{c_2 sT_1}{2}k=\frac{c_2 s}{2}\cdot\frac{sT}{n}\cdot\frac{\tau}{T}=\frac{c_2 s^2\tau}{2n}\,.$$

При підрахунку витрат C_3 будемо вважати, що штраф за дефіцит складає за одиницю часу c_3 за кожну одиницю продукції. Оскільки середній рівень дефіциту за проміжок T_2 дорівнює $\frac{(n-s)T_2}{2}$, то штраф за цей проміжок складе $\frac{c_3(n-s)T_2}{2}$, а за весь проміжок τ він складатиме

$$C_3=\frac{c_3(n-s)T_2}{2}k=\frac{c_3(n-s)}{2}\cdot\frac{(n-s)T}{n}\cdot\frac{\tau}{T}=\frac{c_3\tau(n-s)^2}{2n}\,.$$

Отже, сумарні витрати за проміжок τ виражаються функцією

$$C=c_1\cdot\frac{N}{n}+\frac{c_2 s^2\tau}{2n}+\frac{c_3\tau(n-s)^2}{2n}\,. \qquad (7.8)$$

Одержана формула при $n=s$ співпадає із знайденою в моделі без дефіциту.

При використанні даної моделі задача керування запасами , як бачимо, зводиться до відшукання такого обсягу партії $n = n_0$ і такого рівня запасу $s = s_0$, при яких функція $C = C(n, s)$ приймає найменше значення.

Вважаючи величини n та s неперервним, знайдемо екстремум функції $C = C(n, s)$. Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial n} = -\dfrac{c_1 N}{n^2} - \dfrac{c_2 \tau s^2}{2n^2} + \dfrac{c_3 \tau}{2}\left(1 - \dfrac{s^2}{n^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial C}{\partial s} = \dfrac{c_2 \tau s}{n} - \dfrac{c_3 \tau (n - s)}{n} = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} n^2 c_3 - (c_2 + c_3) s^2 = \dfrac{2c_1 N}{\tau}, \\ s = n \dfrac{c_3}{c_2 + c_3} \end{cases}.$$

Розв’язуючи одержану систему та перевіривши достатні умови екстремуму, дістаємо формули найбільш оптимальної партії $\tilde{n}_0$ та максимального рівня запасу $\tilde{s}_0$ для моделі з дефіцитом. Отже,

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \tau}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}} = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}, \qquad (7.9)$$

$$\tilde{s}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 N}{c_2 \tau}} \sqrt{\frac{c_3}{c_2 + c_3}} = n_0 \frac{c_3}{c_2 + c_3}. \qquad (7.10)$$

Величина

$$\rho = \frac{c_3}{c_2 + c_3}. \qquad (7.11)$$

називається щільністю збитків через «заморожений» попит.

Використовуючи це поняття, формули для оптимальних значень $\tilde{n}_0$ та $\tilde{s}_0$ можна записати у вигляді :

$$\tilde{n}_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2 \rho}},$$

$$\tilde{s}_0 = \tilde{n}_0 \cdot \rho.$$

Оскільки $\dfrac{T_1}{T} = \dfrac{\tilde{s}_0}{\tilde{n}_0} = \rho$ і $\dfrac{T_2}{T} = \dfrac{(\tilde{n}_0 - \tilde{s}_0)}{\tilde{n}_0} = 1 - \rho$, то економічний зміст величини ρ проявляється в тому, що протягом $(1-\rho)100\%$ часу від повного періоду T запас продукту буде відсутній.

Порівнюючи оптимальні значення n_0 та $\tilde{n}_0$ в задачі без дефіциту та в задачі з дефіцитом, дістаємо $\tilde{n}_0 = \dfrac{n_0}{\sqrt{\rho}}$, тобто оптимальний об’єм партії в задачі з дефіцитом в $\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$ разів більший, ніж в задачі без дефіциту.

Коротко розглянемо деякі інші однопродуктові моделі керування запасами.

Модель оптимального розміру партії без дефіциту за умови отримання замовлення не миттєво.
Для більшості реальних ситуацій існує термін виконання замовлення L (часове запізнення) від моменту оформлення замовлення до його виконання. Отже, треба визначити той рівень запасу, при якому виконується нове замовлення. Цей рівень називається точкою відновлення R. Точка відновлення (момент замовлення) вибирається таким чином, щоб на момент спорожнення запасу відбулось його поповнення. Очевидно, що точці відновлення відповідає момент, коли рівень запасу знижується до bL одиниць.

Проте, якщо термін виконання замовлення довший за тривалість циклу $T_0 = \frac{n_0}{b}$, то поступають таким чином. Розраховують ефективний термін L_e виконання замовлення за формулою $L_e = L - kT_0$, де k - найбільше ціле число , яке не перевищує $\frac{L}{T_0}$. Далі припускаємо, що $L_e \le T$. Перший раз при нульовому запасі треба виконати замовлення $m > n_0 + bL_e$. Другий раз замовлення обсягом n_0 виконується, коли рівень запасу знизиться до $n_0 + bL_e$. Третій і наступні рази замовлення обсягом n_0 виконується у момент, коли рівень запасу знижується до bL_e. Величина L_e являє собою інтервал між оформленням замовлення та отриманням попереднього замовлення.

Отже, оптимальна стратегія керування запасами полягає у виконанні замовлення $m > n_0 + bL_e$ в початковий момент, у виконання замовлення обсягом n_0 в момент зниження запасу до величини $n_0 + bL_e$ та у виконанні замовлення обсягом n_0 у наступні моменти, коли рівень запасу знижується до величини bL_e.

Інші характеристики розраховуються так само як в моделі з миттєвим поповненням запасів.

Приклад. Неонові лампи в університетському містечку замінюються із інтенсивністю 100 штук на день. Відділ матеріального забезпечення містечка замовляє ці лампи із визначеною періодичністю. Вартість виконання замовлення на покупку ламп складає 100 у.о. Вартість зберігання лампи на складі оцінюється в 0,02 у.о. за день. Термін виконання від оформлення замовлення до реального постачання складає 12 днів. Треба визначити оптимальну стратегію замовлення неонових ламп.

Згідно з умовою задачі $b = 100$ одиниць в день, $c_1 = 100$ у.о. за замовлення, $c_2 = 0,02$ у.о. за зберігання однієї лампи на протязі одного дня, $L = 12$ днів.

Отже,

$$n_0 = \sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0,02}} = 1000 \text{ ламп.}$$

Відповідна тривалість циклу становить

$$T_0 = \frac{n_0}{b} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ днів.}$$

Оскільки термін виконання замовлення $L = 12$ днів перевищує тривалість циклу $T_0 = 10$ днів, необхідно обчислити L_e. Число цілих циклів, які містяться в L, дорівнює

$$k = \left[\frac{L}{T_0}\right] = \left[\frac{12}{10}\right] = 1$$

Отже, $L_e = L - kT_0 = 12 - 1 \cdot 10 = 2$ дні, $bL_e = 2 \cdot 100 = 200$ ламп.

Оптимальна стратегія замовлення неонових ламп може бути сформульована таким чином. Спочатку замовляється $m > 1200$ ламп. Коли запас знизиться до 1200 виконується друге замовлення обсягом 1000. Всі подальші замовлення обсягом 1000 виконуються у моменти, коли рівень запасу зменшується до 200 одиниць.

Щоденні витрати пов'язані із зберіганням запасу складатимуть приблизно $c_0 = \frac{c_1 \cdot b}{n_0} + 0,02 \cdot \frac{1000}{2} = 20$ у.о. за день.

Модель з урахуванням виробництва. В деяких випадках, особливо в промисловому виробництві, для комплектування партії товару потрібний значний час і виробництво товарів для поповнення запасу здійснюється одночасно із споживанням.

Нехай m – інтенсивність виробництва продукту за одиницю часу. Тоді максимальний рівень запасів дорівнює $S = mt - bt = n\left(1 - \frac{b}{m}\right)$, середній рівень запасу $S_0 = \frac{S}{2} = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{b}{m}\right)$, час виконання замовлення $t_0 = \frac{n}{m}$, сукупні витрати зберігання $C_2 = S_0 c_2 T = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{b}{m}\right)c_2 T$, витрати на замовлення за плановий період τ дорівнюють $C_1 = \frac{N}{n}c_1$, повні витрати складають $C = \frac{N}{n}c_1 + \frac{n}{2}\left(1 - \frac{b}{m}\right)c_2$. Оптимальна партія замовлення дорівнює

$$n_0 = \sqrt{\frac{2bc_1}{c_2}\left(1 - \frac{b}{m}\right)} = \sqrt{\frac{2Nc_1}{c_2 T}\left(1 - \frac{b}{m}\right)}. \quad (7.12)$$

Модель із кількісними знижками. Для збільшення обсягу реалізації продукту компанії часто пропонують кількісні знижки своїм покупцям. Кількісна знижка – зменшена ціна на товар у разі покупки великої кількості цього товару. Розглянемо приклад.

Варіанти знижок	1	2	3
Кількість, при якій пропонується знижка	від 0 до 999	від 1000 до 1999	Від 2000 і більше
Розмір знижки в %	0	4	9
Ціна зі знижкою	12	11,5	10,9

Нехай r_c частка витрат зберігання в ціні продукту c. Тоді $c_2 = r_c \cdot c$, оптимальний обсяг замовлення дорівнює $n_0 = \sqrt{\frac{2bc_1}{c_2}}$.

Багатопродуктова детермінована статична модель з обмеженою місткістю складу без дефіциту. Нехай на одному складі зберігаються k різних продуктів, причому склад має обмежену місткість, яку позначимо через M. Введемо також такі позначення : m_i – простір, який необхідний для зберігання одиниці i-го продукту, N_i – величина i-го продукту, що складується за весь час τ, n_i – обсяг партії i-го продукту, що постачається на склад, $c_{1,i}$ – вартість замовлення партії i-го продукту, $c_{2,i}$ – вартість зберігання на складі одиниці i- го продукту за одиницю часу.

Неважко упевнитися, що математична модель керування запасами в даному випадку матиме такий вигляд :

$$C = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{c_{1,i} N_i}{n_i} + \frac{c_{2,i} n_i}{2} \right) \to \min \tag{7.13}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} m_i n_i \le M , \\ n_i > 0 , i = 1, 2, \cdots, k \end{cases} \tag{7.14}$$

Задачу (7.13)-(7.14) можна розв’язати таким чином. Обчислимо спочатку оптимальні партії замовлень без врахування обмеження на місткість складу, тобто знайдемо величини $n_{0,i} = \sqrt{\frac{2c_{1,i} N_i}{c_{2,i}}}$. Якщо знайдені значення задовольняють обмеженню на місткість складу, то вони є оптимальними для задачі $(7.13)-(7.14)$.

Нехай знайдені значення не задовольняють обмеженню (7.14). Тоді приймемо до уваги, що цільова функція і обмеження є опуклими функціями, тобто задача може мати лише єдиний мінімум. Лінії рівня цільової функції при монотонному зменшенні значення функції зустрічаються з областю допустимих значень і перетинають її лише по межі, причому в єдиній точці. Тому дана задача еквівалентна задачі з обмеженням у вигляді рівності $\sum_{i=1}^{k} m_i n_i = M$. Звідси випливає, що для знаходження мінімуму можна скористатися методом множників Лагранжа.. Розглянемо функцію Лагранжа

$$L(n_1, n_2, \cdots, n_k, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{c_{1,i} N_i}{n_i} + \frac{c_{2,i} n_i}{2} \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} m_i n_i - M \right). \tag{7.15}$$

Внаслідок необхідних умов екстремуму оптимальні значення n_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ та λ функції (7.15) знаходяться із системи

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n_i} = -\frac{c_{1,i} N_i}{n_i^2} + \frac{c_{2,i}}{2} - \lambda m_i , \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{k} m_i n_i + M \end{cases} \tag{7.16}$$

Друге рівняння системи (7.16) показує, що обмеження на місткість складу має виконуватися у вигляді рівності. Із першого рівняння знаходимо $n_{0,i} = \sqrt{\dfrac{2c_{1,i}N_i}{c_{2,i} - 2\lambda_0 m_i}}$. Бачимо, що оптимальні обсяги партій $n_{0,i}$ залежать від оптимального значення λ_0, причому при $\lambda_0 = 0$ одержані значення є розв'язками задачі без обмеження. Оптимальне значення λ_0 можна знайти методами чисельного аналізу, тобто, поклавши $\lambda_0 = 0$ і рухаючись в бік зростання λ_0 з деяким кроком підберемо його таким чином, щоб виконувалася рівність $\sum_{i=1}^{k} m_i n_i = M$.

Запитання для самоперевірки знань

1. Визначити основні причини необхідності створення запасів.
2. Назвіть основні витратні складові в моделях керування запасами.
3. Записати формулу оптимального обсягу партії замовлення в моделі Уілсона.
4. Який вигляд має формула оптимального обсягу партії замовлення в моделі з можливим дефіцитом ?
5. В чому основна суть багатопродуктової моделі керування запасами ?

Лекція 8
Стохастичні моделі керування запасами

Стохастична однопродуктова модель оптимального обсягу замовлення

В даній моделі замовлення розміром n здійснюється тоді, коли обсяг запасу знижується до рівня r. Рівень r є функцією періоду часу між здійсненням замовлення та його виконанням. Оптимальні значення n та r визначаються внаслідок мінімізації сумарної функції очікуваних витрат за одиницю часу системи керування запасами. Сумарна функція витрат враховує витрати на виконання замовлення та зберігання продукту та витрати, пов'язані з наявністю дефіциту.

В даній моделі прийняті такі припущення :

1. Невиконаний протягом терміну виконання замовлення попит накопичується.

2. Дозволяється не більше одного невиконаного замовлення.

3. Розподіл попиту на протязі терміну виконання замовлення є стаціонарним (незмінним) у часі.

Для визначення функції сумарних витрат за одиницю часу введемо позначення:

$f(x)$ – щільність розподілу попиту x на протязі терміну виконання замовлення,

$\bar{b}$ – очікуване значення попиту за одиницю часу,

c_1 – вартість виконання замовлення,

c_2 – питомі витрати на зберігання одиниці продукції за одиницю часу,

c_3 – питомі витрати на кожну одиницю дефіциту за одиницю часу.

Сумарна функція витрат дорівнює сумі трьох відповідних компонент. Базуючись на введених позначеннях, обчислимо ці компоненти.

1. Вартість виконання замовлення.

Наближене число замовлень за одиницю часу дорівнює $\frac{\bar{b}}{n}$. Тому вартість виконання замовлень за одиницю часу дорівнює

$$C_1 = c_1 \cdot \frac{\bar{b}}{n} \ .$$

2. Очікувані витрати на зберігання.

Середній рівень запасу дорівнює

$$\bar{J} = \frac{\left(n + M\{r-x\}\right) + M\{r-x\}}{2} = \frac{n}{2} + r - M\{x\} \ .$$

Отже, очікувані витрати на зберігання одиниці продукту за одиницю часу дорівнюють

$$C_2 = c_2\left(\frac{n}{2} + r - M\{x\}\right) \ .$$

Ця формула була отримана внаслідок усереднення очікуваних запасів на початку та в кінці часового циклу, тобто величин $n+M\{r-x\}$ та $M\{r-x\}$ відповідно. При цьому нехтується випадок, коли величина $r-M\{x\}$ є від'ємною, що є спрощуючим припущенням даної моделі.

3. Очікувані витрати, пов'язані з дефіцитом.

Дефіцит виникає при $x>R$. Отже, очікуваний дефіцит за одиницю часу дорівнює

$$D=\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx\ .$$

Оскільки в моделі припускається, що питомі витрати на одиницю дефіциту за одиницю часу пропорційні лише обсягу дефіциту, то очікувані витрати, пов'язані з невиконаним попитом, за один цикл дорівнюють $c_3\cdot D$, а оскільки одиниця часу містить $\frac{\bar{b}}{n}$ циклів, то очікувані витрати, зумовлені дефіцитом, складають $c_3\cdot\frac{\bar{b}}{n}\cdot D$. Отже, витрати на штрафи за дефіцит одиниці продукту за одиницю часу складають

$$C_3=c_3\cdot\frac{\bar{b}}{n}\cdot\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx\ .$$

Функція сумарних витрат має вигляд

$$C=c_1\cdot\frac{\bar{b}}{n}+c_2\left(\frac{n}{2}+r-M\{x\}\right)+c_3\cdot\frac{\bar{b}}{n}\cdot\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx\ . \quad (8.1)$$

Оптимальні значення n^* та r^* визначаються необхідними умовами екстремуму функції багатьох змінних, тобто із системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial n}=-c_1\dfrac{\bar{b}}{n^2}+\dfrac{c_2}{2}-c_3\dfrac{\bar{b}}{n^2}\displaystyle\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx\,,\\ \dfrac{\partial C}{\partial r}=c_2-c_3\dfrac{\bar{b}}{n^2}\displaystyle\int_r^{\infty}f(x)dx\end{cases}.$$

Отже, маємо

$$n^*=\sqrt{\frac{2\bar{b}(c_1+c_3D)}{c_2}} \qquad (8.2)$$

$$\int_{r^*}^{\infty}f(x)dx=\frac{c_2n^*}{c_3\bar{b}} \qquad (8.3)$$

Значення n^* та r^* системи (8.2)-(8.3) не можна визначити у явному вигляді. Тому для їх обчислення використовується чисельний метод, запропонований Хідлі та Уайтін. Якщо розв'язок системи існує, то за скінчене число ітерацій цей алгоритм збігається.

При $r=0$ система має вигляд

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{2\bar{b}\left(c_1 + c_3 M\{x\}\right)}{c_2}} \quad (8.4), \quad \bar{\bar{n}} = \frac{c_3 \bar{b}}{c_2} \quad (8.5).$$

Якщо $\bar{\bar{n}} \ge \bar{n}$, то існує єдине оптимальне значення для n та r. Обчислювальний алгоритм визначає, що найменше значення n^* дорівнює $\sqrt{\frac{2c_1 b}{c_2}}$ і це значення досягається при $D = 0$. Алгоритм складається з таких кроків.

Крок 0. Приймається початковий розв'язок $n_1 = n^* = \sqrt{\frac{2c_1\bar{b}}{c_2}}$ і вважаємо $r_0 = 0$. Покладаємо $i = 1$ і переходимо до кроку i.

Крок і. Використаємо значення n_i для визначення r_i із рівняння (8.5). Якщо $r_i = r_{i-1}$, то обчислення закінчуються. Оптимальними значеннями вважаємо $n^* = n_i$ та $r^* = r_i$. В противному разі використаємо значення r_i в рівнянні (8.4) для визначення n_{i+1}. Покладемо $i = i+1$ і повторимо крок і.

Приклад. Електротехнічна компанія використовує у виробничому процесі каніфоль у кількості 1000 галонів на місяць. Нове замовлення на поставку коштує 100 у.о. Вартість зберігання одного галона каніфолі на протязі одного місяця дорівнює 2 у.о. , а питомі втрати від її дефіциту складають 10т у.о. за один галон. Статистичні дані показують, що попит в період постачання є випадковою величиною, що рівномірно розподілена від 0 до 100 галонів. Визначити оптимальну політику керування запасами для компанії.

Згідно з умовами задачі маємо :

$\bar{b} = 1000$ галонів на місяць, $c_1 = 100$ у.о. зо виконання замовлення, $c_2 = 2$ у.о. за один галон в місяць, $c_3 = 10$ у.о. за один галон, $f(x) = \frac{1}{100}$, $0 \le x \le 100$, $M\{x\} = 50$ галонів.

Виконаємо перевірку того, чи існує допустимий розв'язок задачі. Використовуючи формули для $\bar{n}$ та $\bar{\bar{n}}$, отримаємо їх величини. Маємо

$\bar{n} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000(100 + 10 \cdot 50)}{2}} = 774.6$ галонів, $\bar{\bar{n}} = \frac{10 \cdot 1000}{2} = 5000$ галонів.

Оскільки $\bar{\bar{n}} \ge \bar{n}$, то існує єдиний оптимальний розв'язок задачі n^*, r^*.

Вираз для величини D має вигляд :

$$D = \int_r^{100} (x - r)\frac{1}{100}dx = \frac{r^2}{200} - R + 50 .$$

Використовуючи в рівняннях (8.2)-(8.3) вираз для D, отримаємо такі співвідношення.

$$n_i = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000(100 + 10D)}{2}} = \sqrt{100000 + 10000D} \text{ галонів}, \qquad (8.6)$$

$\int_{r_i}^{100} \frac{1}{100}dx = \frac{2n_i}{10 \cdot 1000}$. Звідси маємо

$$r_i = 100 - \frac{n_i}{50} . \qquad (8.7)$$

Тепер використаємо формули (3)-(4) для знаходження розв'язку.

Крок 1

$$n_1 = \sqrt{\frac{2c_1\bar{b}}{2}} = 316,23 \text{ галонів, } r_1 = 100 - \frac{316,23}{50} = 93,68 \text{ галонів} .$$

Крок 2

$$D = \frac{r_1^2}{200} - r_1 + 50 = 0,19971 \text{ галонів,}$$

$$n_2 = \sqrt{100000 + 10000 \cdot 0,19971} = 319.37 \text{ галонів, } r_2 = 100 - \frac{319,37}{50} = 93,612 \text{ галонів.}$$

Крок 3

$$D = \frac{r_2^2}{200} - r_2 + 50 = 0,20399 \text{ галонів,}$$

$$n_3 = \sqrt{100000 + 10000 \cdot 0,20399} = 319,44 \text{ м галонів, } r_3 = 100 - \frac{319,44}{50} = 93,611 \text{ галонів.}$$

Оскільки значення r_2 та r_3 приблизно однакові, то за наближений оптимальний розв'язок можна прийняти $n^* = 319,4$ галонів, $r^* \approx 93,61$ галонів.

Отже, оптимальне керування запасами полягає у оформленні замовлення приблизно на 320 галонів, як тільки запас зменшиться до 94 галонів.

Одноетапна стохастична модель керування запасами

Одноетапні моделі керування запасами відповідають ситуації, коли для задоволення попиту на протязі визначеного періоду продукція замовляється тільки один раз. Наприклад, модний сезонний товар морально старіє до кінця сезону і тому часто повторне замовлення на нього є недоцільним. Розглянемо модель без урахування витрат на замовлення.

При викладенні даного матеріалу використовуються наступні позначення:

c_1 – вартість покупки або виробництва одиниці продукції;

c_2 – питомі витрати на зберігання одиниці продукції на протязі періоду,що розглядається;

c_3 – питомі витрати від незадоволеного попиту (на одиницю продукції за період, що розглядається);

b – величина випадкового попиту за період, що розглядається;

$f(b)$ – щільність ймовірності попиту за період, що розглядається;

n – обсяг замовлення;

m – наявний запас продукції перед поданням замовлення.

В моделі визначається оптимальний обсяг замовлення n, який мінімізує сумарні очікувані витрати, пов'язані із закупкою (або виробництвом), зберіганням та виникненням дефіциту. При знайденому оптимальному значенні n, що позначається n^*, оптимальне керування запасом полягає в оформленні замовлення обсягом $n^* - m$, якщо $n^* < m$; в противному разі замовлення не оформляється.

В даній моделі прийняті такі припущення.

1. Попит задовольняється випадково на початку періоду безпосередньо після отримання замовлення.

2. Витрати на оформлення відсутні.

Очікувані витрати $M\{C(n)\}$ за період виражаються формулою

$$M\{C(n)\} = c_1(n-m) + c_2\int_0^n (n-b)f(b)db + c_3\int_n^\infty (b-n)f(b)db \ . \quad (8.8)$$

Можна показати, що функція $M\{C(n)\}$ є опуклою по n і, таким чином, має єдиний мінімум. Отже, обчислюючи першу похідну функції $M\{C(n)\}$ по n та прирівнюючи її до нуля, отримаємо

$$c_1 + c_2\int_0^n f(b)db + c_3\int_n^\infty f(b)db = 0$$

або

$$c_1 + c_2 P\{b \le n\} + c_3\left(1 - P\{b \le n\}\right) = 0 \ .$$

Звідси маємо

$$P\left\{b \le n^*\right\} = \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} \ . \quad (8.9)$$

Праву частину останньої формули називають ще критичним відношенням. Значення n^* можна визначити тільки при умові, що критичне відношення невід'ємне, тобто $c_3 \ge c_1$. Випадок $c_3 < c_1$ не має сенсу, оскільки припускає, що вартість закупки одиниці продукції вище втрат від незадоволеного попиту.

Якщо b є дискретною випадковою величиною, то щільність розподілу ймовірностей $f(b)$ визначена лише в дискретних точках і функція витрат задається формулою

$$M\{C(n)\} = c_1(n-m) + c_2\sum_{b=0}^{n}(n-b)f(b) + c_3\sum_{b=n+1}^{\infty}(b-n)f(b) \, .$$

Необхідними умовами оптимальності є нерівності

$$M\{C(n-1)\} \ge M\{C(n)\} \text{ та } M\{C(n+1)\} \ge M\{C(n)\} \ .$$

Ці умови в даному випадку є і достатніми, оскільки функція $M\{C(n)\}$ є опуклою. Застосування цих умов після деяких алгебраїчних перетворень приводить до наступних нерівностей для визначення n^*:

$$P\left\{b \le n^* - 1\right\} \le \frac{c_3 - c_1}{c_3 + c_2} \le P\left\{b \le n^*\right\} \ . \quad (8.10)$$

Приклад. Власник газетного кіоску повинен визначити кількість примірників газети «Факти» , які повинні бути в продажі на початку кожного дня. Він купує примірник газети за 30 грошових одиниць, а продає за 75. Продаж газети зазвичай відбувається з 7.00 до 8.00 ранку. Примірники, які залишилися не проданими до 16.00, виставляються для продажу за 5 грошових одиниць. Скільки примірників газети повинен закупити власник кожного ранку, якщо щоденний попит описується нормальним розподілом з математичним очікуванням 300 примірників і стандартним відхиленням 20 примірників.

Спочатку знайдемо величину критичного відношення

$$\frac{c_3 - c_1}{c_3 + c_2} = \frac{75 - 30}{75 + 25} = 0,45 \ .$$

Попит b розподілений за нормальним законом $N(300, 20)$. Перейдемо до нормованої нормально розподіленої випадкової величини із законом розподілу $N(0,1)$, поклавши $z = \dfrac{b - 300}{20}$, $z^* = \dfrac{n^* - 300}{20}$. Використовуючи таблицю стандартного нормального розподілу $N(0,1)$ та співвідношення $P\{z \le z^*\} \approx 0,45$, знаходимо наближене оптимальне значення $z^* \approx -0,125$.

Отже, оптимальний обсяг замовлення складає $n^* \approx 300 - 20 \cdot 0,125 = 297,5$ (або приблизно 298) примірників.

Запитання для самоперевірки знань

1. Які основні припущення при побудові стохастичної моделі оптимального обсягу замовлення ?
2. За якої умови існує єдиний оптимальний розв'язок стохастичної моделі оптимального обсягу замовлення ?
3. Які основні припущення одноетапної моделі керування запасами ?
4. Що таке критичне відношення в одноетапній стохастичній моделі керування запасами ?

Лекція 9
Ланцюги Маркова з неперервним часом

Нехай задано деякий ймовірносний простір (Ω, F, P), де $\Omega -$ простір елементарних подій, $F - \sigma$-алгебра подій, P – ймовірність подій.

Дійсно значна функція двох аргументів $\xi = \xi(t, \omega), t \in [0, +\infty), \omega \in \Omega$ називається випадковим процесом, якщо для кожного фіксованого значення t_0 функція елементарної події $\xi = \xi(t_0, \omega)$ є випадковою величиною. Для кожного фіксованого ω_0 функція $\xi = \xi(t) = \xi(t, \omega_0)$ називається траєкторією випадкового процесу $\xi = \xi(t, \omega)$.

Якщо множина значень $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ процесу $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ не більш, ніж злічення, то $\xi(t)$ називається процесом із дискретними станами.

Випадковий процес із дискретними станами називається марківським (або ланцюгом Маркова із неперервним часом), якщо для довільної зростаючої послідовності моментів часу $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ послідовність $\xi_0(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_n(t), \cdots$ є ланцюгом Маркова із дискретним часом, тобто $P\{\xi_n = s_n / \xi_{n-1} = s_{n-1}, \cdots, \xi_0 = s_0\} = P\{\xi_n = s_n / \xi_{n-1} = s_{n-1}\}$.

Функції $p_{ij}(r, t) = p\{\xi(t) = s_j / \xi(r) = s_i\}$ називаються перехідними ймовірностями процесу Маркова.

Ланцюг Маркова з дискретним часом називається однорідним, якщо ймовірність $p_{ij} = P(\xi_{n+1} = s_j / \xi_n = s_i)$ не залежить від n.

Перехід системи із стану $s_i = S(r)$ в стан $s_j = S(t)$ позначатимемо через (s_i, s_j).

Для марківського процесу в довільний момент часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи у майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану в момент t_0 і не залежить від того, коли і яким чином система S прийшла в цей стан. Типовим прикладом такого процесу є випадковий процес $\xi(t)$, що являє собою кількість дзвінків, які відбулися до моменту часу t у телекомунікаційній мережі.

Якщо $\xi(t)$ марківський процес, то в будь-який момент часу ймовірність переходу системи із стану s_i в стан s_j дорівнює нулю. Замість ймовірності переходу розглядається інтенсивність ймовірності переходу λ_{ij}, яка визначається як границя відношення ймовірності переходу із стану s_i в стан s_j за малий проміжок часу $[t, t + \Delta t]$ до довжини цього проміжку Δt.

Дамо більш строгі визначення.

Будемо називати ланцюг Маркова $\xi(t)$ неперервним справа, якщо з ймовірністю одиниця його траєкторії неперервні справа. Такий ланцюг Маркова є стохастично неперервним, тобто для нього виконуються співвідношення

$$\lim_{t\downarrow 0} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, \text{ якщо } i\neq j,\\ 1, \text{ якщо } i=j\end{cases}.$$

Крім того, для неперервного справа ланцюга Маркова існують границі

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_{ij}(h)-\delta_{ij}}{h}=\lambda_{ij}, \qquad (9.1)$$

які називають інтенсивностями переходів процесу $\xi(t)$, а матриця Λ з елементами λ_{ij} називається матрицею переходів. Із визначення випливає, що $\lambda_{ij}=\frac{d}{dt}p_{ij}(t)\Big|_{t=0}$.

Інтенсивності переходів мають такі властивості :

1) $\lambda_{ij}>0,\ i\neq j;\ i,j=0,1,2,\ldots$;

2) $\lambda_{ii}<0,\ i=0,1,2,\ldots$;

3) $\sum_{j=1}^{k\leq\infty}\lambda_{ij}=0,\ i=1,2,\cdots$;

4) для довільного i величина $\frac{1}{-\lambda_{ii}}$ є середнім часом перебування процесу в стані s_i.

Марківські процеси із дискретним числом станів зручно ілюструвати за допомогою графа станів, в якому колами (прямокутниками, трикутниками тощо) позначаються стани $s_0, s_1, s_2, \ldots$ системи S, а стрілками – можливі безпосередні переходи з одного стану в інший стан. Можливість затримки на деякому стані інколи позначають петлею. Особливо зручно користуватися графом станів для ланцюгів Маркова з неперервним часом, проставляючи напроти кожної стрілки (s_i, s_j) інтенсивність λ_{ij} потоку подій, що переводять систему із стану s_i в стан s_j. Такий граф називається розміченим.

Ймовірність того, що система, яка в момент часу t_0 знаходиться в стані s_i за проміжок часу $[t_0, t_0+\Delta t]$ перейде в стан s_j є ймовірність того, що за час Δt появиться хоча б одна подія, яка переводить систему S із стану s_i в стан s_j. З точністю до нескінченно малих вищих порядків ця ймовірність дорівнює $\lambda_{ij}\Delta t$.

Потоком ймовірностей із стану s_i в стан s_j називається величина $\lambda_{ij}(t)\,p_i(t)$. Тут $p_i(t)$ безумовна ймовірність того, що система S в момент часу t знаходиться в стані s_i, тобто $p_i(t)=P\{S(t)=s_i\}$.

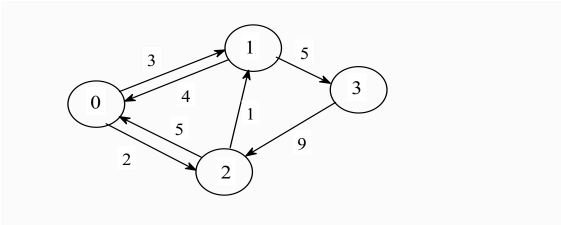
Очевидно, що для довільного t виконується рівність $\sum_{i=0}^{n\leq\infty}p_i(t)=1$. Для знаходження ймовірностей $p_0(t), p_1(t),\ldots, p_n(t),\ldots$ треба розв’язати систему диференціальних рівнянь Колмогорова, які мають вигляд

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=\sum_{j=0}^{n\leq\infty}\lambda_{ij}p_j(t)-p_i(t)\sum_{j=0}^{n\leq\infty}\lambda_{ij},\ i=0,1,2,\ldots \qquad (9.2)$$

при початковому розподілі ймовірностей $p_0(0), p_1(0),\ldots, p_n(0),\ldots;\ \sum_{i=0}^{n\leq\infty}p_i(t)=1$.

Рівняння Колмогорова зручно складати, використовуючи розмічений граф станів системи та дотримуючись такого правила : похідна ймовірності кожного стану дорівнює сумі всі потоків ймовірності, які переводять із інших станів у даний, мінус сума всіх потоків, які переводять із даного стану в інші.

Приклад



Для графа, зображеного на малюнку, рівняння Колмогорова (9.2) мають вигляд :

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = 4p_1(t) + 5p_2(t) - 5p_0(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = 3p_0(t) + p_2(t) - 5p_1(t),$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = 9p_3(t) + 2p_0(t) - 6p_2(t),$$
$$\frac{dp_3(t)}{dt} = 5p_1(t) - 9p_3(t).$$

Інтенсивності переходів у системі, що описується графом станів, можуть як залежати від часу, так і бути незалежними від часу.

Марківський процес з дискретними станами і неперервним часом називається однорідним, якщо інтенсивності переходів не залежать від часу, тобто $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} = const$.

Однорідний неперервний ланцюг Маркова називається ергодичним, якщо існують фінальні ймовірності станів

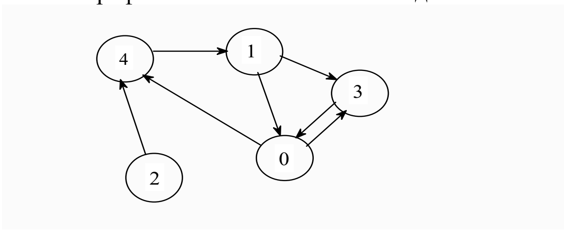
$$p_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t),\ i = 1, 2, \ldots \ , \qquad (9.3)$$

які не залежать від того, в якому стані знаходилася системи в початковий момент. Це означає, що з плином часу в системі настає граничний стаціонарний режим, при якому система переходить із стану в стан, але ймовірності станів при цьому не змінюються.

Для того, щоб сформулювати критерій існування фінальних ймовірностей, введемо поняття істотного та неістотного станів. Стан системи s_i називається істотним, якщо немає іншого стану s_j такого , що, перейшовши якимсь чином одного разу із s_i в s_j, система вже не може повернутися в s_i. Всі стани, які такої властивості не мають, називаються неістотними.

Пояснимо введені поняття істотного та неістотного станів на конкретному прикладі.

Приклад. Нехай граф станів системи має вигляд



Для графа, зображеного на рисунку, стани $0, 1, 3, 4$ істотні, а стан 2 неістотний.

Кажуть, що стани s_i та s_j сполучаються між собою, якщо на розміченому графі станів існує послідовність стрілок $\left(s_i, s_{k_1}\right), \left(s_{k_1}, s_{k_2}\right), \cdots, \left(s_{k_m}, s_j\right)$, для яких кінець будь-якої стрілки є початком наступної, перша починається в s_i, а остання закінчується в s_j.

Теорема. Якщо $\xi(t)$ ланцюг Маркова із неперервним часом та скінченним числом станів, то для існування фінальних ймовірностей необхідно і достатньо, щоб на розміченому графі станів всі істотні стани сполучалися.

Зауважимо, що якщо число станів системи зліченне, то існування фінальних ймовірностей залежить не тільки від графа станів, але від інтенсивностей λ_{ij}. Критерій для цього випадку ми опускаємо.

Фінальні ймовірності, якщо вони існують, визначаються із системи

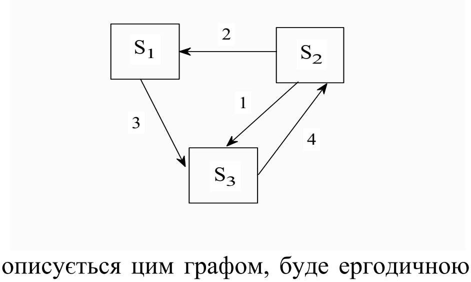
$$\sum_{j=0}^{n\le\infty} \lambda_{ij} p_j - p_i \sum_{j=0}^{n\le\infty} \lambda_{ij} = 0, \; i = 0, 1, 2, \ldots \;, \qquad (9.4)$$

яку отримаємо із рівнянь Колмогорова, поклавши $p_i(t) = p_i = const$.

Приклад. За матрицею інтенсивностей переходів побудувати граф станів, дослідити неперервний ланцюг Маркова на ергодичність та знайти та знайти фінальні ймовірності у випадку ергодичності

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Граф станів, що відповідає матриці Λ, має вигляд



Система, що описується цим графом, буде ергодичною, оскільки всі стани сполучаються між собою.

Відповідна система диференціальних рівнянь Колмогорова

$$\begin{cases} p_1'(t) = -3p_1(t) + 2p_2(t)\,, \\ p_2'(t) = -3p_2(t) + 4p_3(t)\,, \\ p_3'(t) = 3p_1(t) + p_2(t) - 4p_3(t) \end{cases}.$$

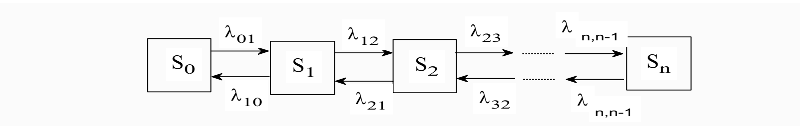
Для знаходження фінальних ймовірностей покладемо в цій системі $p_i'(t) = 0$, $p_i(t) = p_i = const$ та приєднаємо умову нормування $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Маємо

$$\begin{cases} -3p_1 + 2p_2 = 0\,, \\ -3p_2 + 4p_3 = 0\,, \\ 3p_1 + p_2 - 4p_3 = 0\,, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{2}{3}p_2\,, \\ p_3 = \dfrac{3}{4}p_2\,, \\ \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + 1\right)p_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{8}{29}\,, \\ p_2 = \dfrac{12}{29}\,, \\ p_3 = \dfrac{9}{29} \end{cases}.$$

Отже, система має граничний стаціонарний розподіл із фінальними ймовірностями

$$p_1 = \frac{8}{29},\ p_2 = \frac{12}{29},\ p_3 = \frac{9}{29}\ .$$

Процеси народження та загибелі. Найважливішим з точки зору практичних застосувань класом марківських процесів є процес народження та загибелі. Свою назву він дістав у зв'язку із задачами динаміки біологічних популяцій. Граф станів процесу народження та загибелі має такий вигляд :

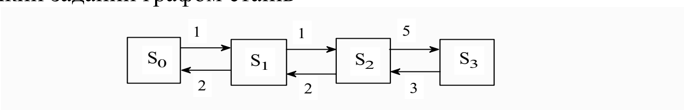


Тут $s_k, k = \overline{0,n}$ – впорядкована множина станів системи, λ_{ij} – інтенсивності переходу системи із стану i в стан j. Оскільки всі стани системи сполучаються між собою, то система має фінальні ймовірності, які знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$, $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$, $\cdots$, $\lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n$. , до якої додається умова нормування $p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$. Розв'язуючи дану систему, отримаємо значення фінальних ймовірностей :

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \qquad (9.5)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0\,,\ p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0\,,\ \cdots,\ p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0\ . \qquad (9.6)$$

Приклад. Знайдемо фінальні ймовірності для процесу народження та загибелі, який заданий графом станів



За формулами (9.5)-(9.6) отримаємо

$$p_0 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right)^{-1} = 0,46 \ , \ p_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,46 = 0,23,$$

$$p_2 = \frac{1}{4} \cdot 0,46 = 0,115, \ p_3 = \frac{5}{12} \cdot 0,46 = 0,195,$$

тобто при настанні стаціонарного режиму система буде знаходитися в середньому 46% часу в стані s_0, 23% – в стані s_1, 11,5% – в стані s_2, 19,5% – в стані s_3.

Запитання для самоперевірки знань

1. Як визначається марківський процес ?
2. Дайте визначення неперервного ланцюга Маркова та наведіть його основні властивості
3. Як знаходяться рівняння Колмогорова для неперервного ланцюга Маркова ?
4. Який існує критерій перевірки системи, що описується графом станів, на ергодичність ?
5. Як отримується система алгебраїчних рівнянь для визначення фінальних ймовірностей у випадку ергодичності системи ?
6. За якими формулами знаходяться фінальні ймовірності для процесів народження і загибелі ?

Лекція 10
Системи масового обслуговування

Інтенсивністю потоку λ називається середнє число подій, яке появляється в ньому за одиницю часу.

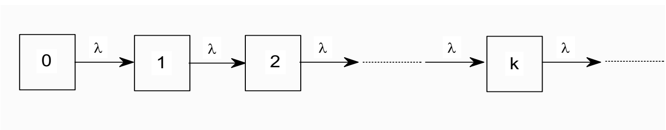
Потік подій називається стаціонарним, якщо ймовірність потрапляння довільної числа n подій на будь-який проміжок часу залежить тільки від довжини τ цього проміжку і не залежить від того, почînаючи з якого моменту він розглядається. Наприклад, появу покупців у продовольчій крамниці у вихідний день можна вважати стаціонарним потоком на протязі світлої частини дня.

Потік подій називається ординарним, якщо ймовірністю потрапляння на елементарний проміжок часу Δt двох чи більшого числа подій можна знехтувати у порівнянні з ймовірністю потрапляння на цей проміжок однієї події. З математичної точки зору, ймовірність появи хоча б однієї події на елементарному проміжку Δt дорівнює $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, причому $\lambda\Delta t$ ймовірність появи однієї події, а $o(\Delta t)$ – нескінченно мала величина вищого порядку мализни, ніж Δt. Ординарність потоку означає, що події в ньому появляються поодинці, а не групами. Так, потік потягів, що прибувають на станцію ординарний, а потік вагонів не ординарний.

Потік подій називається потоком без післядії, якщо кількість подій, які потрапляють на будь-який проміжок часу τ, не залежить від того скільки подій потрапило на будь-який інший проміжок часу, який з ним не перетинається. Відсутність післядії означає, що ймовірність появи події на проміжку $[t, t+\Delta t]$ не залежить від того скільки подій і в якій послідовності з’явилося до моменту часу t. Таким чином, попередня історія потоку не впливає на ймовірність появи нових подій у найближчому майбутньому. Наприклад, надходження текстових повідомлень у телекомунікаційну мережу утворює потік без післядії. На противагу цьому прикладу, черга в магазині за дефіцитом не є потоком без післядії, оскільки довжина черги може вплинути на рішення покупця ставати в чергу чи відкласти покупку на майбутнє.

Потік подій називається найпростішим (або пуассонівським), якщо він одночасно стаціонарний, ординарний та без післядії.

Розглянемо систему масового обслуговування, в яку надходить потік замовлень із інтенсивністю λ. Станом такої СМО будемо вважати число замовлень, яке надійшло до неї. Система описується марківським процесом із дискретним числом станів $1, 2, \ldots, k, \ldots$, причому із стану i можна перейти тільки в стан $i+1$. Граф станів має вигляд



Складемо рівняння Колмогорова для даного марківського процесу.

$$\begin{cases} p_0(t) = -\lambda p_0(t), \\ p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \\ p_0(0) = 1,\, p_k(0) = 0 \end{cases}.$$

Дістали систему лінійних диференціальних рівнянь, яка містить зліченне число рівнянь та зліченну кількість невідомих функцій $p_k(t), k = 0, 1, 2, \dots$, які задають ймовірності перебування системи у відповідному стані.

Виконаємо в системі заміну $r_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$. Тоді дістанемо

$$r_0'(t) = \lambda r_0(t) + e^{\lambda t} r_0'(t) = \lambda r_0(t) - \lambda e^{\lambda t} p_0(t) = 0,$$

$$r_k'(t) = \lambda r_k(t) + e^{\lambda t} r_k'(t) = \lambda r_k(t) + \lambda e^{\lambda t} p_k(t) - \lambda e^{\lambda t} p_k(t) = \lambda r_{k-1}(t).$$

Отже, маємо систему

$$r_0'(t) = 0,\; r_k'(t) = \lambda r_{k-1}(t),\; k = 1, 2, \dots$$

з початковими умовами $r_0(0) = 1, r_k(0) = 0$.

Внаслідок інтегрування цієї системи, яке здійснюється очевидним чином, дістаємо розв'язок

$$r_0(t) = 1, r_1(t) = \lambda t, \cdots, r_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \cdots .$$

Повертаючись до вихідних функцій, дістаємо

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \qquad (10.1)$$

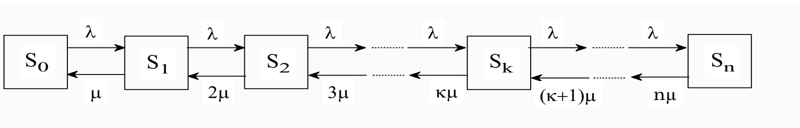
Таким чином, ймовірність того, що за проміжок часу тривалістю t в систему надійде k замовлень, виражається формулою (10.1), тобто має розподіл Пуассона.

Знайдемо закон розподілу тривалості проміжків часу між двома сусідніми замовленнями., тобто функцію розподілу $F(t) = P\{\tau < t\}, t \ge 0$. Проміжок часу між двома сусідніми замовленнями буде меншим за t, тобто відбудеться подія $\{t < \tau\}$, якщо в систему надійде принаймні одне замовлення. Звідси

$F(t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Отже, величина тривалості проміжків часу між двома сусідніми замовленнями має показниковий закон розподілу. Зауважимо, що $\lambda = \frac{1}{M[T]}$, де $M[T]$ - математичне сподівання тривалості інтервалів між двома сусідніми замовленнями.

Багатоканальна СМО з відмовами. Припустимо, що в систему, яка має n каналів обслуговування, надходить потік замовлень з інтенсивністю λ, а потік обслуговування має інтенсивність $\mu = \frac{1}{\overline{t_{обс}}}$, де $\overline{t_{обс}}$ – середній час обслуговування. Система має $n+1$ стан: s_0 – в системі немає замовлень, $s_k, k = \overline{1,n}$ – в системі знаходиться k замовлень. Граф станів системи, який відповідає процесу народження та загибелі, зображений на рисунку.



Фінальні ймовірності станів системи знаходяться за формулами

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}, \; p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \, k = \overline{1,n} \; . \quad (10.2)$$

Позначимо через $\nu = \dfrac{\lambda}{\mu}$ величину, яка називається інтенсивністю завантаження каналу. Тоді формули для фінальних ймовірностей набувають вигляду

$$p_0 = \left(1 + \nu + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu^n}{n!}\right)^{-1}, \; p_k = \frac{\nu^k}{k!} p_0, \, k = \overline{1,n} \; . \quad (10.3)$$

Фінальні ймовірності даної СМО та описані далі показники ефективності були знайдені Ерлангом.

1) Ймовірність того, що обслуговуванням зайняті k каналів дорівнює ймовірності перебування системи в стані s_k, $k = \overline{1,n}$, тобто дорівнює

$$p_k = \frac{\nu^k}{k!}\left(1 + \nu + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu^n}{n!}\right)^{-1}, \, k = \overline{1,n} \; .$$

Найважливішими частинними випадками знайденого співвідношення будуть:

а) ймовірність відмови СМО $p_{відм} = \dfrac{\nu^n}{n!} p_0$;

б) ймовірність того, що всі канали вільні $p_0 = \left(1 + \nu + \dfrac{\nu^2}{2!} + \cdots + \dfrac{\nu^n}{n!}\right)^{-1}$.

2) Середнє число каналів, які зайняті обслуговуванням, $Mk = \overline{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} k p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k\nu^k}{k!} p_0$.

3) Коефіцієнт завантаження каналів $k_{зав} = \dfrac{\overline{k}}{n}$.

4) Середнє число вільних каналів $k_0 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\nu^k (n-k)}{k!} p_0$.

5) Коефіцієнт простою каналу $k_{пр} = \dfrac{k_0}{n}$.

Приклад. Оцінити роботу АТЗ, яка має 5 ліній зв'язку. Припускається, що потік замовлень найпростіший із інтенсивністю викликів $\lambda = 2$ виклики / од. часу. Тривалість розмов розподілена експоненціально, причому $\overline{t_{обс}} = 1$ од. часу.

Визначимо інтенсивність завантаження каналу $\nu = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \overline{t_{обс}} = 2$.
Ймовірність того, що всі лінії вільні дорівнює

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{5} \frac{\nu^k}{k!} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!} \right)^{-1} = 0,138 \ .$$

Ймовірність відмови СМО

$$p_{відм} = \frac{\nu^n}{n!} p_0 = \frac{2^5}{5!} \cdot 0,138 = 0,037 \ .$$

Середнє число зайнятих ліній зв’язку

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{n} k p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\nu^k}{k!} p_0 = \left(1 \cdot \frac{2^1}{1!} + 2 \cdot \frac{2^2}{2!} + 3 \cdot \frac{2^3}{3!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 5 \cdot \frac{2^5}{5!} \right) \cdot 0,138 = 1,93 \text{ ліній.}$$

Коефіцієнт завантаження ліній зв’язку

$$k_{зав} = \frac{\overline{k}}{n} = \frac{1,93}{5} = 0,386 \approx 0,39 \ .$$

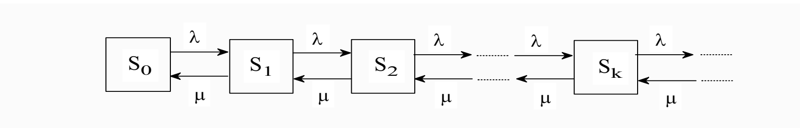
Середнє число вільних ліній зв’язку

$$k_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\nu^k (n-k)}{k!} p_0 = \sum_{k=0}^{4} \frac{2^k (5-k)}{k!} \cdot 0,138 = 3,05$$

Коефіцієнт простою каналу дорівнює

$$k_{пр} = \frac{k_0}{n} = \frac{3,05}{5} = 0,61 \ .$$

Одноканальна СМО з необмеженою чергою. Розглянемо СМО для якої немає обмежень ні на довжину черги , ні на час очікування. Система має один канал обслуговування, до неї надходить потік замовлень з інтенсивністю λ, а потік обслуговування має інтенсивність μ. Нехай s_0 – стан, коли в системі немає замовлень, $s_k, k = \overline{1,\infty}$ – стан, коли в системі знаходиться k замовлень. Граф станів системи, який відповідає процесу народження та загибелі, зображений на рисунку.



Якщо $\nu = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ (у випадку $\nu \geq 1$ черга зростає до нескінченності), то фінальні ймовірностей даної системи існують. Формули для фінальних ймовірностей випливають із загальних формул фінальних ймовірностей процесу народження та загибелі.

Отже, маємо

$$p_0 = \left(1 + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n + \cdots\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^{-1} = 1 - \nu, \ p_k = \nu^k (1-\nu), k = \overline{1,\infty} \ . \quad (10.4)$$

Фінальні ймовірності утворюють спадну геометричну прогресію із знаменником $\nu < 1$, тобто ймовірність p_0 є найбільшою. Це означає, що якщо СМО може обслугувати потік замовлень (при $\nu < 1$), то найбільш ймовірним станом буде відсутність замовлень в системі.

Дана СМО характеризується такими показниками.

1) Середнє число замовлень в системі дорівнює

$$\overline{k}_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = (1-\nu)\sum_{k=1}^{\infty} k\nu^k = \frac{\nu}{1-\nu} .$$

2) Середнє число замовлень, які обслуговуються, дорівнює ймовірності того, що канал зайнятий, тобто $\overline{k}_{обсл} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1-p_0) = 1 - p_0 = p_{зайн}$.

3) Середнє число замовлень в черзі дорівнює $\overline{k}_{черги} = \overline{k}_{сист} - \overline{k}_{обсл}$. Оскільки $\overline{k}_{обсл} = 1 - p_0 = \nu$, то $\overline{k}_{черги} = \frac{\nu^2}{1-\nu}$.

В теорії черг доведено, що при будь-якому характері потоку заявок, при будь-якому розподілі часу обслуговування середній час перебування заявки в системі (черзі) дорівнює середньому числу заявок в системі (черзі), поділеному на інтенсивність потоку замовлень, тобто

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{k}_{сист} , \quad T_{черги} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{k}_{черги} .$$

Ці співвідношення називаються формулами Літтла. Вони випливають з того, що в граничному стаціонарному режимі середнє число замовлень, які надходять до системи, дорівнює числу замовлень, які покидають її, обидва потоки заявок мають одну і ту саму інтенсивність λ.

Використавши формули Літтла, знайдемо середній час перебування замовлення в даній СМО та в черзі даної СМО.

4) Середній час перебування замовлення в системі дорівнює

$$T_{сист} = \frac{\nu}{\lambda(1-\nu)} .$$

5) Середній час перебування замовлення в черзі дорівнює

$$T_{черги} = \frac{\nu^2}{\lambda(1-\nu)} .$$

Приклад. В порту є один причал для розвантаження суден. Інтенсивність потоку суден дорівнює 0,4 суден на добу. Середній час розвантаження одного судна дорівнює дві доби. Припускається, що черга може бути як завгодно великою. Знайти показники ефективності роботи причалу, а також ймовірність того, що чекають розвантаження не більше 2-х суден. Спочатку обчислимо

$$\nu = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\overline{t_{обс}} = 0,4 \cdot 2 = 0,8 .$$

Оскільки $\nu = 0,8 < 1$, то черга на розвантаження не може нескінченно зростати і граничні ймовірності існують. Знайдемо ці ймовірності.

Ймовірність того, що причал вільний дорівнює $p_0 = 1 - \nu = 1 - 0,8 = 0,2$, а ймовірність того, що він зайнятий дорівнює $p_{зайн} = 1 - 0,2 = 0,8$.

Ймовірності того, що біля причалу знаходяться 1,2,3 судна (тобто чекають на розвантаження 0,1,2 судна) дорівнюють

$$p_1 = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;\; p_2 = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128;\; p_3 = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024 \;.$$

Отже, ймовірність того, що розвантаження чекають не більше, ніж 2-є суден дорівнює

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = 0,16 + 0,128 + 0,1024 = 0,3904 \;.$$

Середнє число суден, що чекають розвантаження

$$\overline{k}_{черги} = \frac{\nu^2}{1-\nu} = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,2 \quad .$$

Середній час очікування розвантаження дорівнює

$$T_{черги} = \frac{\overline{k}}{\lambda} = \frac{3,2}{0,4} = 8 \text{ діб.}$$

Середнє число суден , що знаходяться біля причалу, дорівнює

$$\overline{k}_{сист} = \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4,$$

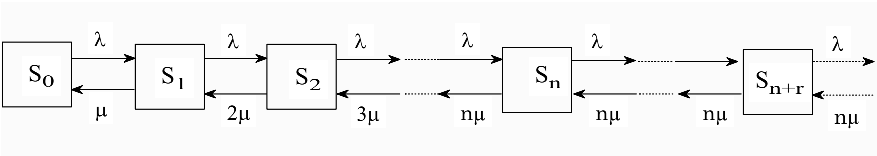
а середній час перебування судна біля причалу дорівнює

$$T_{сист} = \frac{\nu}{\lambda(1-\nu)} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ діб.}$$

Очевидно, що ефективність розвантаження низька. Для її підвищення треба зменшення середнього часу розвантаження судна або збільшення числа причалів.

Багатоканальна СМО з необмеженою чергою. Розглянемо СМО, яка має n каналів обслуговування і в якій можлива черга довільної довжини. До системи надходить потік замовлень з інтенсивністю λ, а потік обслуговування кожного з каналів має інтенсивність μ. Нехай s_0 – стан, коли в системі немає замовлень, $s_k, k = \overline{1,n}$ – стани, коли в системі обслуговуються k замовлень, $s_{n+r}, r = \overline{1,\infty}$ – стани, коли n замовлень обслуговуються, а r знаходяться в черзі.

Граф станів системи, який відповідає процесу народження та загибелі, зображений на рисунку.



Знайдемо фінальні ймовірності системи та формули розрахунку основних показників ефективності системи.

Внаслідок формул фінальних ймовірностей процесу народження та загибелі

$$p_0 = \left(1 + \nu + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu^n}{n!} + \frac{\nu^{n+1}}{n!(n-\nu)}\right)^{-1}, \; p_k = \frac{\nu^k}{k!} p_0, \, k = \overline{1,n}, \; p_{n+r} = \frac{\nu^{n+r}}{n^r n!} p_0, \, r = \overline{1,\infty}. \quad (10.5)$$

Основні характеристики даної системи:

1) ймовірність того, що замовлення опиниться в черзі , дорівнює

$$p_{черги} = \frac{\nu^{n+1}}{n!(n-\nu)} p_0 \;;$$

2) середнє число замовлень, які обслуговуються в системі, дорівнює

$$\overline{k}_{обсл} = \frac{\lambda}{\mu} = \nu \;;$$

3) середнє число замовлень в черзі дорівнює $\overline{k}_{черги} = \dfrac{\nu^{n+1}}{n \cdot n!(1-\nu/n)^2} p_0$;

4) середнє число замовлень в системі дорівнює

$$\overline{k}_{сист} = \overline{k}_{черги} + \overline{k}_{обсл} = \overline{k}_{черги} + \nu \;;$$

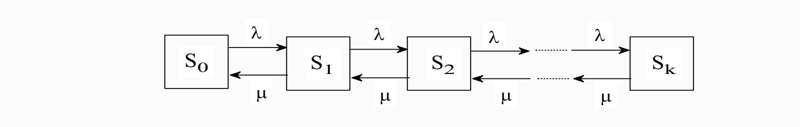
5) середній час перебування замовлення в системі дорівнює

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\nu^{n+1}}{n \cdot n!(1-\nu/n)^2} p_0 + \nu\right) \;;$$

6) середній час перебування замовлення в черзі дорівнює

$$T_{черги} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\nu^{n+1}}{n \cdot n!(1 - \nu / n)^2} p_0 \ .$$

Одноканальна СМО з обмеженою чергою. В даній системі довжина черги обмежується n. Граф станів системи має вигляд:



Фінальні ймовірності системи обчислюються за формулами

$$p_0 = \frac{1-\nu}{1-\nu^{n+1}}; \ p_k = \nu^k p_0; \ k = \overline{1,n} .$$

До основних показників даної СМО належать такі:

1) ймовірність відмови $p_{відм} = p_{n+1} = \nu^{n+1} p_0$. Відмова відбувається, коли в систему надходить $n+1$ замовлення ;

2) середнє число заявок в черзі $\bar{k}_{черги} = \nu^2 \dfrac{\left(1-\nu^m\left(m+1-m\nu\right)\right)}{\left(1-\nu\right)\left(1-\nu^{m+2}\right)}$;

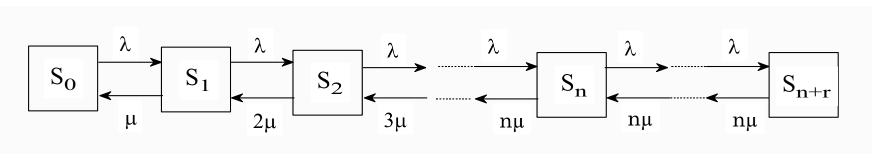
3) середнє число замовлень, які обслуговуються $\bar{t}_{обсл} = 1 - p_0$;

4) середнє число замовлень в системі $\bar{k}_{сист} = \bar{k}_{черги} + \bar{k}_{обсл}$;

5) відносна пропускна здатність, тобто ймовірність того, що замовлення надійде на обслуговування, дорівнює $Q = 1 - p_{відм} = 1 - \nu^{n+1} p_0$;

6) абсолютна пропускна здатність $A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \nu^{n+1} p_0\right)$.

Багатоканальна СМО з обмеженою чергою. Розглянемо систему, яка має n каналів обслуговування та в якій можлива черга максимальної довжини m. Граф станів даної системи має вигляд :



Подамо формули основних показників системи.

1) Ймовірність того, що обслуговуванням зайняті k каналів та ймовірності того, що всі n каналів зайняті, а r замовлень перебуває в черзі, знаходяться за формулами:

$$p_0 = \left(1 + \nu + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu^n}{n!} + \frac{\nu^{n+1}\left(1-\nu/n\right)^m}{n \cdot n!\left(1-\nu/n\right)}\right)^{-1}, \; p_k = \frac{\nu^k}{k!}p_0, \, k = \overline{1,n}, \; p_{n+r} = \frac{\nu^{n+r}}{n^r n!}p_0, \, r = \overline{1,m}.$$

2) Ймовірність відмови $p_{відм} = p_{n+m} = \frac{\nu^{n+m}}{n^m n!}p_0$. Відмова відбувається, коли в систему надходить $n+m+1$ замовлення.

3) Середнє число заявок в черзі дорівнює

$$\bar{k}_{черги} = \frac{\nu^{n+1}p_0\left(1-\left(m+1-m\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\nu}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n!\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2}.$$

4) Середнє число замовлень, які обслуговуються $\bar{k}_{обсл} = \nu\left(1-\frac{\nu^{n+m}}{n^m n!}p_0\right)$.

5) Середнє число замовлень в системі $\bar{k}_{сист} = \bar{k}_{черги} + \bar{k}_{обсл}$.

6) Відносна пропускна здатність, тобто ймовірність того, що замовлення надійде на обслуговування, дорівнює $Q = 1 - p_{відм} = 1 - \frac{\nu^{n+m}}{n^m n!}p_0$.

7) Абсолютна пропускна здатність $A = \lambda Q = \lambda\left(1-\frac{\nu^{n+m}}{n^m n!}p_0\right)$.

Запитання для самоперевірки знань

1. Назвіть основні показники ефективності системи масового обслуговування.
2. Які основні властивості простого вхідного потоку вимог ?
3. Які основні характеристики системи масового обслуговування з відмовами ?
4. Які основні характеристики системи масового обслуговування з обмеженою та необмеженою чергами ?

Лекція 11
Задачі та моделі упорядкування. Задача про комівояжера

На виробництві та в іншій практичній діяльності доводиться зустрічатися з проблемою визначення послідовності виконання робіт, тобто їх упорядкування, з метою мінімізації терміну виконання комплексу робіт чи оптимізації за деяким іншим показником ефективності.

Технологічна операція та машина (верстат, агрегат тощо) є основними поняттями, якими характеризується процес виконання робіт на виробництві.

При використанні декількох машин розглядають такі задачі упорядкування (календарного планування) :

1) кожна з робіт комплексу зводиться до виконання тільки однієї операції, яка може бути виконана на будь-якому з наявних верстатів (однофазна система паралельно працюючих машин);

2) всі роботи комплексу складаються з одних і тих самих операцій, послідовність яких строго фіксована для всіх робіт (багатофазна система або конвеєр) .

Задача календарного планування для одного верстата. Припустимо, що на верстаті необхідно обробити n деталей, знаючи, що час виконання дій по обробці i-ї деталі ($i=\overline{1,n}$) відомий і дорівнює t_i, а час підготовки агрегату до обробки i-ї деталі після завершення обробки j-ї деталі дорівнює τ_{ij}, $i,j=\overline{1,n}, i\neq j$. Потрібно знайти таку послідовність обробки деталей, при якій мінімізується час проходження всіх деталей

$$R(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n} t_i+\sum_{(i,j)\in l}\tau_{sj}\rightarrow \min_{l\in L}\ , \quad (11.1)$$

де l – послідовність деталей довжини n, L – множина всіх послідовностей довжини n.

Очевидно, що оптимальна довжина $R(t,\tau)$ залежить від другого доданку і коригується на сталу величину $\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Оскільки внаслідок технологічного змісту величини $\tau_{ii}, i=\overline{1,n}$ відсутні, то позначимо діагональні елементи матриці M тривалості переналадок ∞ і тоді прийдемо до, так званої, задачі про комівояжера. Розглянемо цю задачу в класичній постановці.

Задача про комівояжера. В ході поїздки комівояжер повинен побувати в кожному з n міст лише по одному разу і повернутися у вихідне місто таким чином, щоб довжина подоланого маршруту була найменшою. Відстані між містами задані матрицею

$$C=\begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}.$$

У загальному випадку $c_{ij} \neq c_{ji}$. Це може означати, наприклад, що з міста A_i в місто A_j можна приїхати якимось видом транспорту, а з міста A_j в місто A_i можна дістатися лише іншим видом транспорту. Знаки «∞» у матриці C, які знаходяться на головній діагоналі, використовуються для позначення заборони переходу з міста у це саме місто. Ці самі символи будуть використовуватися також при розгляді алгоритму розв'язання задачі для позначення заборони переходу із міста A_i в місто A_j.

Дана задача може бути розв'язана дискретним варіантом методу розгалужень та меж. Особливості розв'язання в знаходженні оцінок довжини маршрутів та вилученні замкнутих контурів довжини меншої за n.

Позначимо множину всіх маршрутів довжини n через G, а через s позначимо маршрут послідовного переміщення комівояжера по містах $i_1, i_2, \cdots, i_n$. Отже, за означенням

$$s = (i_1, i_2, \cdots, i_n) = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_{21})\} = i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_n \to i_1 .$$

При цьому говоримо, що дільниця $(i_{k-1}, i_k), k = \overline{1,n}$ входить до маршруту s і позначаємо $(i_{n-1}, i_n) \in s$.

Довжину маршруту будемо позначати через l, тобто

$$l(s) = l(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \sum_{(i,j)\in s} c_{ij} .$$

Величина $\delta_1 = \min\{c_{12}, c_{13}, \cdots, c_{1n}\}$ дорівнює мінімальній відстані, яку комівояжер подолає після того, як він залишить місто A_1 і направиться в одне з інших міст. Аналогічний сенс мають всі величини $\delta_i = \min\{c_{i2}, c_{i3}, \cdots, c_{in}\}$. Оскільки маршрут має виходити з кожного міста , то величина $\omega_* = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$ дає нижню оцінку довжини маршруту, тобто менше цієї відстані комівояжер не подолає, яким би маршрут не був. Враховуючи сказане, віднімемо від i рядка матриці δ_i. Тоді елементи отриманої матриці складають «перевищення» мінімально необхідних відстаней δ_i для переходу з міста A_i в місто A_j. Маємо

$$C' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & c'_{12} & \cdots & c'_{1n} \\ c'_{21} & \infty & \cdots & c'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \cdots & \infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdots \\ \delta_n \end{array} , \quad c_{ij} = c'_{ij} + \delta_i , i, j = \overline{1,n} .$$

В кожному рядку матриці C' міститься хоча б один нуль. Зробимо уточнення оцінки маршруту. Для цього подамо довжину маршруту, враховуючи виконане перетворення. Отже,

$$l(s) = l(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \sum_{(i,j)\in s} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in s} (c'_{ij} + \delta_i) = \sum_{(i,j)\in s} c_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{(i,j)\in s} c_{ij} + \omega_* .$$

Неважко упевнитися, що величина $\Delta_j = \min\left\{c'_{2j}, c'_{3j}, \cdots, c'_{nj}\right\}$ це мінімальна відстань, яку треба додатково подолати комівояжеру, щоб з якогось міста потрапити в місто A_j.

Отже, оцінку довжини маршруту можна уточнити на величину $\omega^* = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, тобто взяти за оцінку довжини маршруту

$$\omega_0 = \omega_* + \omega^* = \sum_{i=1}^{n} \delta_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \quad . (11.2)$$

Якщо від i-го стовпця, $i = \overline{1,n}$ матриці C' віднімемо Δ_i, то дістанемо матрицю

$$C'' = \begin{pmatrix} \infty & c''_{12} & \cdots & c''_{1n} \\ c''_{21} & \infty & \cdots & c''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c''_{n1} & c''_{n2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}, c_{ij} = c''_{ij} + \delta_i + \Delta_j \, , i, j = \overline{1,n} \quad .$$

В кожному стовпці отриманої матриці міститься хоча б один нуль, а довжина довільного маршруту задачі виражається формулою

$$l(s) = l(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \sum_{(i,j)\in s} c''_{ij} + \omega_0 \quad . \quad (11.3)$$

Таким чином, в оптимальний маршрут задачі треба включати пари міст так, щоб величина $\sum_{(i,j)\in s} c''_{ij}$ була мінімальною.

Якщо можна вибрати n нулів матриці C'' так, щоб вони стояли в різних рядках та різних стовпцях і при цьому їх індекси не утворюють замкнутих контурів вигляду

$$s_k = \left\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)\right\}, k < n \ ,$$

то тим самим буде знайдено оптимальний розв’язок задачі.

В противному разі алгоритм розв’язання треба продовжити. Будемо послідовно включати в шуканий оптимальний маршрут ті пари міст, для яких $c''_{ij} = 0$. Для пошуку перспективної пари міст чинимо так.

Нехай $c_{ij} = 0$. Безпосередній перехід із міста A_k в місто A_m назвемо «прямим», а перехід із міста A_k в місто A_m через якесь інше місто A_q «обхідним». Для кожної пари (k, m) за оцінку довжини мінімального манівця візьмемо

$$\lambda(k, m) = \min_{t \neq m} c_{k\,t} + \min_{r \neq k} c_{r\,m} \quad . \qquad (11.4)$$

За перспективну, тобто таку, що наразі включається в маршрут, візьмемо ту пару міст A_{k_*} та A_{m_*}, для якої $c_{k_* m_*} = 0$ і

$$\lambda(k_*, m_*) = \max_{(k,m)} \lambda(k, m) . \qquad (11.5)$$

Множину всіх повних маршрутів (їх $n!$ і серед них є такі, що містять замкнуті контури довжини, меншої за n) поділимо на дві множини V та W. Множина V складається з тих маршрутів, які мають прямий перехід із A_{k_*} в A_{m_*}, а множина W складається з тих маршрутів, які не мають прямого переходу із міста A_{k_*} в місто A_{m_*}.

За оцінку множини W візьмемо

$$\Lambda(W)=\omega_0+\lambda(k_*,m_*), \qquad (11.6)$$

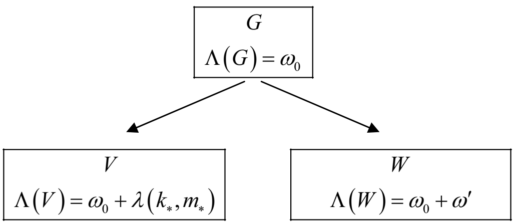
де ω оцінка довільного маршруту, а при переході із A_{k_*} в A_{m_*}, манівцями довжина маршруту збільшиться щонайменше на величину $\lambda(k_*,m_*)$.

Знайдемо оцінку для множини маршрутів V. Оскільки є перехід із A_{k_*} в A_{m_*}, то покладемо $c_{m_*,k_*}=\infty$, заборонивши перехід із A_{m_*} в A_{k_*}. Місто із A_{k_*} включене в перспективний маршрут, тобто з нього комівояжер більше виходити не буде, і тому його треба виключити з розгляду, викресливши з матриці рядок з номером k_*. Аналогічно виключаємо з розгляду стовпчик з номером m_*, викресливши його, бо місто A_{m_*} включене в перспективний маршрут і в нього комівояжер більше входити не буде. При цьому зберігаємо у матриці вихідну нумерацію рядків та стовпчиків. Після таких перетворень у деяких рядках чи стовпчиках матриці можуть зникнути нулі. Для отриманої матриці виконаємо описані раніше перетворення обчислюючи величини δ_i', Δ_i' і знайдемо величину $\omega'=\sum_{i=1}^{n}\delta_i'+\sum_{j=1}^{n}\Delta_j'$, про яку можна сказати , що комівояжер, у зв'язку із включенням до маршруту (k_*,m_*), повинен додатково до мінімально необхідного шляху подолати ще відстань ω'.

Таким чином, оцінка довжини маршрутів, що входять до V, складає

$$\Lambda(V)=\omega_0+\omega' \ . \qquad (11.7)$$

Можна констатувати, що дерево варіантів методу розгалужень і меж набуває вигляду :



У цьому дереві дві вершини. Вибираємо ту з них, для якої менша оцінка. На першому кроці ймовірно, що це буде вершина, яка відповідає множині $V=V(k_*,m_*)$. Далі продовжуємо розгалуження вибраної перспективної множини на дві підмножини описаним вище способом, а іншу вершину залишаємо «висячою». Зауважимо, що нова перспективна пара міст не обов'язково є продовженням уже побудованого маршруту. Процес триває доти, доки в матриці не залишиться два рядки та два стовпці, що дозволяє вибрати дві останні пари міст і завершити побудову оптимального маршруту.

При приєднанні нової пари міст треба перевіряти, щоб з включених пар не можна було утворити замкнутий контур. Якщо після приєднання пари (t,r) такий контур можна утворити, то треба покласти $c''_{tr}=\infty$ і продовжити алгоритм.

Якщо на якомусь кроці оцінка виявиться кращою для однієї з раніше побудованих вершин (типу V або типу W), то треба повернутися до такої вершини і розгалузити її. При цьому, якщо треба повернутися до вершини типу $V=V(p,q)$, то алгоритм продовжується відомим способом. Якщо ж треба повернутися до вершини типу $W=W(p,q)$, то в матриці, у якій був вибраний перехід (p,q), слід заборонити цей перехід, поклавши $c''_{pq}=\infty$, і після цього продовжити алгоритм.

Приклад. Розв'язати задачу про комівояжера, якщо відстані між містами задані матрицею

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 14 & 7 & 8 & 19 \\ 13 & \infty & 11 & 10 & 15 \\ 9 & 12 & \infty & 21 & 13 \\ 14 & 11 & 8 & \infty & 10 \\ 20 & 14 & 9 & 17 & \infty \end{pmatrix}.$$

Згідно з алгоритмом розв'язання виконаємо спрощення матриці і знайдемо ω_0.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 14 & 7 & 8 & 19 \\ 13 & \infty & 11 & 10 & 15 \\ 9 & 12 & \infty & 21 & 13 \\ 14 & 11 & 8 & \infty & 10 \\ 20 & 14 & 9 & 17 & \infty \end{pmatrix} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \delta_i \\ 7\\10\\9\\8\\9 \\ \\ \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \\ \Delta_j \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 7 & 0 & 1 & 12 \\ 3 & \infty & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & \infty & 12 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & \infty & 2 \\ 11 & 5 & 0 & 8 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & 3 & & & 2 \end{array} \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 8 & \infty \end{pmatrix} \\ \\ \end{array}$$

Використавши знайдені значення δ_i та Δ_j, обчислимо початкову нижню оцінку довжини маршрутів $\omega_0=\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\sum_{j=1}^{n}\Delta_j=43+5=48$. Оцінимо кожен нуль отриманої матриці, проставивши оцінку як степінь нуля, виберемо нуль з найбільшою оцінкою $\lambda(3,1)=3$, включимо пару міст $(3,1)$, яка йому відповідає, в шуканий маршрут, обчислимо оцінку вершини типу *W*, тобто оцінку $\Lambda=\Lambda\overline{(3,1)}=48+3=51$, та виконаємо редукцію матриці викреслюванням третього рядка та першого стовпчика та забороною зворотного переходу $c_{13}=\infty$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 4 & 0 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 0^2 & 3 \\ 3 & 0^3 & 0 & \infty & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & \infty & 0^2 \\ 5 & 11 & 2 & 0^2 & 8 & \infty \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 4 & \infty & 1 & 10 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 & \infty \end{array}.$$

Далі виконаємо спрощення отриманої матриці і знайдемо оцінку вершини розгалуження типу V, тобто оцінку

$$\Lambda(3,1) = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i' + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j' = \omega_1 = 48 + 1$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 3 & 4 & 5 & \delta_i' \\ \hline 1 & 4 & \infty & 1 & 10 & 1 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 & \infty & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \infty & 0 & 9 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 & \infty \end{array}.$$

В спрощеній матриці знову оцінимо кожен нуль. Нулів з максимальним значенням оцінки, рівним 3, виявиться два: $(1,4)$ та $(4,5)$. Включимо (не обов'язково назавжди) міста, що відповідають одному з цих нулів, наприклад $(1,4)$ в шуканий оптимальний маршрут. Обчислимо оцінку $\Lambda\overline{(1,4)} = \omega_1 + \lambda(1,4) = 49 + 3 = 52$ і виконаємо чергову редукцію матриці викреслюванням першого рядка та четвертого стовпчика.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \infty & 0^3 & 9 \\ 2 & \infty & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0^2 & 0 & \infty & 0^3 \\ 4 & 2 & 0^2 & 8 & \infty \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & \infty \end{array}$$

Далі виконаємо спрощення отриманої матриці і знайдемо оцінку $\Lambda(1,4) = \omega_1 + \sum_{i=1}^{n} \delta_i'' + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j'' = \omega_2 = 49 + 1 = 50$.

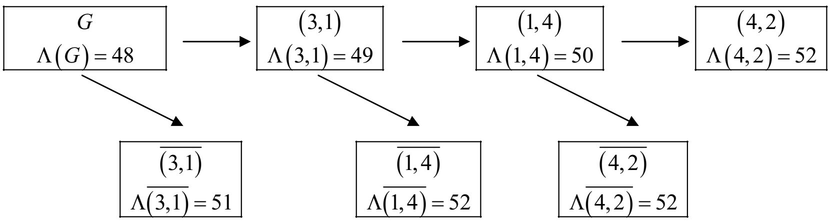
$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 3 & 5 & \delta_i \\ \hline 2 & \infty & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & \infty \end{array}.$$

В отриманій матриці оцінимо кожен нуль. Нулів з максимальною оцінкою, рівною 2, виявиться чотири. Включимо (можливо, лише на час розв’язання задачі) пару міст, що відповідає, наприклад, $(4,2)$ в шуканий оптимальний маршрут. Далі обчислимо оцінку $\Lambda\left(\overline{4,2}\right)=\omega_2+\lambda\left(4,2\right)=50+2=52$ і знову виконаємо редукцію задачі.

$$\begin{array}{c} \\ 2\\ 4\\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 0^2 & 2\\ 0^2 & 0 & 0^2\\ 2 & 0^2 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 2\\ 5\\ \Delta_j \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & \infty \end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc} 0 & 2 \end{array} \end{array}.$$

Далі виконаємо спрощення отриманої матриці і обчислимо оцінку $\Lambda\left(4,2\right)=\omega_2+\sum_{i=1}^{n}\delta_i'''+\sum_{j=1}^{n}\Delta_j'''=\omega_3=50+2=52$.

Фрагмент дерева розв'язку має вигляд :



Помічаємо, що мінімальною оцінкою на даному кроці є $\Lambda\overline{\left(3,1\right)}=51$. Тому слід повернутися до матриці, використовуючи ту, де була вибрана пара $\left(3,1\right)$, і заборонити вибір, поклавши $c_{31}=\infty$, та продовжити процес побудови оптимального маршруту в цьому випадку.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 14 & 7 & 8 & 19\\ 13 & \infty & 11 & 10 & 15\\ \infty & 12 & \infty & 21 & 13\\ 14 & 11 & 8 & \infty & 10\\ 20 & 14 & 9 & 17 & \infty \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \delta_i\\ 7\\ 10\\ 12\\ 8\\ 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ \Delta_j \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 7 & 0 & 1 & 12\\ 3 & \infty & 1 & 0 & 5\\ \infty & 0 & \infty & 9 & 1\\ 6 & 3 & 0 & \infty & 2\\ 11 & 5 & 0 & 8 & \infty \end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc} 3 & & & & 1 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\\ \begin{pmatrix} \infty & 7 & 0 & 1 & 11\\ 0 & \infty & 1 & 0 & 4\\ \infty & 0 & \infty & 9 & 0\\ 3 & 3 & 0 & \infty & 1\\ 8 & 5 & 0 & 8 & \infty \end{pmatrix} \end{array}.$$

Використавши знайдені значення δ_i та Δ_j, обчислимо початкову нижню оцінку довжини маршрутів $\omega_0=\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\sum_{j=1}^{n}\Delta_j=46+4=50$. Оцінимо кожен нуль отриманої матриці, проставивши оцінку як степінь нуля, виберемо нуль з найбільшою оцінкою $\lambda\left(5,3\right)=5$, включимо пару міст $\left(5,3\right)$, яка йому відповідає, в шуканий маршрут, обчислимо оцінку вершини типу W, тобто оцінку $\Lambda\overline{\left(5,3\right)}=50+5=55$, та виконаємо редукцію матриці викреслюванням п'ятого рядка та третього стовпчика та забороною зворотного переходу $c_{35}=\infty$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 7 & 0^1 & 1 & 11 \\ 2 & 0^3 & \infty & 1 & 0^1 & 4 \\ 3 & \infty & 0^3 & \infty & 9 & 0^1 \\ 4 & 3 & 3 & 0^1 & \infty & 1 \\ 5 & 8 & 5 & 0^5 & 8 & \infty \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 7 & 1 & 11 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 4 \\ 3 & \infty & 0 & 9 & \infty \\ 4 & 3 & 3 & \infty & 1 \end{array}.$$

Далі виконаємо спрощення отриманої матриці і знайдемо оцінку вершини розгалуження типу V, тобто оцінку

$$\Lambda(5,3) = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n} \delta'_i + \sum_{j=1}^{n} \Delta'_j = \omega_1 = 50 + 2 = 52.$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 4 & 5 & \delta'_i \\ \hline 1 & \infty & 7 & 1 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 4 & 0 \\ 3 & \infty & 0 & 9 & \infty & 0 \\ 4 & 3 & 3 & \infty & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 6 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 4 \\ 3 & \infty & 0 & 9 & \infty \\ 4 & 2 & 2 & \infty & 0 \end{array}.$$

Як бачимо, при включенні у маршрут пари $(5,3)$ можемо побудувати лише маршрут завдовжки не менше 52-х лінійних одиниць.

Якщо нас цікавить лише один оптимальний маршрут, то слід повернутися до вершини $(4,2)$, в якій фрагмент конструйованого маршруту має більше включених міст, і закінчити побудову оптимального маршруту. З отриманої двовимірної матриці $\begin{array}{c|cc} & 3 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \infty \end{array}$ визначаємо дві останні пари міст $(2,5)$ та $(5,3)$ і завершуємо розв'язання задачі.

Отже, знаходимо оптимальний маршрут $(1,4) \to (4,2) \to (2,5) \to (5,3) \to (3,1)$ завдовжки

$$C_{\min} = c_{14} + c_{42} + c_{25} + c_{53} + c_{31} = 8 + 11 + 15 + 9 + 9 = 52.$$

Тепер повертаємося до матриці, використовуючи яку, була вибрана дільниця $(1,4)$, і замість цієї дільниці виберемо дільницю $(4,5)$, яка має таку саму за величиною оцінку манівця, та згідно з алгоритмом спробуємо побудувати ще один оптимальний маршрут. Такий маршрут можна знайти. Опускаючи виконані обчислення, вказуємо другий оптимальний маршрут завдовжки 52 одиниці : $(1,4) \to (4,5) \to (5,2) \to (2,3) \to (3,1)$.

Крім того, повернемося до матриці, використовуючи яку, була вибрана дільниця $(4,2)$ з оцінкою нуля, рівною 2, і замість неї зробимо вибір дільниці $(2,5)$ також з оцінкою нуля, рівною 2, здійснимо розгалуження і знайдемо третій оптимальний маршрут завдовжки 52 одиниці : $(1,2) \to (2,4) \to (4,5) \to (5,3) \to (3,1)$. Якщо вибрати дільницю $(2,4)$ або $(1,4)$, що також мають оцінку нуля, рівну 2, то нових оптимальних маршрутів нуля не знайдемо.

Бажаючи відшукати всі оптимальні маршрути, повернемося до вершини $(5,3)$ і продовжимо розгалуження. В отриманій раніше матриці оцінимо кожен нуль, виберемо нуль з мінімальною оцінкою $\lambda(3,2)=11$, включимо пару міст $(3,2)$, яка йому відповідає, в шуканий маршрут, обчислимо оцінку вершини типу W, тобто оцінку $\Lambda\left(\overline{3,2}\right)=52+11=63$, та виконаємо редукцію матриці викреслюванням третього рядка та другого стовпця.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 6 & 0^{6} & 10 \\ 0^{2} & \infty & 0^{0} & 4 \\ \infty & 0^{11} & 9 & \infty \\ 2 & 2 & \infty & 0^{6} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Кожен рядок та кожен стовпець отриманої матриці містить нуль. Тому $\Lambda(3,2)=52+0=52$. Далі оцінимо кожен нуль отриманої матриці і виберемо нуль з максимальною оцінкою $\lambda(1,4)=10$, включимо пару $(1,4)$ в маршрут, зробимо оцінку $\Lambda\left(\overline{4,1}\right)=52+10=62$ і після викреслювання першого рядка та другого стовпця та заборони зворотного переходу $c_{41}=\infty$ дістанемо матрицю

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ця матриці дозволяє знайти останні дві пари міст $(2,1)$ та $(4,5)$. Тепер легко перевірити, що дістали ще один оптимальний маршрут $(1,4)\to(4,5)\to(5,3)\to(3,2)\to(2,1)$ завдовжки 52.

Таким чином, дана задача про комівояжера має чотири оптимальні маршрути завдовжки 52 лінійні одиниці :

$$(1,4)\to(4,2)\to(2,5)\to(5,3)\to(3,1)\ ;\ (1,4)\to(4,5)\to(5,2)\to(2,3)\to(3,1)\ ;$$

$$(1,2)\to(2,4)\to(4,5)\to(5,3)\to(3,1) \text{ та } (1,4)\to(4,5)\to(5,3)\to(3,2)\to(2,1)\ .$$

Зауважимо, що в задачах з реальними технологічними даними розв'язок задачі про комівояжера, як правило, єдиний.

Запитання для самоперевірки знань

1. Наведіть класичну постановку задачі про комівояжера.
2. Якими методами можна розв'язати задачу про комівояжера ?
3. Які основні ідеї методу гілок і меж ?
4. Як виконується розгалуження дерева варіантів методом віток та меж при розв'язанні задачі про комівояжера ?
5. Як обчислюється довжина оптимального маршруту задачі про комівояжера ?

Лекція 12
Задача про два та три верстати

Задача про два верстати. Припустимо, що виробництво деякого продукту потребує виконання двох видів робіт спочатку на першому, а тоді на другому верстаті. Час виконання кожної роботи в годинах на кожному з двох верстатів відомий і заданий таблицею

Роботи / Верстати	1	2
Верстат 1	9	2
Верстат 2	4	7

Якою має бути послідовність виконання робіт, щоб час виконання обох робіт був мінімальний? Безпосередніми міркування знаходимо, що для послідовності $(1,2)$ час виконання обох робіт дорівнює 24 години, а для послідовності $(2,1)$ цей час дорівнює 22 години.

Отже, час виявився різним, бо у випадку послідовності $(1,2)$ відбувається затримка виконання другої роботи на другому верстаті на 2 години.

Розглянемо задачу про два верстати в загальному випадку. Нехай час виконання кожної з n робіт, яка виконується спочатку на першому, а потім на другому верстаті, задано таблицею

Роботи / Верстати	1	2	……	n
Верстат 1	a_1	a_2	……	a_n
Верстат 2	b_1	b_2	……	b_n

Треба знайти мінімальний час виконання виробничого циклу.

Для такої задачі відомий простий алгоритм розв'язання. В таблиці знаходимо мінімальну величину часу для виконання якоїсь з даних робіт на якомусь верстаті. Якщо таким виявиться час виконання i_1 роботи на першому верстаті, то роботу i_1 слід розмістити в оптимальній послідовності першою. Якби мінімальним часом виявився час виконання i_1 роботи на другому верстаті, то в цьому випадку роботи i_1 слід розмістити в оптимальній послідовності на останньому місці. Після цього стовпчик, що відповідає роботі i_1, викреслюється і знову виконується пошук мінімального часу і розміщення знайденої роботи на одному з незайнятих місць. Через n кроків оптимальна послідовність буде побудована.

Приклад. Мінімізувати час виконання робіт, якщо час виконання кожної роботи на кожному із верстатів в годинах задано таблицею

Роботи / Верстати	1	2	3	4	5	6	7	8
Верстат 1	7	6	3	2	9	7	8	4
Верстат 2	3	5	4	9	8	6	7	5

Мінімальний час обробки дорівнює 2 год. стоїть в 4 стовпчику та в 1-му рядку. Тому робота 4 виконується першою. Після викреслювання 4-го стовпчика мінімальний час обробки дорівнює 3 год. причому є два варіанти. Розглянемо випадок, коли вибираємо першу роботу і ставимо її виконання на останнє 8–е місце, оскільки 3 стоїть в другому рядку. Після викреслювання 1-го рядка мінімальний час, що дорівнює 3 год., знаходиться в 3-му стовпчику та 1-му рядку. Тому роботу 3 ставимо на 2-е місце. Після викреслювання 3-го стовпчика мінімальний час, що дорівнює 4 год., знаходиться у 8-му стовпчику та 1-му рядку. Тому ставимо виконання роботи 8 на 3-є місце. Після викреслювання 8-го рядка мінімальний час, що дорівнює 5 год., знаходиться у 2-му стовпчику та 2-му рядку. Тому ставимо виконання роботи 2 на 7-е місце. Після викреслювання 2-го рядка мінімальний час, що дорівнює 6 год., стоїть у 6-му рядку та 2-му стовпчику. Тому ставимо виконання роботи 6 на 6-е місце. Після викреслювання 6-го рядка мінімальний час, що дорівнює 7 год., знаходиться в 7-му стовпчику та 2-му рядку. Тому ставимо виконання роботи 7 на 5-е місце. Останню 5-ту роботу ставимо на 4-е місце. Послідовність виконання робіт

$$4 \to 3 \to 8 \to 5 \to 7 \to 6 \to 2 \to 1 \ .$$

Час виконання всіх робіт у такій послідовності, підрахований безпосередньо, дорівнює 49 годин. Це мінімальний час виконання всіх 8-ми робіт. Альтернативної послідовності робіт з тривалістю виконання 49 год. немає, бо на 2-му кроці 3 стоїть в одному випадку в 1-му рядку, а в другому випадку в 2-му рядку. Теоретично задача може мати кілька розв’язків.

Задача про три верстати. Задачу про два та три верстати називають також задачею Джонсона. Необхідно обробити на трьох верстатах n деталей. У всі деталей одна і та сама послідовність обробки 1, 2 та 3-й верстати. Час обробки деталей на кожному верстаті подано в таблиці

Деталі / Верстати	1	2	……	n	$\sum$
Верстат 1	a_1	a_2	……	a_n	$\sum a_i$
Верстат 2	b_1	b_2	……	b_n	$\sum b_i$
Верстат 3	c_1	c_2	……	c_n	$\sum c_i$

Потрібно знайти оптимальну послідовність обробки всіх n деталей на цих верстатах, тобто таку послідовність надходження деталей на обробку, для якої час закінчення обробки на всіх верстатах буде найменшим.

Така задача може бути розв'язана як задача дискретного програмування методом віток та меж.

Алгоритм розв'язання. Для подальших викладок введемо такі позначення :
$r_k = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ – довільна послідовність з k деталей; $r_{k+1} = \{r_k, i_{k+1}\}$ – довільна послідовність з $k+1$ деталі; $A(r_k), B(r_k)$ та $C(r_k)$ – моменти закінчення обробки послідовності деталей r_k на першому, другому та третьому верстатах відповідно.

Тоді для послідовності r_{k+1} аналогічні моменти обчислюються за рекурентними формулами :

$$A(r_{k+1}) = A(r_k) + a_{k+1}, \quad (12.1) \qquad B(r_{k+1}) = \max\{A(r_{k+1}), B(r_k)\} + b_{k+1}, \quad (12.2)$$

$$C(r_{k+1}) = \max\{B(r_{k+1}), C(r_k)\} + c_{k+1}. \qquad (12.3)$$

Крім того, введемо в розгляд величини $\delta_{A,k}$, $\delta_{B,k}$, $\delta_{C,k}$, які використовуються для оцінки знизу величини часу обробки $C(r_n)$ всіх деталей послідовності r_n. Покладемо

$$\delta_{A,k} = A(r_k) + \sum_{i_k \notin r_k} a_{i_k} + \min_{i_k \notin r_k}(b_{i_k} + c_{i_k}), \qquad (12.4) \qquad \delta_{B,k} = B(r_k) + \sum_{i_k \notin r_k} b_{i_k} + \min_{i_k \notin r_k} c_{i_k}, \qquad (12.5)$$

$$\delta_{C,k} = C(r_k) + \sum_{i_k \notin r_k} c_{i_k} \ . \qquad (12.6)$$

Зауважимо, що, наприклад, сенс величини $\delta_{A,k}$ полягає в тому, що для обробки послідовності r_k на всіх трьох верстатах потрібен час не менший, ніж сума часу обробки цієї послідовності на першому верстаті, часу обробки деталей, які не ввійшли до послідовності r_k, тобто $\sum_{i_k \notin r_k} a_{i_k}$, та мінімального часу обробки останньої деталі на наступних верстатах, тобто $\min_{i_k \notin r_k}(b_{i_k} + c_{i_k})$. Аналогічний зміст мають параметри $\delta_{B,k}$ та $\delta_{C,k}$, але стосовно другого та третього верстатів.

Таким чином, якщо $C(r_n)$ час обробки всіх деталей на трьох верстатах, то при довільному $k = 1, 2, \cdots, n$ повинні одночасно виконуватися співвідношення

$$C(r_k) \ge \delta_{A,k}, \ C(r_k) \ge \delta_{B,k}, \ C(r_k) \ge \delta_{C,k} \ . \quad (12.7)$$

Тому виконується нерівність

$$C(r_n) \ge \xi = \max\{\delta_{A,k}, \delta_{B,k}, \delta_{C,k}\}. \quad (12.8)$$

Це означає, що ξ є оцінкою знизу часу закінчення обробки всіх n деталей на трьох верстатах за умови, що послідовність r_k пройшла обробку на всіх верстатах.

Для нульового кроку методу віток та меж очевидно маємо

$$A(\varnothing)=B(\varnothing)=C(\varnothing)=0,$$

$$\delta_{A,0}=0+\sum_{i=1}^{n}a_i+\min_{i=\overline{1,n}}\left(b_i+c_i\right)\ ,\ \delta_{B,0}=0+\sum_{i=1}^{n}b_i+\min_{i=\overline{1,n}}c_i\ ,\ \delta_{C,0}=0+\sum_{i=1}^{n}c_i\ .$$

Далі, відповідно до методу віток та меж поділимо множину $G=\{r_n\}$ всіх послідовностей довжини n (їх всього $n!$) на n підмножини, які не перетинаються, а саме, на сукупність підмножин $G_i=\{(i,j_1,j_2,\cdots,j_{n-1})\}, i=1,2,\cdots,n$.

Далі обчислюємо величини $A(\{i\}),B(\{i\}),C(\{i\})$ та $\delta_{A,\{i\}},\delta_{B,\{i\}},\delta_{C,\{i\}}$ і визначаємо перспективну множину серед G_i як таку для якої величина $\xi_i=\max\left\{\delta_{A,\{i\}},\delta_{B,\{i\}},\delta_{C,\{i\}}\right\}$ є найменшою. Для цієї множини, позначимо її через G_{k_1}, виконуємо нове розгалуження на підмножини $G_{k_1,i}=\{(k_1,i,j_1,\cdots,j_{n-2})\}, i=1,2,\cdots,n$, а інші множини G_i залишаємо висячими. За допомогою нових отриманих оцінок вибираємо нову перспективну множину серед $G_i, i\neq k_1$ та $G_{k_1,i}, i=\overline{1,n}$. Процес продовжується доти, доки не буде знайдена підмножина , яка містить єдину послідовність довжини n, і для якої оцінка серед висячих вершин буде мінімальною. Ця послідовність є оптимальною, тобто потребує найменшого часу обробки всіх деталей на трьох верстатах.

Приклад. Розв'яжемо задачу Джонсона, якщо час обробки 4 деталей на кожному з 3 верстатів задано таблицею

Деталі / Верстати	1	2	3	4
Верстат A	2	6	1	6
Верстат B	8	10	5	7
Верстат C	4	6	2	3

Нульовий крок. Час закінчення робіт порожньої послідовності дорівнює $A(\{\varnothing\})=B(\{\varnothing\})=C(\{\varnothing\})=0$, початкові оцінки виконання робіт дорівнюють $\sigma_A=15+5+2=22$, $\sigma_B=30+2=32$, $\sigma_C=15$.

Перший крок. Користуючись рекурентними формулами, знаходимо час закінчення робіт, якщо в конструйовану послідовність першою буде взята 1-а, 2-а, 3-а або 4-а робота.

Якщо $i_1=1$, то $A(\{i_1\})=2$, $B(\{i_1\})=\max\{2,0\}+8=10$, $C(\{i_1\})=\max\{10,0\}+4=14$. Далі $\sigma_A=2+13+7=22$, $\sigma_B=10+22+2=34$, $\sigma_C=14+11=25$.

Якщо $i_1=2$, то $A(\{i_1\})=6$, $B(\{i_1\})=\max\{6,0\}+10=16$, $C(\{i_1\})=\max\{16,0\}+6=22$. Далі $\sigma_A=6+9+7=22$, $\sigma_B=16+20+2=38$, $\sigma_C=22+9=31$.

Якщо $i_1=3$, то $A(\{i_1\})=1$, $B(\{i_1\})=\max\{1,0\}+5=6$, $C(\{i_1\})=\max\{6,0\}+2=8$. Далі $\sigma_A=1+14+10=25$, $\sigma_B=6+25+3=34$, $\sigma_C=8+13=21$.

Якщо $i_1=4$, то $A(\{i_1\})=6$, $B(\{i_1\})=\max\{6,0\}+7=13$, $C(\{i_1\})=\max\{13,0\}+3=16$. Далі $\sigma_A=6+9+7=22$, $\sigma_B=13+23+2=38$, $\sigma_C=16+12=28$.

Тепер бачимо, що $\min\limits_{i_1=1,2,3,4} \max\{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\} = 34$, причому мінімум досягається для значень $i_1 = 1$ та $i_1 = 3$. Для розгалуження можна взяти будь-яке з цих значень першої роботи, але візьмемо $i_1 = 1$, тобто включимо в конструйовану оптимальну послідовність $i_1 = 1$.

Другий крок. Користуючись рекурентними формулами, знаходимо час закінчення робіт, якщо в конструйовану послідовність першою буде взята 1-а, 2-а, 3-я або 4-а робота.

Якщо $(i_1, i_2) = (1,2)$, то $A(\{i_1, i_2\}) = 2 + 6 = 8$, $B(\{i_1, i_2\}) = \max\{8,10\} + 10 = 20$, $C(\{i_1, i_2\}) = \max\{20,14\} + 6 = 26$. Далі знаходимо $\sigma_A = 8 + 7 + 7 = 22$, $\sigma_B = 20 + 12 + 2 = 34$, $\sigma_C = 26 + 5 = 31$.

Якщо $(i_1, i_2) = (1,3)$, то $A(\{i_1, i_2\}) = 2 + 1 = 3$, $B(\{i_1, i_2\}) = \max\{3,10\} + 5 = 15$, $C(\{i_1, i_2\}) = \max\{15,14\} + 2 = 17$. Далі знаходимо $\sigma_A = 3 + 12 + 10 = 25$, $\sigma_B = 15 + 17 + 3 = 35$, $\sigma_C = 17 + 9 = 26$.

Якщо $(i_1, i_2) = (1,4)$, то $A(\{i_1, i_2\}) = 2 + 6 = 8$, $B(\{i_1, i_2\}) = \max\{8,10\} + 7 = 17$, $C(\{i_1, i_2\}) = \max\{17,14\} + 3 = 20$. Далі знаходимо $\sigma_A = 8 + 9 + 7 = 24$, $\sigma_B = 17 + 23 + 2 = 42$, $\sigma_C = 20 + 12 = 32$.

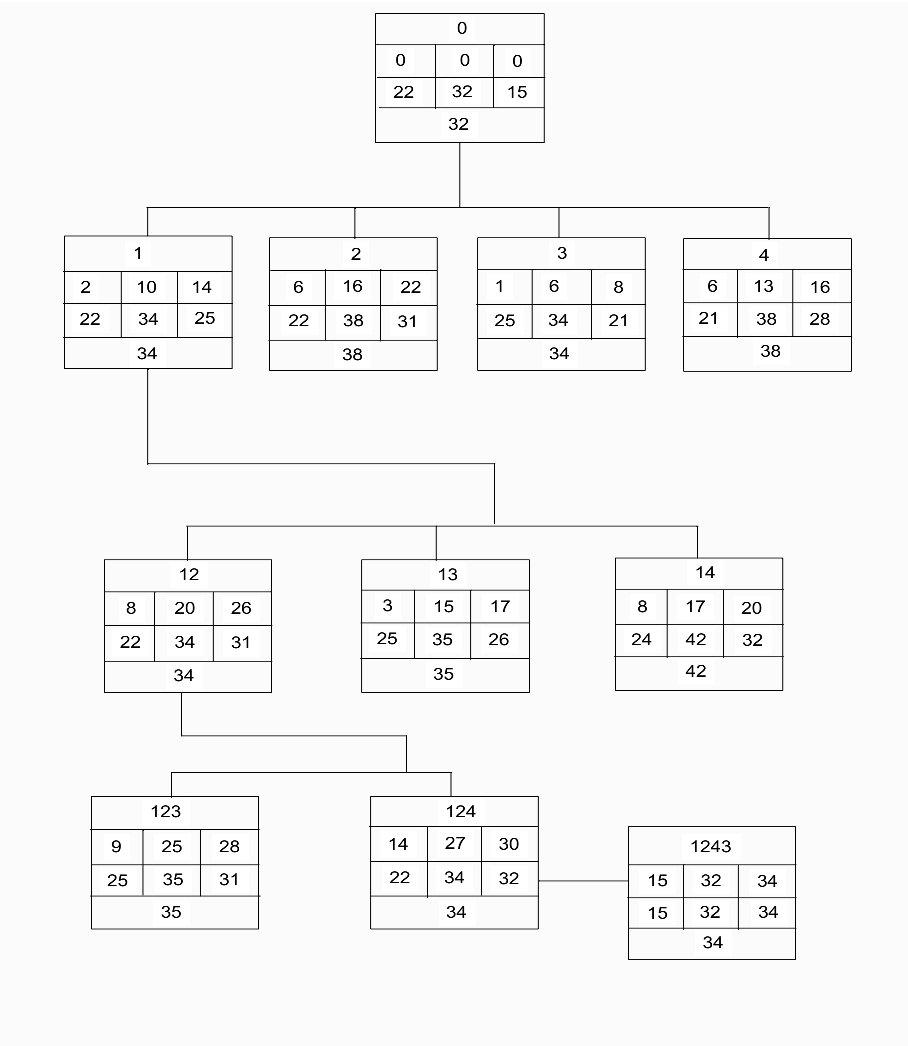
На цьому кроці $\min\limits_{i_2=2,3,4} \max\{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\} = 34$, причому мінімум досягається для значення $i_2 = 2$. Візьмемо для розгалуження $i_2 = 2$, тобто за фрагмент конструйованої оптимальної послідовності візьмемо $(i_1, i_2) = (1,2)$ і перейдемо до наступного кроку.

Третій та четвертий кроки. Результати обчислень значень потрібних величин подаються в блок-схемі розв'язання алгоритму. Після четвертого кроку отримуємо оптимальну послідовність $(i_1^*, i_2^*, i_3^*, i_4^*) = (1,2,4,3)$.

Перший рядок квадратів блок-схеми показує розгалуження в процесі пошуку розв'язку. В другому знаходяться значення моментів закінчення обробки на 1-му, 2-му та 3-му верстаті для відповідного фрагмента. В третьому рядку містяться значення величин $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$. Четвертий рядок містить величину $\max\{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$.

Запитання для самоперевірки знань

1. Сформулюйте задачі про два та про три верстати.
2. Опишіть найпростіший алгоритм розв'язання задачі про два верстати.
3. Опишіть алгоритм розв'язання задачі Джонсона про три верстати методом віток та меж.



Блок-схема розв’язання задачі

Лекція 13
Сітьове планування

При плануванні та оперативному керуванні складним комплексом робіт (будівництво та реконструкція об’єктів, наукові дослідження тощо), які об’єднані в єдиний проект, із успіхом використовуються сітьові графіки.

Системи сітьового планування та керування дозволяють :

1) формувати календарний план реалізації комплексу робіт;

2) виявляти та використовувати для швидшого чи економнішого виконання робіт резерви часу, трудові, матеріальні та грошові ресурси;

3) підвищувати ефективність поставлених завдань в цілому.

Основними поняттями сітьового планування є робота і подія.

Під роботою розуміють будь-які дії, трудові процеси, які супроводжуються витратами ресурсів і приводять до деяких результатів. Робота може включати очікування – тривалий у часі процес, що не потребує витрат праці (наприклад, процес сушіння після пофарбування, за тужавіння бетону). Крім того, робота може бути фіктивною, тобто не вимагати витрат праці, матеріальних ресурсів, часу, а лише вказувати на логічний зв'язок між двома або кількома роботами чи подіями.

Під подією розуміють момент закінчення однієї або кількох робіт. Подія відображає окремий етап виконання проекту. Припускається, що подія не має тривалості і здійснюється миттєво. Подія може здійснитися тільки тоді, коли будуть виконані всі роботи, які їй передують. Серед подій сітьової моделі виділяють початкову подію (початок реалізації проекту) та кінцеву подію (повне завершення проекту). Зрозуміло, що початкова подія не має попередніх робіт і подій, а кінцева подія не має наступних робіт і подій.

Математичною моделлю сітьового графіка є орієнтований граф. Події на сітьовому графіку (або на графі) зображаються колами (кругами, прямокутниками), а роботи – орієнтованими дугами (стрілками), які показують зв'язок між роботами. Подією може починатися або закінчуватися декілька робіт. Біля кожної стрілки проставляється час виконання роботи , а інколи і інші числові характеристики (витрати ресурсу, кількість виконавців і т.д.).

Найбільш відомим методом аналізу сітьового графіка є метод критичного шляху. Кінцевим результатом застосування цього методу є побудова часового графіка виконання проекту. Для цього виконуються спеціальні обчислення. В результаті цих обчислень отримуємо таку інформацію : а) загальна тривалість виконання проекту; б) поділ подій та робіт на критичні та некритичні.

Для подальшого висвітлення теорії складання і використання сітьових графіків подамо потрібні теоретичні відомості про орієнтовані графи.

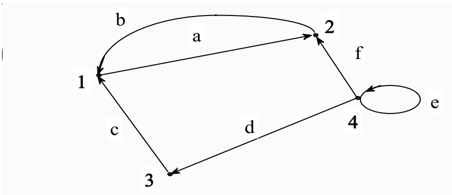
Деякі поняття і теореми про орієнтовані графи

Означення. Орієнтованим графом (орграфом, інколи просто графом) будемо називати трійку $G=(S,U,\mu)$, де S – непорожня множина вершин графа, U – множина (можливо, порожня) його дуг, μ – відображення множини U – в декартовий добуток $S\times S$, яке називається відображенням інцедентності.

Дугу орграфа будемо позначати через (s_i, s_j), де s_i – початок дуги, s_j – кінець дуги. Напрям від s_i до s_j називається орієнтацією дуги.

Найбільш зручним способом описання скінченного графа $G = (S, U, \mu)$, де $S = \{ s_1, s_2, \cdots, s_n \}$, $U = \{ u_1, u_2, \cdots, u_n \}$, є задання всіх його дуг, тобто задання множини $U = \left\{ u_k = \left(s_{i_k} ; s_{j_k} \right) \right\}$.

Приклад



Для орграфа, зображеному на рисунку, $S = \{1, 2, 3, 4\}$; $U = \{a, b, c, d, e, f\}$; $\mu(a) = (1; 2)$; $\mu(b) = (2; 1)$; $\mu(c) = (3; 1)$; $\mu(d) = (4; 3)$; $\mu(e) = (4; 4)$; $\mu(f) = (4; 2)$.

Геометричним графом називається граф, у якого множина вершин - множина помічених точок декартової площини R^2 або декартового простору R^3, а множина дуг - множина відрізків неперервних кривих, кінцями яких є відповідні вершини дуги.

Два графи $G = (S, U, \mu)$ та $G' = (S', U', \mu')$ називаються ізоморфними, якщо між їхніми вершинами існує взаємно однозначна відповідність, при якій в одному з графів вершини з'єднані дугами в тому і тільки тому разі, коли в другому графі дугами з'єднані відповідні вершини.

Теорема. Будь-який граф має ізоморфний йому геометричний граф (і в R^2 і в R^3) , який називається його геометричною реалізацією.

Геометричний граф називається правильно реалізованим, якщо його дуги не мають спільних точок, відмінних від вершин.

Теорема. Для будь-якого графа існує його правильна реалізація в R^3.

Означення Ланцюгом графа довжиною n називається така послідовність його дуг $u_1 = (s_1 ; s_2), u_2 = (s_2 ; s_3), \cdots, u_n = (s_n ; s_{n+1})$, в якій кожна наступна дуга починається у вершині, в якій закінчується попередня дуга.

Якщо $s_{n+1} = s_1$, то ланцюг називається контуром. Контур називається простим, якщо він не містить контурів довжиною, меншою за n .

Ланцюг орграфа називається гамільтоновим, якщо він проходить через всі вершини графа і тільки по одному разу.

Ланцюг (контур) орграфа називається ейлеревим, якщо він містить всі дуги графа і тільки по одному разу.

Орграф називається зв'язним, якщо, не враховуючи орієнтацію дуг, будь-які дві його вершини можна з'єднати ланцюгом.

Орграф називається сильно зв'язним, якщо із урахуванням орієнтації дуг всі його вершини можна з'єднати ланцюгом.

Впорядкування вершин графа. Розрахунки на графах спрощуються, якщо його вершини впорядковані. Під впорядкуванням вершин графа без контурів будемо розуміти такий поділ його вершин на групи, при якому :

1) вершини першої групи не мають попередніх, а вершини останньої – наступних ;

2) вершини будь-якої іншої групи не мають попередніх в наступній ;

3) вершини однієї і тієї ж групи не з'єднуються.

Таке впорядкування завжди можливе. Графічний спосіб впорядкування вершин здійснюється за алгоритмом Фалкерсона. Цей алгоритм складається з таких кроків.

1. Знаходять вершини графа, в які не входить жодна дуга. Вони утворюють першу групу. Нумерують вершини послідовними натуральними числами $1, 2, \ldots$ (порядок присвоєних номерів вершинам всередині групи значення не має).

2. Подумки викреслюють всі пронумеровані вершини і дуги, які з них виходять . В одержаному графі знайдеться щонайменше вершина, в яку не входить жодна дуга. Цій вершині (або вершинам), що утворюють другу групу, присвоюються чергові натуральні номери і т. д. Крок 2 повторюють доти, доки всі вершини графа не будуть пронумеровані.

Сітьові графіки. Сітьові графіки складаються із дотриманням деяких правил. Перелічимо ці правила :

1) сітьовий графік повинен мати одну початкову та одну кінцеву подію;

2) кожна робота повинна бути зображена однією і тільки однією стрілкою;

3) будь-які дві події повинні розрізнятися або початковими, або кінцевими подіями;

4) для будь-яких двох подій існує не більше однієї дуги, яка їх зв'язує (хоча число робіт, яке передує деякій події може бути довільним);

5) граф не повинен містити контурів.

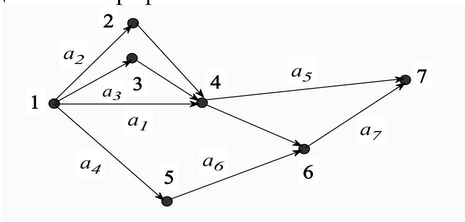
Крім того, сітьовий графік повинен бути впорядкованим згідно з алгоритмом Фалкерсона. Це означає, що попередня подія для будь-якої роботи розташована лівіше і має менший номер в порівнянні з подією, що ідентифікує закінчення роботи.

Перед тим, як складати сітьовий графік, треба скласти детальний список робіт проекту і з'ясувати, які роботи передують кожній із робіт.

Приклад. Нехай час виконання і зв'язки між роботами задано таблицею :

Позначення роботи	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
Попередні роботи	–	–	–	–	a_1, a_2, a_3	a_4	a_1, a_6	a_5, a_7
Тривалість роботи	2	1	5	4	3	2	3	4

Враховуючи, що роботи a_1, a_2, a_3, a_4 не мають попередніх зведемо їх початки до однієї події, яка буде початковою подією. Оскільки роботи a_1, a_2, a_3 виходять з однієї події (а саме, початкової події) і передують роботі a_5, то згідно з правилами побудови сітьового графіка введемо в розгляд події 2 та 3, пов'язані із закінченням робіт a_2 та a_3, які утворюють другу групу подій і фіктивні роботи, закінчення яких разом із закінченням роботи a_3 зведемо до події 4. Закінчення роботи a_4, викликає подію 5, яка разом із подією 4 утворює третю групу подій тощо. В результаті дістанемо граф



Поняття шляху є одним з основних понять сітьового графіка. Шлях – будь-яка послідовність робіт, для якої кінцева подія будь-якої роботи співпадає з початковою подією для наступної за нею роботи. Повний шлях – будь-який шлях, початок якого співпадає з початковою роботою (проекту) сітки, а кінець - із кінцевою подією проекту (сітки). Найдовший за тривалістю виконання всіх робіт повний шлях називається критичним. Критичними називаються також роботи і події, розташовані на цьому шляху.

Важливими часовими характеристиками подій – вершин сітьового графіка – є ранні та пізні терміни настання відповідних подій, пов'язаних з виконанням проекту, та резерви часу цих подій.

За своїм змістом $t_*(i)$ є найбільш раннім моментом часу можливого виконання всіх робіт, що передують події i.

Позначимо через n_0 – число всіх подій сітьового графіка, U_j^+ – сукупність робіт, що входять в j-у подію, $t_*(i)$ – ранній термін настання i-ї події, $t(i,j)$ – тривалість роботи (i,j). Нескладний аналіз показує, що

$$t_*(1)=0,\ t_*(j)=\max_{(i,j)\in U_j^+}\left\{t_*(i)+t(i,j)\right\}\ , \quad (13.1)$$

причому $t_*(i)$ обчислюється послідовно зліва направо, але в довільному порядку для подій кожної з груп сітьового графіка, впорядкованих за алгоритмом Фалкерсона.

Пізній термін настання події – це момент часу, пере, перевищення якого при настанні цієї події призведе до затримки виконання проекту в цілому.

Позначимо через U_i^- – сукупність робіт, які виходять з i-у події, $t^*(j)$ – пізній термін настання j-ї події. Нескладний аналіз показує, що

$$t^*(1)=n_0\,,\ t^*(j)=\min_{(i,j)\in U_i^-}\left\{t^*(j)-t(i,j)\right\}\ , \quad (13.2)$$

причому пізні терміни настання подій обчислюються послідовно справа наліво, але в довільному порядку для кожної з груп подій сітьового графіка, впорядкованих за алгоритмом Фалкерсона.

Різниця між пізнім та раннім часом настання події i складає резерв часу $R(i)$ цієї події : $R(i)=t^*(i)-t_*(i)$. Резерв часу показує, на який допустимий відрізок часу можна затримати настання цієї події, не викликаючи при цьому збільшення терміну виконання комплексу робіт. Критичні події резервів часу не мають, оскільки будь-яка затримка у настанні події, викличе таку саму затримку у настанні кінцевої події, тобто виконанні проекту.

Важливими числовими характеристиками робіт є резерви часу на їх виконання. Зрозуміло, що критичні роботи не мають резерву часу на виконання.

Повний резерв часу $M(i,j)$ роботи (i,j) – це максимально можлива затримка у виконанні цієї роботи, яка не призведе до затримки виконання усього проекту за умов, що тривалість інших робіт не змінюватиметься :

$$M(i,j)=t^*(j)-t_*(i)-t(i,j)\ . \qquad (13.3)$$

Вільний резерв часу $N(i,j)$ роботи (i,j) – це така максимальна затримка із виконанням цієї роботи, яка не впливає на терміни виконання усіх наступних робіт :

$$N(i,j)=t_*(j)-t_*(i)-t(i,j)\ . \qquad (13.4)$$

Незалежний резерв часу $P(i,j)$ роботи (i,j) – показує таку максимальну затримку із виконанням цієї роботи, яка не впливає на терміни виконання усіх інших робіт проекту :

$$P(i,j)=\max\left\{0,t_*(j)-t^*(i)-t(i,j)\right\}\ . \qquad (13.5)$$

Для кожної робіт величини усіх видів резервів часу задовольняють нерівність

$$M(i,j)\ge N(i,j)\ge P(i,j)\ge 0\ . \qquad (13.6)$$

Визначивши ранній термін настання кінцевої події проекту, ми знайдемо тим самим довжину критичного шляху, а визначивши події з нульовими резервами часу $R(i)=0$, визначимо його топологію.

Якщо сітьовий графік має єдиний критичний шлях, то цей шлях проходить через всі критичні події, тобто події з нульовими резервами часу. Але в загальному випадку через критичні події можуть проходити як критичні так і некритичні шляхи. Крім того, критичних шляхів може бути декілька (хоча така можливість рідко зустрічається в практичних задачах).

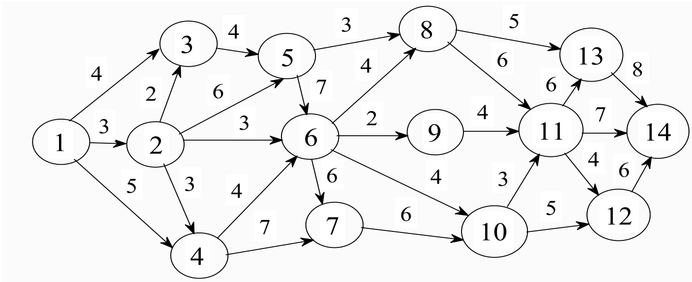
Для виявлення некритичних робіт з нульовими резервами часу $R(i)=0$, треба скористатися наступним критерієм.

Теорема. Для того, щоб робота (i,j) з $R(i)=0$ лежала на одному з критичних шляхів необхідно й достатньо, щоб виконувалися співвідношення

$$t^*(j)-t^*(i)=t_*(j)-t_*(i)=t(i,j). \qquad (13.7)$$

Роботи з $R(i)=0$, для яких це співвідношення не виконується можна виключити з розгляду при знаходженні критичного шляху і можливо з решти робіт можна утворити єдиний критичний шлях. Якщо ж критичних шляхів декілька і сітьовий графік має велике число подій, то для їх знаходження можна застосувати відомий алгоритм Пріма.

Приклад. Для сітьового графіка, поданого на рисунку, знайдемо ранні та пізні терміни настання подій та визначимо критичний шлях.



Згідно з формулою знаходження $t_*(i)$, послідовно знаходимо : $t_*(1)=0$; $t_*(2)=3$; $t_*(3)=\max\{t_*(2)+2,4\}=5$; $t_*(4)=\max\{t_*(2)+3,5\}=6$, $\cdots$, $t_*(14)=45$.

Далі, скориставшись формулою для обчислення $t^*(i)$, знаходимо послідовно значення ранніх термінів подій : $t^*(14)=t_*(14)=45$: $t^*(13)=37$; $t^*(12)=39$; $t^*(11)=\min\{t^*(14)-7, t^*(13)-6, t^*(12)-4\}=\min\{38,31,35\}$, $\cdots$, $t_*(2)=3$; $t_*(1)=0$.

Дані обчислень занесемо до таблиці :

Номер події	$t_*(i)$	$t^*(i)$	$R(i)$
1	0	0	0
2	3	3	0
3	5	5	
4	6	12	6
5	9	9	0
6	16	16	0
7	22	22	0
8	20	25	5
9	18	27	9
10	28	28	0
11	31	31	0
12	33	39	6
13	37	37	0
14	45	45	0

З таблиці знаходимо, що сітьовий графік має два критичні шляхи:

$1\to2\to5\to6\to7\to10\to11\to13\to14$ та $1\to2\to3\to5\to6\to7\to10\to11\to13\to14$.

Запитання для самоперевірки знань

1. Які основні сфери застосування сітьового планування ?
2. Назвіть основні елементи сітьового графіка та методику побудови сітьового графіка.
3. Що називають критичним шляхом, критичною подією, критичною роботою ?
4. Опишіть алгоритм пошуку критичного шляху.

Лекція 14
Задачі і моделі заміни обладнання

Заміна обладнання є невід'ємною частиною виробничих процесів та функціонування сфери обслуговування. Моральне та фізичне старіння обладнання приводить до збільшення витрат на експлуатацію, зменшується його продуктивність та ліквідна вартість. Тому є актуальною задача про визначення оптимальних термінів заміни старого обладнання. За критерій оптимальності найчастіше вибирають або максимізацію прибутку від експлуатації обладнання, або мінімізацію сумарних витрат на експлуатацію за деякий плановий період часу.

Якщо обладнання використовується протягом тривалого проміжку часу, а заміна деяких його вузлів відбувається досить часто, то як критерій оптимальності терміну заміни у відповідній економіко-математичної моделі приймають мінімізацію сумарних витрат за одиницю часу.

Якщо обладнання може багато разів замінятися на однотипне за обмежений плановий період, то як критерій оптимальності терміну заміни частіше приймають прибуток від експлуатації такого обладнання.

За критерій оптимальності терміну заміни в економіко-математичних моделях заміни може прийматися також середній час напрацювання до виходу з ладу або коефіцієнт готовності обладнання в потрібний момент часу.

Аварійна заміна обладнання зазвичай пов'язана з більшими одноразовими витратами, ніж профілактична заміна.

Одночасна заміна всіх одиниць однотипного обладнання здійснюється для зменшення числа операцій заміни. Таке рішення доцільне у випадках, коли ціна замінюваної одиниці обладнання незрівнянно менша в порівнянні з вартістю самої заміни (наприклад, заміна ламп вуличного освітлення). Така заміна здійснюється через проміжки однакової тривалості, причому величина проміжку визначається шляхом аналізу статистичних даних по експлуатації даного обладнання.

Для дослідження проблеми заміни обладнання використовуються як детерміновані, так і стохастичні економіко-математичні моделі.

Модель заміни обладнання довгострокового користування на однотипне. Задача, що розглядається, полягає у визначенні економічної доцільності терміну заміни застарілого обладнання на однотипне нове обладнання. Термін заміни знаходиться за умови мінімізації сумарних витрат підприємства на заміну обладнання.

Щоб розглянути одну з найпростіших моделей заміни зробимо такі припущення :

а) вважатимемо, що витрати на експлуатацію обладнання в різні періоди (але однакові за тривалістю) різні і дорівнюють відповідно $b_1, b_2, \cdots$, крім того, нехай виконуються нерівності $b_{i+1} > b_i$;

б) в економіці спостерігається сталий рівень інфляції, тобто a умовних одиниць валюти в одному періоді складає μa умовних одиниць в наступному періоді.

Крім того, введемо такі позначення :

C_0 – початкова вартість обладнання ; C_k – залишкова ліквідаційна вартість обладнання в кінці k-го періоду (величини C_k розраховуються за одним із законів амортизації); S_k – сумарні витрати, які матиме підприємство, якщо обладнання буде експлуатуватися n періодів і в кінці n-го періоду буде ліквідовано.

З урахуванням коефіцієнта μ функція сумарних витрат S_n набуває вигляду

$$S_n(\mu) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \mu^{i-1} - C_n \mu^n \quad . \quad (14.1)$$

Середні сумарні витрати за один період експлуатації (позначимо їх через x) обладнання, яке використовується n періодів складатимуть $x = x(n) = \dfrac{S_n(\mu)}{n}$.

Тоді $S_n(\mu) = x + x\mu + \cdots + x\mu^{n-1} = x \cdot \dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}$. Далі $x \cdot \dfrac{1-\mu^n}{1-\mu} = C_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \mu^{i-1} - C_n \mu^n$.

Звідси дістаємо

$$x = \frac{(1-\mu)\left(C_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i \mu^{i-1} - C_n \mu^n\right)}{1-\mu^n} \quad . \qquad (14.2)$$

Природно припустити, що терміном доцільної заміни є той рік k, для якого

$$x(k) \le x(k-1), \; x(k) \le x(k+1) \quad . \qquad (14.3)$$

Ці умови, є необхідними умовами оптимальності терміну заміни. Більше того, при зроблених нами припущеннях $b_{i+1} > b_i$, нерівності дають і достатні умови оптимальності.

Надамо умовам оптимальності терміну заміни економічний зміст. Маємо

$$x(k+1) = \frac{(1-\mu)\left(C_0 + \sum_{i=1}^{k+1} b_i \mu^{i-1} - C_{k+1} \mu^{k+1}\right)}{1-\mu^{k+1}} =$$

$$= \frac{(1-\mu)\left(C_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \mu^{i-1} - C_k \mu^k\right)}{1-\mu^{k+1}} - \frac{(1-\mu)\mu^k\left(b_{k+1} + C_k - \mu C_{k+1}\right)}{1-\mu^{k+1}} > 0 \quad .$$

Далі

$$x(k+1) - x(k) = \frac{\mu^{k+1} - \mu^k}{1-\mu^{k+1}} x(k) + \frac{\mu^k - \mu^{k+1}}{1-\mu^{k+1}}\left(b_{k+1} + C_k - \mu C_{k+1}\right) > 0 \quad .$$

Звідси

$$x(k) < b_{k+1} + C_k - \mu C_{k+1} \quad . \qquad (14.4)$$

Внаслідок цілком аналогічних викладок дістаємо нерівність

$$x(k) > b_k + C_{k-1} - \mu C_k \quad . \qquad (14.5)$$

Вираз $b_{k+1}+C_k-\mu C_{k+1}$ дає величину сумарних витрат з урахуванням інфляції та амортизації обладнання за $k+1-$й період. Отже, дістали наступне правило відшукання стратегії заміни обладнання :

а) якщо витрати на експлуатацію обладнання в черговому періоді менше середніх за всі попередні періоди, то обладнання не варто міняти;

б) якщо витрати на експлуатацію обладнання в черговому періоді більші за середні за всі попередні періоди, то обладнання доцільно замінити.

Модель багаторазової заміни обладнання на однотипне протягом обмеженого планового періоду

В процесі роботи обладнання дає щорічно прибуток, вимагає експлуатаційних затрат та має залишкову вартість. Ці характеристики залежать від віку обладнання. На початку будь-якого року обладнання можна зберегти або продати по залишковій ціні та придбати нове. У випадку збереження обладнання зростають експлуатаційні витрати та зменшується продуктивність. При заміні потрібне значне додаткове фінансування. Задача полягає у визначенні оптимальної стратегії замін в плановому періоді з метою максимізації сумарного прибутку за весь плановий період.

Для кількісного формулювання задачі введемо такі позначення: $p(t)-$ вартість продукції, виробленої за рік на одиниці обладнання, вік якого дорівнює t, $r(t)$ – витрати, пов’язані з експлуатацією цього обладнання, $s(t)$ – залишкова вартість обладнання, що має вік t років, c – закупівельна ціна одиниці обладнання, T – тривалість планового періоду, $t=0,1,2,\cdots,T$ – номер поточного року.

Розв’язання задачі оптимізації прибутку можна виконати, застосувавши принцип оптимальності Беллмана. Розглянемо інтервали (роки) планового періоду в послідовності від початку до кінця. Введемо функцію умовно-оптимальних значень функції цілі $F_k(t)$. Ця функція дає значення максимального прибутку, який можна отримати від експлуатації обладнання віку t за останні k років планового періоду. Часові кроки процесу визначення максимального прибутку нумеруються у зворотному порядку, тобто при $k=i$ розглядаються останні i років планового періоду.

В даній задачі система складається з одиниці обладнання. Стан системи характеризується віком обладнання. Керування полягає у прийнятті рішення в момент $t=0,1,\cdots,T$ про збереження або заміну обладнання. Для визначення оптимальної політики замін треба проаналізувати, згідно з принципом оптимальності за Беллманом, процес від кінця до початку.

Для останнього року $(k=1)$ оптимальною політикою з точки зору оптимальності всього процесу буде політика, яка забезпечує максимальний прибуток тільки за останній рік. Враховуючи значення прибутку при різному способі дій («заміна» – «збереження»), доходимо до висновку, що рішення про заміну обладнання віку t років слід прийняти у випадку, коли прибуток від нового обладнання за останній рік планового періоду більший, ніж від старого, тобто при умові $s(t)-c+p(0)-r(0)>p(t)-r(t)$. Якщо ж $s(t)-c+p(0)-r(0)\le p(t)-r(t)$, то старе обладнання варто зберегти.

Отже, для останнього року оптимальна політика і максимальний прибуток знаходиться із умови

$$F_1(t)=\max\left\{p(t)-r(t)\,"\textit{збереження}";\,s(t)-c+p(0)-r(0)\,"\textit{заміна}"\right\}$$

При $k=2$ розглядаємо прибуток за останні два роки. Робимо припущення про можливий стан t обладнання на початок передостаннього року. Якщо на початок цього року прийняти рішення про збереження обладнання, то на кінець року буде отриманий прибуток $p(t)-r(t)$. На початок наступного року обладнання перейде в стан $t+1$, і при оптимальній політиці в останній рік буде отриманий прибуток $F_1(t+1)$. Таким чином, загальний прибуток за останні два роки складе $p(t)-r(t)+F_1(T+1)$. Якщо ж на початок передостаннього року буде прийняте рішення про заміну обладнання, то прибуток за передостанній рік складе $p(t)-c+p(t)-r(t)$. Оскільки придбане нове обладнання , то на початок останнього року воно буде знаходитися в стані $t=1$. Отже, загальний прибуток за останні два роки при оптимальній політиці в останній рік складе $s(t)-c+p(0)-r(0)+F_1(1)$. Звідси випливає, що умовно-оптимальною за останні два роки буде політика, яка забезпечить максимальний прибуток

$$F_2(t)=\max\left\{p(t)-r(t)+F_1(t+1)\,"\textit{збереження}";\,s(t)-c+p(0)-r(0)+F_1(1)\,"\textit{заміна}"\right\}$$

Аналогічно знаходиться вираз для умовно-оптимальної політики за останні три, чотири і т.д. років. Загальне функціональне рівняння має вигляд

$$F_r(t)=\max\left\{p(t)-r(t)+F_{k-1}(t+1)\,"\textit{збереження}";\,s(t)-c+p(0)-r(0)+F_{k-1}(1)\,"\textit{заміна}"\right\}.$$

Проілюструємо сказане на числовому прикладі.

Приклад. Розробити політику заміни обладнання на однотипне при таких умовах: 1) тривалість планового періоду складає 8 років; 2) ціна одиниці обладнання не змінюється протягом планового періоду і складає $c=25$ у.о.; 3) для обладнання, яке має вік експлуатації t, прибуток $p(t)$ від експлуатації одиниці обладнання за рік; витрати на обслуговування $r(t)$ та ліквідаційна вартість $s(t)$ задані таблицею :

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(t)$	48	47	46	45	43	40	38	35	32
$r(t)$	8	8	9	11	13	14	16	18	20
$s(t)$	16	15	14	13	12	11	10	9	7

Якою має бути оптимальна політика заміни відносно обладнання віком 2 роки на 7 наступних років.

Використовуючи рекурентні співвідношення, знаходимо всі значення $F_k(t)$, $0 \le t \le 8$, $1 \le k \le 8$, t,k - цілі числа. Отримаємо таблицю

$F_k(t)$ \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(t)$	40	39	37	34	30	26	25	24	22
$F_2(t)$	79	76	71	67	66	65	64	63	61
$F_3(t)$	116	110	105	104	103	102	101	100	98
$F_4(t)$	150	144	141	138	137	136	135	134	132
$F_5(t)$	184	180	175	172	171	170	169	168	166
$F_6(t)$	220	214	209	208	207	206	205	204	202
$F_7(t)$	254	248	245	242	241	240	239	238	236
$F_8(t)$	288	284	279	276	275	274	273	272	270

Жирна ламана лінія в таблиці відокремлює область «політики збереження» від області «політики заміни». Якщо значення $F_k(t)$ потрапляє зліва від жирної лінії, то обладнання треба зберегти. В противному разі обладнання треба замінити.

Користуючись отриманою таблицею значень $F_k(t)$, визначаємо оптимальну політику заміни відносно обладнання, яке мало початковий вік $t = 2$, на 7 наступних років. Маємо

$$F_7(2) \xrightarrow[\text{зберегти}]{1-\text{рік}} F_6(3) \xrightarrow[\text{зберегти}]{2-\text{рік}} F_5(4) \xrightarrow[\text{замінити}]{3-\text{рік}} F_4(1) \xrightarrow[\text{зберегти}]{4-\text{рік}}$$

$$F_3(2) \xrightarrow[\text{замінити}]{5-\text{рік}} F_2(1) \xrightarrow[\text{зберегти}]{6-\text{рік}} F_1(2) \xrightarrow[\text{зберегти}]{7-\text{рік}}$$

Таблиця дозволяє знаходити оптимальну політику заміни для обладнання віком $t \le 7$ на термін, що не перевищує плановий період $t = 8$.

В інших моделях заміни обладнання враховують можливість заміни обладнання не новим, а таким, що вже пропрацювало кілька років. Можна розглядати можливість капітального ремонту старого обладнання. При цьому в поняття «стан» системи необхідно включити час останнього ремонту обладнання. Функція $F_k(t_1, t_2)$ буде виражати прибуток за останні k років планового періоду при умові, що на початку було обладнання віком t_1, яке пройшло капітальний ремонт після t_2 років служби. Характеристики p, r, s також можуть бути функціями двох змінних t_1 та t_2.

Запитання для самоперевірки знань

1. Які економічні та соціальні причини стимулюють дослідження проблеми заміни обладнання довгострокового користування ?
2. Назвіть основні критерії оптимізації в задачах заміни обладнання.
3. Сформулюйте задачу багаторазової заміни обладнання на однотипове для обмеженого планового періоду.
4. Як визначається оптимальна політика заміни обладнання в моделі багаторазової заміни ?

Лекція 15
Задачі з умовами ризику та невизначеності

Як уже зазначалося, ризик являє собою щодо інформації, яка є в наявності при проведенні операції, проміжну ситуацію між визначеністю та невизначеністю. Неповнота вихідної інформації проявляється у вигляді законів розподілу випадкових величин, які входять до стохастичної моделі прийняття рішень. Задачі прийняття рішень в умовах ризику поділяють на одноетапні та багатоетапні, які в нашому курсі розглядати не будемо.

Одноетапні задачі прийняття рішень в умовах ризику. Загальні принципи оптимальності в умовах ризику базуються переважно на таких характеристиках :

1) очікуване значення прибутку, витрат;
2) зважений вектор очікуваного значення та його дисперсії;
3) заданий граничний рівень очікуваного значення;
4) найбільш ймовірна подія при проведенні операції.

Відповідно до цих характеристик розглянемо чотири скалярні критерії, які найчастіше використовуються при прийнятті рішень в умовах ризику.

Критерій очікуваного значення. Застосування цього критерію пов’язане з бажанням максимізувати очікуваний прибуток або мінімізувати очікувані витрати. Кількісно критерій очікуваного значення можна виразити в грошових одиницях або в одиницях корисності грошей. Різницю між грошовою одиницею та одиницею корисності грошей пояснимо на прикладі.

Припустимо, що при інвестуванні 5000 у.о. в деякий проект, в кінці планового періоду τ можна дістати дохід 200000 у.о. з ймовірністю $0,6$ або нульовий доход з ймовірністю $0,4$. Особі, що приймає рішення, треба визначитись про доцільність інвестування.

Очікуваний доход складає

$$200000 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 - 50000 = 70000 \text{ у.о.}$$

і зацікавленій проектом стороні може здаватися, що інвестування є оптимальним рішенням.

Проте, наприклад, інвестор A може вважати, що втрата 50000 у.о. готівкою може призвести його до банкротства, а інвестор B, що має в розпорядженні великий незадіяний капітал, може без коливань піти на ризик.

Цей приклад показує вагомість ставлення особи, що приймає рішення, до корисності грошей. Так, інвестор A, не бажаючи ризикувати, може запропонувати для інвестування у проект 200000 у.о., хоча у цьому випадку очікуваний дохід складатиме

$$80000 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 - 20000 = 28000 \text{ у.о.},$$

тобто набагато менше, ніж при інвестуванні 50000у.о.

Практичне застосування скалярного критерію типу «очікуване значення» доцільне у випадках, коли одне і те саме рішення доводиться приймати велику кількість разів.

Критерій «очікуване значення – дисперсія». Припустимо, що величина доходу (витрат) є випадковою величиною з математичним очікуванням m та дисперсією σ^2. Критерій «очікуване значення – дисперсія» виражається в оптимізації комбінації математичного очікування та дисперсії

$$M\left[\xi(\omega)\right] \mp k \cdot D\left[\xi(\omega)\right] \to \max(\min), \qquad (8.)$$

де значення k інтерпретують як рівень несхильності до ризику, знак «-» береться у разі максимізації доходу, а знак «+» у разі мінімізації витрат.

Якщо $\xi(\omega)$ прибуток, то інвестор, який гостро реагує на можливі відхилення прибутку вниз від очікуваного значення, може вибрати велике значення k. Це надасть більшу вагу дисперсії і приведе до розв'язку, що зменшує ймовірність великої втрати прибутку.

Розглянемо приклад. Кожен із n однотипних верстатів ремонтується індивідуально, якщо він зупинився через несправність, а через τ часових проміжків виконується профілактичний ремонт всіх верстатів. Необхідно знайти оптимальне значення τ, при якому мінімізуються загальні витрати на ремонт верстатів, що вийшли з ладу, та профілактичний ремонт в розрахунку на один часовий проміжок.

Позначимо через p_k ймовірність виходу з ладу одного верстата в k-му одиничному часовому інтервалі, $k = \overline{1,\tau}$, а через n_k – число верстатів, які вийшли з ладу в k-му одиничному часовому інтервалі. Крім того, позначимо через C_1 – витрати на ремонт одного несправного верстата, а через C_2 – витрати на профілактичний ремонт одного верстата. Тоді загальні витрати на ремонт несправних верстатів та на профілактичний ремонт в розрахунку на один часовий інтервал являють собою випадкову величину

$$C(\tau,\omega) = \frac{1}{\tau}\left(C_1 \sum_{k=1}^{\tau} n_k(\omega) + C_2 n\right) \quad (15.1)$$

При цьому очікувані витрати на один одиничний часовий проміжок складуть

$$M\left[C(\tau,\omega)\right] = \frac{1}{\tau}\left(C_1 \sum_{k=1}^{\tau} M\left[n_k(\omega)\right] + C_2 n\right) = \frac{n}{\tau}\left(C_1 \sum_{k=1}^{\tau} p_k + C_2\right) \quad (15.2)$$

Зауважимо, що критерій «очікуване значення» має вигляд

$$M\left[C(\tau,\omega)\right] = \frac{n}{\tau}\left(C_1 \sum_{k=1}^{\tau} p_k + C_2\right) \to \min_{\tau \ge 1}\ .$$

Оскільки $D\left[n_k(\omega)\right] = np_k(1-p_k)$, то дисперсія повних витрат дорівнює

$$D\left[C(\tau,\omega)\right] = \frac{C_1^2}{\tau^2} \sum_{k=1}^{\tau} D\left[n_k(\omega)\right] = \left(\frac{C_1}{\tau}\right)^2 \cdot n \cdot \sum_{k=1}^{\tau} p_k(1-p_k) = n\left(\frac{C_1}{\tau}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\tau} p_k - \sum_{k=1}^{\tau} p_k^2\right)\ .$$

Таким чином, критерій «очікуване значення – дисперсія» має вигляд

$$M\left[C(\tau,\omega)\right] + kD\left[C(\tau,\omega)\right] = \frac{n}{\tau}\left(C_1 \sum_{k=1}^{\tau} p_k + C_2\right) + kn\left(\frac{C_1}{\tau}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\tau} p_k - \sum_{k=1}^{\tau} p_k^2\right) \to \min_{\tau \ge 1} \quad (15.3)$$

Зазначимо, що критерій «очікуване значення – дисперсія», як і критерій «очікуване значення» доцільно застосовувати у випадках, коли одне і те саме рішення приходиться приймати велике число разів.

Використавши критерій очікуване значення – дисперсія», проведемо розрахунки для значень $C_1 = 100, C_2 = 10, n = 50$, звівши одержані значення до таблиці:

τ	k	p_k	$M\left[C(\tau,\omega)\right]$	$D\left[C(\tau,\omega)\right]$	M/D	$M+D$
1	1	0,05	750	23750	0,03	24500
2	2	0,07	550	14075	0,04	14625
3	3	0,10	533	11256	0,05	11789
4	4	0,13	562	9866	0,06	10428
5	5	0,18	630	9266	0,07	9896

Використавши результати обчислень упевнюємося, що при використанні критерію «очікуване значення» оптимальним значенням буде $\tau_* = 3$. Якщо використати критерій «очікуване значення – дисперсія» і покласти $k = 1$, тобто вважати математичне очікування і дисперсію «рівноправними», то отримаємо оптимальне значення $\tau_* = 5$, яке відрізняється від оптимального значення, знайденим за критерієм «очікуваного значення».

Ефективність практичного застосування критерію «очікуване значення – дисперсія» значною мірою залежить від обґрунтованого призначення рівня несхильності до ризику (вибору коефіцієнта k), а цей вибір з деяких причин є проблематичним.

Критерій граничного рівня. Припустимо, що власнику нерухомості для ліквідації наслідків форс-мажорних обставин треба у стислий термін продати нерухомість. Тоді він може встановити ціну, нижче якої нерухомість не може бути продана, і погодитися з найвигіднішою пропозицією, яка надійшла за допустимий проміжок часу і перевищує встановлений граничний рівень.

Використання такого критерію, який називається критерієм граничного рівня, в загальному випадку не приводить до оптимального розв’язку, а скоріше визначає сприйнятливий спосіб дій. Якщо відомі закони розподілу відповідних випадкових величин, то це дозволяє більш обґрунтовано призначати граничний рівень.

Приклад. Нехай величина попиту за одиницю часу на деякий товар, що називається інтенсивністю попиту, є випадковою величиною з функцією щільності розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^2}, & x \in [10, 20] \\ 0, & x \notin [10, 20] \end{cases}.$$

Якщо в початковий момент запаси товару невеликі, то в подальшому можливий дефіцит товару, який виражається випадковою величиною $\alpha(\omega)$. В противному разі до кінця досліджуваного періоду запаси нереалізованого товару можуть виявитися занадто великими, тобто може утворитися надлишок, що виражається випадковою величиною $\beta(\omega)$. В обох випадках невідворотні втрати. В першому випадку зменшується потенційний прибуток і можлива втрата клієнтів, а в другому випадку зростають витрати, пов'язані із придбанням товару, та витрати на його складування.

Можливий компроміс полягає у виборі рішення, яке встановлює визначений баланс між двома видами втрат. Визначити втрати, викликані дефіцитом товару, досить складно. Тому суб'єкт, що приймає рішення, може встановити необхідний рівень запасів L таким чином, щоб величина очікуваного дефіциту не перевищувала A, а величина очікуваного надлишку не перевищувала B. Таким чином,

$$M\left[\alpha(\omega)\right]=\int_L^{\infty}(x-L)f(x)dx\le A,$$

$$M\left[\beta(\omega)\right]=\int_{-\infty}^{L}(L-x)f(x)dx\le B\quad .$$

Із вигляду функції щільності ймовірності інтенсивності попиту $f(x)$ випливає, що L належить відрізку $[10,20]$ і, як наслідок, виконуються нерівності

$$20\left(\ln\frac{20}{L}+\frac{L}{20}-1\right)\le A,\ 20\left(\ln\frac{10}{L}+\frac{L}{10}-1\right)\le B$$

або

$$\ln L-0,05L\ge\ln 20-0,05A-1,\ \ln L-0,1L\ge\ln 10-0,1B-1\quad .$$

Граничні значення A очікуваного дефіциту та B очікуваного надлишку повинні бути вибрані так, щоб обидві отримані нерівності справджувалися хоча б для одного значення L. Якщо, наприклад, $A=2$, $B=4$, то нерівності для визначення необхідного рівня запасів L набувають вигляду

$$\ln L-0,05L\ge 1,896\ ,\quad \ln L-0,1L\ge 1,102\quad .$$

Розрахунки показують, що обидві нерівності виконуються для будь-якого значення $L\in[13,17]$, тобто будь-яке значення L із проміжку $[13,17]$ задовольняє умові вихідної задачі.

Критерій найбільш ймовірного результату. Суть цього критерію в заміні можливого значення випадкової величини її єдиним значенням, яке має найбільшу ймовірність реалізації. Якщо ξ дискретна випадкова величина, яка приймає значення $\xi_i, i=1,2,\cdots$, то її значення ξ^*, що визначається з умови

$$P\{\xi(\omega)=\xi_*\}=\max_{i=1,2,\cdots}P\{\xi(\omega)=\xi_i\}\ ,\quad (15.4)$$

може розглядатися як потрібне детерміноване значення.

Приклад. У страхової компанії за рік приблизно 15000 клієнтів. Страховий внесок кожного клієнта складає 2000 грн. За оцінками експертів імовірність страхового випадку на протязі року $p=0,006$. Страхова виплата клієнту складає 220000 грн. Визначити річний прибуток компанії.

Скористаємося критерієм найбільш ймовірного результату. Найімовірніше число успіхів у схемі Бернуллі, як відомо, визначається з умови

$$np-q\le k_0\le np+p\ ,$$

де n – число випробовувань, p – ймовірність успіху в одному випробовуванні, $q=1-p$.

Тому найвірогідніше число страхових випадків визначається із умови

$$15000 \cdot 0,006 - 0,994 \le k_0 \le 15000 \cdot 0,006 + 0,994 \ .$$

Звідси знаходимо $k_0 = 90$.Найбільш ймовірний прибуток компанії обчислимо як різницю між страхових внесків та сумою страхових виплат. Отже, найбільш ймовірний прибуток страхової компанії складе $P = 15000 \cdot 2000 - 220000 \cdot 90 = 10200000$ грн. •

Критерій найбільш ймовірного результату, як і раніше розглянуті критерії, не є універсальним. Наприклад, його недоцільно використовувати в таких випадках:

а) $\xi(\omega)$ є дискретною випадковою величиною, яка приймає значення ξ_i, загальна кількість n яких велика, причому $P\{\xi(\omega) = \xi_i\} \le 0,005$, $k = \overline{1,n}$;

б) найбільшу ймовірність реалізації мають декілька значень дискретної випадкової величини.

Одноетапні задачі прийняття рішень в умовах невизначеності Критерій граничного рівня, який був розглянутий для задач з умовами ризику, в загальному випадку не вимагає знання законів розподілу випадкових величин. Тому він може бути застосований і для прийняття рішень в умовах невизначеності. До критеріїв, які найчастіше використовуються на практиці, належать такі:

1) критерій Лапласа;
2) мінімаксний (максимінний) критерій;
3) критерій Севіджа;
4) критерій Гурвіца.

Різниця між цими критеріями визначається в основному поведінкою оперуючої сторони в умовах невизначеності. Критерій Лапласа базується на більш оптимістичних припущенням, ніж мінімаксний критерій, а критерій Гурвіца, в свою чергу, можна використати у підходах від найбільш песимістичних до найбільш оптимістичних.

Інформація, яка необхідна для прийняття рішень в умовах невизначеності, як правило, подається у вигляді матриці

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix},$$

i-й рядок якої відповідає рішенню x_i із множини допустимих рішень $\{x_i, i = \overline{1,m}\}$, а j-й стовпець відповідає стану s_j системи S, яка вивчається, з множиною станів $\{s_j, j = \overline{1,n}\}$. Кожному допустимому рішенню x_i і кожному можливому стану s_j системи S відповідає елемент $p_{ij} = v(x_i, s_j) \in P$, який визначає виграш або втрати при прийнятті даного рішення і реалізації даного стану.

Критерій Лапласа. Цей критерій ще називається принципом недостатнього обґрунтування. В умовах невизначеності відсутня інформація про ймовірність перебування системи S, яка вивчається, в кожному з її можливих станів $s_j,\ j=\overline{1,n}$ і також невідомо, які з станів є більш чи менш ймовірними. Тому можна припустити, що ймовірності реалізації можливих станів є рівними. Таким чином, вихідну задачу з матрицею виграшів можна розглядати як задачу прийняття рішення в умовах ризику, коли вибирають рішення x_*, що забезпечує найбільш очікуваний виграш, тобто

$$\max_{x_i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v\left(x_i, s_j\right). \qquad (15.5)$$

Вибір оптимального рішення таким способом називається критерієм Лапласа.

Мінімаксний (максимінний) критерій. Цей критерій пов'язаний з обережною поведінкою оперуючої сторони. У випадку максимізації виграшу пропонується вибір найкращої із найгірших можливостей. При максимізації виграшу за оптимальне вибирають рішення x_*, із умови

$$\max_{x_i} \min_{s_j} v\left(x_i, s_j\right),$$

а у випадку мінімізації втрат за оптимальне вибирають рішення x_*, із умови

$$\min_{x_i} \max_{s_j} v\left(x_i, s_j\right).$$

Критерій Севіджа. Мінімаксний (максимінний) критерій є настільки песимістичним, що може призвести до нелогічних висновків.

Наприклад, розглянемо задачу в умовах невизначеності з матрицею втрат (в у.о.)

$$P=\left[v\left(x_i, s_j\right)\right]=\begin{pmatrix} 1300 & 100 \\ 1200 & 1200 \end{pmatrix}.$$

Застосування мінімаксного критерію дає як оптимальне рішення x_2 із втратами 1200 у.о. при реалізації системою одного із можливих станів s_1 або s_2. Але інтуїтивно відчувається висновок, про доцільність вибору рішення x_1. Оскільки в цьому разі не виключається можливість реалізації стану s_2 і втрати всього 100 у. о.

Для усунення зазначеного недоліку введемо величину

$$r\left(x_i, s_j\right)=\begin{cases} \max\limits_{x_i} v\left(x_i, s_j\right)-v\left(x_i, s_j\right), & \text{якщо } v\left(x_i, s_j\right) \text{ виграш}, \\ v\left(x_i, s_j\right)-\min\limits_{x_i} v\left(x_i, s_j\right), & \text{якщо } v\left(x_i, s_j\right) \text{ втрати} \end{cases}.$$

Образно висловлюючись, величина $r\left(x_i, s_j\right)$ виражає співчуття оперуючої сторони з тієї причини, що не вибране найкраще рішення (у разі найкращого рішення $x_* = x_i$ при стані s_j маємо $r\left(x_i, s_j\right)=0$). Тому матрицю $R=\left[r_{ij}\right]$ називають матрицею співчувань, а мінімаксний (максимінний) критерій відносно цієї матриці називають критерієм Седвіджа.

При використанні цього критерію чинять так:

а) якщо $v\left(x_i, s_j\right)$ виграш, то оптимальне рішення x_* вибирають з умови $\max\limits_{x_i} \min\limits_{s_j} r\left(x_i, s_j\right)$;

б) якщо $v(x_i, s_j)$ втрати, то оптимальне рішення x_* вибирають з умови $\min\limits_{x_i} \max\limits_{s_j} r(x_i, s_j)$.

Для розглянутого вище прикладу використання мінімаксного критерію призводило до нелогічного висновку.

Оскільки $\min\limits_{x_i} v(x_i, s_1) = 12000$, $\min\limits_{x_i} v(x_i, s_2) = 100$, то матриця втрат має вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1100 \end{pmatrix} .$$

Таким чином,

$$\max_{s_j} r(x_1, s_j) = r(x_1, s_1) = 1000, \quad \max_{s_j} r(x_2, s_j) = r(x_2, s_2) = 1100,$$

$$\min_{x_i} \max_{s_j} r(x_i, s_j) = r(x_1, s_1) = 1000$$

і за критерієм Севіджа оптимальним рішенням є x_1. Цей самий результат отримаємо, якщо застосуємо критерій Лапласа.

Критерій Гурвіца. Цей критерій дозволяє приймати рішення в умовах невизначеності від найбільш песимістичного до найбільш оптимістичного.

Якщо $P = \left[v(x_i, s_j)\right], i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ матриця прибутків, то найбільш оптимістичному відповідає критерій $\max\limits_{x_i} \max\limits_{s_j} v(x_i, s_j)$, а найбільш песимістичному – критерій $\min\limits_{x_i} \min\limits_{s_j} v(x_i, s_j)$.

Критерій Гурвіца базується на виборі балансу між найбільш оптимістичним та найбільш песимістичним підходом шляхом зважування обох варіантів.

Якщо P матриця виграшів, то за критерієм Гурвіца вибирають як оптимальне рішення x_*, що забезпечує

$$\max_{x_i} \left(\alpha \max_{s_j} v(x_i, s_j) + (1-\alpha) \min_{s_j} v(x_i, s_j) \right).$$

Якщо P матриця втрат, то за критерієм Гурвіца в якості оптимального вибирають рішення x_*, що забезпечує

$$\min_{x_i} \left(\alpha \min_{s_j} v(x_i, s_j) + (1-\alpha) \max_{s_j} v(x_i, s_j) \right).$$

Параметр $\alpha \in [0,1]$ називається показником оптимізму. Це значення вибирається оперуючою стороною. При схильності до оптимізму на досвіді прийняття рішень вибирають $\alpha \to 1$, а при схильності до песимізму вибирають $\alpha \to 0$. При відсутності чітко виражених схильностей вибір $\alpha = 0,5$ є найбільш зваженим.

Запитання для самоперевірки знань

1. Що об'єднує задачі прийняття рішень в умовах ризику та в умовах невизначеності ?

2. В чому полягає принципова різниця задач прийняття рішень в умовах ризику та в умовах невизначеності ?
3. Які основні недоліки критерію очікуваного значення ?
4. Яка основна ідея закладена в критерій граничного рівня ?
5. Вкажіть основні ідеї, які закладені в основу критеріїв Лапласа, Севіджа, мінімаксу для прийняття рішення в умовах невизначеності.
6. Який із відомих вам критеріїв для прийняття рішення в умовах невизначеності є : а) найбільш песимістичним ; б) найбільш оптимістичним ?

Лекція 16
Матричні ігри

Один з класів задач дослідження операцій складають задачі, в яких треба оцінювати можливі наслідки прийняття деяких рішень в умовах невизначеності.

Теорія гри розглядає задачі при умовах, коли невизначеність зумовлена свідомими діями учасників операції. Зауважимо, що теорія гри є розділом математики. Це означає, що конструйовані в ній моделі є формальними, знаковими (а не, наприклад, макетними чи аналоговими) і їх формування та засоби їх аналізу також формальні. Тому основні поняття цієї теорії є формалізованими. Найважливішими поняттями теорії гри є поняття конфлікту, прийняття рішення та оптимального рішення.

В теорії гри існують два основні напрямки. Один з них вивчає конфліктні ситуації, тобто ситуації, коли цілі учасників гри (коаліцій) є протилежними. Такі ігри називаються антагоністичними. Типовими прикладами антагоністичних ігор є шахи, шашки, «хрестики-нолики», «орлянка». Проведення військових операцій також можна розглядати як антагоністичну гру.

Інший напрямок теорії гри складають кооперативні ігри. Кооперативні ігри найчастіше виникають в економіці та в соціальній сфері. Нехай декілька фірм конкурують на товарному ринку і зацікавлені у збільшенні своїх доходів. Ціна на продукцію визначається попитом на товар та кількістю випущеної продукції. Теорія гри дозволяє рекомендувати фірмам-гравцям випуск продукції в таких кількостях, при яких кожному окремо взятому гравцю невигідно відхилятися від рекомендованого обсягу.

Будемо в подальшому розглядати лише такі операції, коли учасники операції мають різні цілі, тобто ситуація є конфліктною. При конфліктній ситуації результат боротьби лише частково залежить від дій кожної сторони. Гра – математична модель колективної поведінки кількох учасників гри (гравців), які шляхом вибору індивідуальних рішень (стратегій) впливають на ситуацію (наслідок гри), причому їхні інтереси (цілі) у різних можливих ситуаціях є різними.

Якщо гра має лише двох гравців (позначатимемо їх через A та B), то така гра називається парною. Надалі будемо розглядати парні ігри.

Стратегія гравця (учасника гри) – це однозначний опис його вибору в кожній можливій ситуації. Нехай S_A та S_B множини стратегій гравців A та B. Якщо $x \in S_A, y \in S_B$ – прийняті рішення (вибрані стратегії), то пару (x, y) наслідком (результатом) гри, або бістратегією. Кожній бістратегії ставляться у відповідність два числа $R_A = r_A(x, y)$ – виграш гравця A та $R_B = r_B(x, y)$ – виграш гравця B. Вважатимемо, що єдиною метою кожного з гравців є отримання максимальної суми виграшу.

Найбільш вивченими є ігри з нульовою сумою, тобто ігри, для яких виконується співвідношення $R_A + R_B = r_A(x, y) + r_B(x, y) = 0$. Для таких ігор виграш одного гравця дорівнює програшу (виграшу із знаком мінус) іншого гравця. Ігри з нульовою сумою називаються антагоністичними.

Таким чином, парна гра з нульовою сумою задається трійкою (S_A, S_B, R), де S_A, S_B – множини стратегій гравців A та B, а R – функція виграшу гравця A. Подальші викладки зроблені для парних ігор з нульовою сумою.

Якщо множини стратегій гравців скінченні, то гра називається матричною. Матрична гра задається множинами стратегій гравців $S_A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $S_B = \{y_1, x_{2y}, \cdots, y_m\}$ та платіжною матрицею (матрицею гри) R, елементами якої є значення $r_{ij} = r(x_i, y_j)$ суми виграшу гравця A для кожної бістратегії.

Отже, матрична гра задається таблицею :

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1m}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	r_{n1}	r_{n2}	$\cdots$	r_{nm}

Оскільки стратегії гравців можна ідентифікувати індексами тобто $x_i \leftrightarrow i$, $y_j \leftrightarrow j$, то матрична гра однозначно задається платіжною матрицею

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}. \quad (16.1)$$

Нехай вектор $x_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in R^n$, де число 1 стоїть на місці з координатою i, а решта компонент вектора дорівнює нулю, означає стратегію гравця A, а вектор $y_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in R^m$, де число 1 стоїть на місці j-ї координати, а решта компонент вектора дорівнює нулю, означає стратегію гравця B. Тоді

$$r_{ij} = (x_i, R\, y_j) = (R' x_i, y_j) \ .$$

Теорія ігор використовує принцип вибору стратегій, який є принципом гарантованого результату гри. Цей принцип означає, що гравець A повинен мислити таким чином : якщо вибрати стратегію x_i, то гравець B може вибрати стратегію y_j таким чином, що число r_{ij} буде найменшим із чисел r_{ij}, де i – фіксоване, а $j = 1, 2, \cdots, m$, тобто виграш складе $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le m} r_{ij}$. Звичайно, гравець B не знає наперед вибору стратегії i гравцем A, але він може вибрати саме стратегію j. В цьому випадку гравець A може програти значну суму. Тому пропонується проявляти обережність і вибрати стратегію i таким чином, щоб число α_i було якомога більшим, тобто вибрати стратегію з умови

$$\alpha = \max_{1 \le i \le n} \alpha_i = \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} r_{ij} . \qquad (16.2)$$

Описаний підхід називається принципом мінімаксу і гарантує гравцю A виграш величиною α. При цьому значення α називається нижньою ціною гри.

Провівши аналогічні міркування для гравця B, який зацікавлений в мінімізації свого гарантованого програшу, дійдемо до висновку, що найкращим його рішенням буде вибір такої стратегії, яка мінімізує значення $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le n} r_{ij}$ і при цьому гравець B програє не більше, ніж

$$\beta = \min_{1 \le j \le m} \beta_j = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le i \le n} r_{ij} , \qquad (16.3)$$

тобто гравцю B треба скористатися максимінним принципом. Відповідне значення β називається верхньою ціною гри.

В тому випадку, коли нижня ціна гри дорівнює верхній ціні, їх спільне значення називається ціною гри та позначається ν. Ціна гри співпадає з елементом $r_{i_0 j_0}$ платіжної матриці R, який є одночасно мінімальним в своєму рядку i_0 та максимальним в своєму стовпці j_0. Цей елемент називається сідловою точкою матриці R, або точкою рівноваги, а про гру говорять, що вона має сідлову точку.

Стратегії x_{i_0} та y_{j_0}, що відповідають сідловій точці, називаються оптимальними. Сукупність всіх оптимальних пар стратегій разом з ціною гри називається розв'язком матричної гри.

Хоча матричні ігри із сідловою точкою важливі та цікаві, але більш типовим є випадок, коли застосування мінімаксного критерію приводить до нерівності $\alpha < \beta$. В цьому випадку виникає питання як розумно з точки зору науково підходу поділити між гравцями різницю $\beta - \alpha$. Виявляється, що компромісного поділу різниці $\beta - \alpha$ між гравцями та впевненого отримання кожним з них своєї частки при багатократному повторенні гри можна досягти шляхом випадкового застосування кожним з гравців своїх чистих стратегій.

Випадкова величина, значення якої ідентифікують чисті стратегії гравця, називається його мішаною стратегією. Мішана стратегія гравця A позначається

$$S_A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} ,$$

де p_i – ймовірность з якими гравець A застосовує i-у стратегію, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Чиста стратегія $x_i, i = \overline{1,n}$ є частинним випадком мішаної стратегії, що описується набором ймовірностей $p_i = 1$ та $p_j = 0$, якщо $j \neq i$.

Якщо гравець A застосовує мішану стратегію $S_A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$, а гравець B застосовує мішану стратегію $S_B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$, то середній виграш гравця A буде складати $R_A(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} p_i q_j$.

Стратегії $S_A^0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1^0 & p_2^0 & \cdots & p_n^0 \end{pmatrix}$ та $S_B^0 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1^0 & q_2^0 & \cdots & q_m^0 \end{pmatrix}$ називаються оптимальними стратегіями гравців A та B відповідно, якщо виконуються співвідношення

$$R_A\left(S_A, S_B^0\right) = R_A\left(S_A^0, S_B^0\right) = R_A\left(S_A^0, S_B\right) \qquad (16.4)$$

Ця умова оптимальності рівносильна такій :

$$\max_{S_A}\min_{S_B} R_A\left(S_A, S_B\right) = R_A\left(S_A^0, S_B^0\right) = \min_{S_B}\max_{S_A} R_A\left(S_A, S_B\right) . \qquad (16.5)$$

Величина $\nu = R_A\left(S_A^0, S_B^0\right)$ називається ціною гри.

Зауважимо, що екстремальні величини $\max_{S_A}\min_{S_B} R_A\left(S_A, S_B\right)$ та $\min_{S_B}\max_{S_A} R_A\left(S_A, S_B\right)$ завжди існують внаслідок неперервності функції $R_A\left(S_A, S_B\right)$ на замкнутій множині $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, q_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Відповідь на питання про існування розв’язку матричної гри дає наступна теорема, яку часто називають основною теоремою про матричні ігри.

Теорема фон Неймана. Будь-яка матрична гра має розв’язок в чистих або в мішаних стратегіях.

При знаходженні розв’язку матричної гри користуються наступним твердженням.

Теорема. Нехай $S_A^0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1^0 & p_2^0 & \cdots & p_n^0 \end{pmatrix}$ та $S_B^0 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1^0 & q_2^0 & \cdots & q_m^0 \end{pmatrix}$ оптимальні стратегії гравців ν – ціна гри. Тоді справедливі співвідношення

$$\sum_{j=1}^{m} r_{ij} q_j^0 = \nu \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} r_{ij} p_i^0 = \nu \ . \qquad (16.6)$$

Приклад. Знайти розв’язок матричної гри в чистих або мішаних стратегіях, якщо платіжна матриця

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Знаходимо нижню та верхню ціну гри

$$\alpha = \max\left\{\min\left\{-4, 2\right\}, \min\left\{3, -1\right\}\right\} = \max\left\{-4, -1\right\} = -1 \ ,$$

$$\beta = \min\left\{\max\left\{-4,3\right\},\max\left\{2,-1\right\}\right\} = \min\left\{3,2\right\} = 2 \ .$$

Оскільки $-1 = \alpha < \beta = 2$, то гра немає розв'язку в чистих стратегіях.

Знайдемо оптимальну мішану стратегію $S_A^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ гравця A, розв'язавши систему

$$\begin{cases} -4p_1 + 3p_2 = \nu \ , \\ 2p_1 - p_2 = \nu \ , \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} .$$

Маємо

$$\begin{cases} 6p_1 - 4p_2 = 0 \ , \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} p_2 = \dfrac{3}{2} p_1 \ , \\ \left(1 + \dfrac{3}{2}\right) p_1 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{2}{5} \ , \\ p_2 = \dfrac{3}{5} \end{cases} .$$

Отже, $S_A^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Аналогічно знаходимо оптимальну мішану стратегію $S_B^* = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ гравця B, розв'язавши систему

$$\begin{cases} -4q_1 + 2q_2 = \nu \ , \\ 3q_1 - q_2 = \nu \ , \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} .$$

Маємо

$$\begin{cases} 7q_1 - 3q_2 = 0 \ , \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} q_1 = \dfrac{3}{7} q_2 \ , \\ \left(1 + \dfrac{3}{7}\right) q_2 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} q_1 = \dfrac{3}{10} \ , \\ p_2 = \dfrac{7}{10} \end{cases} .$$

Отже, $S_B^* = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{7}{10} \end{pmatrix}$.

Розв'язання будь-якої матричної гри зводиться до розв'язання задачі лінійного програмування. При цьому об'єм обчислень безпосередньо залежить від числа чистих стратегій гравців, тобто він збільшується із збільшенням числа стратегій гравців, а, отже, із збільшенням розмірів матриці гри. Тому на практиці важливо використовувати методи попереднього аналізу для спрощення гри.

При аналізі платіжної матриці гри можна виявити, що деякі чисті стратегії не можуть бути активними у оптимальних мішаних стратегіях. Відкидання таких стратегій дозволяє замінити початкову матрицю на матрицю виграшів менших розмірів.

Нехай

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

платіжна матриця. Кажуть, що стратегія x_j домінує стратегію x_i (або j-й рядок домінує i-й рядок), якщо виконуються нерівності

$$r_{i1} \le r_{j1}, r_{i2} \le r_{j2}, \cdots, r_{im} \le r_{jm} \ .$$

Зрозуміло, що гравець A поступить розумно, якщо уникне використання стратегій, для яких існують домінуючі стратегії.

Отже, якщо в матриці R j-й рядок домінує i-й рядок, то число рядків матриці можна зменшити відкиданням i-го рядка.

Будемо говорити, що стратегія y_l домінує стратегію y_k (або l-й стовпчик домінує k-й стовпчик), якщо виконуються нерівності

$$r_{1k} \le r_{1l}, r_{2k} \le r_{2l}, \cdots, r_{nk} \le r_{nl} \ .$$

Для гравця B також вигідно уникати використання стратегій, для яких є домінуючі стратегії.

Отже, якщо в матриці R l-й стовпчик домінує k-й стовпчик, то число стовпчиків можна зменшити відкиданням k-го стовпчика.

При заходженні розв'язку матричної гри часто буває корисним так зване афінне правило.

Теорема. Оптимальні стратегії матричних ігор, елементи платіжних матриць яких R та W пов'язані рівностями

$$w_{ik} = \lambda r_{ik} + \mu, \ i = 1,2,\cdots,n; k = 1,2,\cdots,n \ , \qquad (16.7)$$

де $\lambda > 0$, а μ – довільне, мають однакові рівноважні ситуації (або в чистих, або в мішаних стратегіях) , а їх ціни задовольняють умові

$$v_W = \lambda v_R + \mu \ . \qquad (16.8)$$

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Розглянемо $m \times n$ гру з платіжною матрицею R. Внаслідок афінного правила без втрати загальності будемо вважати, що всі елементи матриці R додатні.

Отже, шукана ціна гри v – додатне число.

Нехай $S_A^0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1^0 & p_2^0 & \cdots & p_n^0 \end{pmatrix}$ оптимальна мішана стратегія гравця A. Тоді внаслідок теореми про властивості мішаних стратегій повинні виконуватися співвідношення

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} p_i^0 \ge v, \ j = 1,2,\cdots,m, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,n \ .$$

Поклавши $x_i = \frac{p_i}{\nu}, i = 1,2,\cdots,n$, перепишемо ці співвідношення у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq 1,\ j = 1,2,\cdots,m,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{\nu},\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,n\ .$$

Оскільки гравець A має отримати гарантований максимальний виграш, то задача знаходження розв'язку матричної гри зводиться до задачі лінійного програмування

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min, \qquad (16.9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i \geq 1,\ j = 1,2,\cdots,m, \qquad (16.10)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,n\ . \qquad (16.11)$$

Аналогічним чином, розглядаючи оптимальну мішану стратегію $S_B^0 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1^0 & q_2^0 & \cdots & q_m^0 \end{pmatrix}$ гравця B, для знаходження цієї стратегії приходимо до необхідності розв'язання задачі лінійного програмування

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \max, \qquad (16.12)$$

$$\sum_{j=1}^{m} r_{ij} y_i \geq 1,\ i = 1,2,\cdots,n, \qquad (16.13)$$

$$y_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,m\ . \qquad (16.14)$$

Далі задача розв'язується одним із методів лінійного програмування.

Запитання для самоперевірки знань

1. Дайте означення матричної гри двох учасників з нульовою сумою.
2. Чому стратегію гравця, яка домінується деякою іншою стратегією, недоцільно розглядати як потенційну для вибору ?
3. Що називають розв'язком гри, її нижньою та верхньою ціною ?
4. Як формулюється принцип мінімакса ?
5. Сформулюйте теорему фон Неймана про матричні ігри.
6. Як звести розв'язання матричної гри до розв'язання задачі лінійного програмування ?

Лекція 17
Задачі багатокритеріальної оптимізації

В реальному житті часто виникають ситуації, коли треба приймати рішення, яке б задовольняло не одному , а кільком критеріям оптимальності. Наприклад, треба купити прилад за мінімальною ціною з якомога більшою продуктивністю та високим ступенем надійності.

Такі задачі називаються багатокритеріальними, а відповідний їм критерій є векторним. Математичний запис задачі:

$$\left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\right) \to \left(\max(\min), \max(\min), \cdots, \max(\min)\right), \quad (17.1)$$

$$x \in D \subseteq R^n. \quad (17.2)$$

Оскільки функції $f_i(x), i = \overline{1,m}$ приймають, як правило, свої оптимальні значення в різних точках допустимої множини D, то в подібних задачах зростає роль суб'єктивного фактора, тобто сторони, що приймає рішення. Разом з тим, розроблені ряд підходів, які дозволяють знаходити компроміс при прийнятті рішення.

Найбільш відомими методами багатокритеріальної оптимізації є такі: метод поступок, метод ідеальної точки, метод згортання, метод обмежень.

Для того, щоб розглянути методи багатокритеріальної оптимізації введемо поняття межі (множини) Парето.

Нехай G деяка множина площини UOV. Всі точки площини UOV по відношенню до множини G є або внутрішніми, або зовнішніми, або межовими.

Точка (u_0, v_0) називається внутрішньою точкою множини G, якщо вона входить до G разом з деяким кругом ненульового радіуса.

Точка (u_1, v_1) називається зовнішньою точкою множини G, якщо існує круг ненульового радіуса, жодна точка якого не входить до G.

Точка $(\bar{u}, \bar{v})$ називається точкою межі G (межовою точкою G), якщо в будь-який круг ненульового радіуса потрапляють як точки множини G, так і точки, які їй не належать.

Межа позначається ∂G. Точки межі можуть як належати G, так і не належати G. Надалі в задачах багатокритеріальної оптимізації будемо розглядати випадки, коли всі точки ∂G належать G, де G множина значень векторного критерію.

Розглянемо двовимірну задачу

$$U = R(x, y) \to \max, V = T(x, y) \to \max, (x, y) \in D \subseteq R^2. \quad (17.3)$$

Нехай $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ дві точки допустимої множини D, а $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ їх образи в G. Будемо говорити, що точка (x_1, y_1) домінує (x_2, y_2), якщо $R(x_1, y_1) \geq R(x_2, y_2), T(x_1, y_1) \geq T(x_2, y_2)$ і хоча б одна нерівність строга. Точка $\left(\hat{u}, \hat{v}\right)$ називається не домінуючою, якщо немає точки $(u, v) \in G$, яка б домінувала $\left(\hat{u}, \hat{v}\right)$.

Отже, розв'язок задачі слід шукати серед не домінуючих точок $\left(\hat{u},\hat{v}\right)$.

Сукупність точок ∂G можна поділити на три класи: а) точки, для яких існують домінуючі точки із ∂G ; б) точки, для яких, рухаючись по ∂G в обох напрямках, можна збільшити фіксовану одну координату, залишаючи незмінною іншу (точки вертикальних та горизонтальних відрізків ∂G); точки, для яких переміщення в обох напрямках по ∂G викликає збільшення однієї координати при одночасному зменшенні іншої координати.

Точки третього класу прийнято називати межею (множиною) Парето множини G.

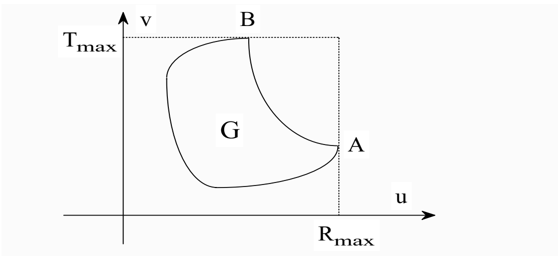
Множину Парето можна шукати, використовуючи просте геометричне правило. До множини Парето включаємо всі точки $(u,v)\in\partial G$, для яких в середину прямого кута з вершиною (u,v) і променями співнаправленими з осями OU, OV не потрапляє жодна точка, крім (u,v).

Метод поступок. В цьому методі вибір рішення відбувається в процесі поступового послаблення первинних вимог, які в більшості випадків одночасно виконуватися не можуть.

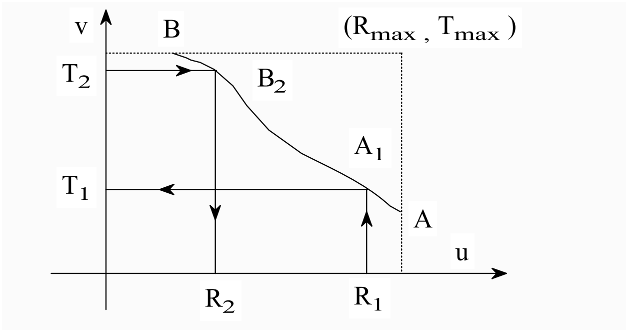
Розглянемо задачу

$$(u,v)=\big(R(x,y),T(x,y)\big)\to(\max,\max),\quad x\in D\subseteq R^2. \quad (17.4)$$

Нехай G множина значень векторного критерію.



З рисунка видно, що точка $(R_{\max},T_{\max})$ (так звана точка утопії) лежить поза множиною G. Отже, в подібній (типовій) ситуації оптимальні значення компонент приймаються в різних точках.



Неважко упевнитися, що множиною Парето для випадку, зображеному на даному рисунку, є дуга AB. В методі поступок оперуюча сторона послідовно звужує межі Парето і зрештою зупиняється на компромісній парі значень критеріїв.

Крок 1. Здійснюється поступка за вимогами першого критерію і значення $R_{\max}$ замінюється на R_1. Далі з'ясовується, що в цьому випадку значення за другим критерієм не може бути більшим за T_1. Оскільки пара (R_1, T_1) як оптимальна, скоріше за все, не буде прийнятливою для сторони, що приймає рішення, то здійснюється наступний крок.

Крок 2. Здійснюється поступка за вимогами другого критерію і значення $T_{\max}$ замінюється на T_2. Далі з'ясовується, що в цьому випадку значення за першим критерієм не може бути більшим за R_2. Ймовірно, що пара (R_2, T_2) також не бути прийнятливою для сторони, що приймає рішення, і буде почата нова ітерація методу послабленням вимог за першим критерієм з R_1 до R_3.

Зрозуміло, що з кожним кроком частина множини Парето, яка приймається до розгляду, буде звужуватися

$$AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset \cdots \qquad (17.5)$$

і настане момент, коли пара (R_n, T_n), отримана на n-му кроці, буде здаватися стороні, що приймає рішення, прийнятливою і пошук рішення завершується. Залишається лише знайти значення вектора потрібних планів $(x^*, y*)$ із системи $R(x,y) = R_n$, $T(x,y) = T_n$.

Метод ідеальної точки. В цьому методі пошук оптимального рішення пов'язаний із знаходженням на межі Парето точки, найближчої до точки утопії, яка визначається векторним критерієм, а по суті вибирається суб'єктом, що приймає рішення.

Розглянемо задачу

$$U = R(x,y) \to \max, V = T(x,y) \to \max, (x,y) \in D \subseteq R^2.$$

Нехай $I(u^*, v^*)$ ідеальна точка, тобто $u^* = \max\limits_{(x,y)\in D} R(x,y)$, $v^* = \max\limits_{(x,y)\in D} T(x,y)$. Крім того, позначимо через ∂P межу Парето області значень G векторного критерію. Тоді за методом ідеальної точки треба відшукати оптимальний розв'язок $(\bar{u},\bar{v})$ задачі квадратичного програмування

$$\rho=(u-u^*)^2+(v-v^*)^2\to\min,\quad (u,v)\in\partial P\ ,$$

а потім знайти оптимальний план (x^*,y^*), розв'язавши систему $R(x,y)=\bar{u},\,T(x,y)=\bar{v}$.

Метод зважувань. Ще один метод полягає в заміні векторного критерію одним скалярним критерієм, тобто в зведенні багатокритеріальної задачі до монокритеріальної.

Суб'єкт, що приймає рішення, з тих чи інших міркувань назначає ваги $w_i,\sum_{i=1}^{n}w_i=1$ компонентам $f_i(x)$ векторного критерію $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$ і розглядає задачу

$$w_1f_1(x)+w_2f_2(x)+\cdots+w_nf_n(x)\to\max(\min),\quad x\in D\subseteq R^n\ .\quad (17.6)$$

Метод обмежень. Для розв'язання задачі цим методом слід виконати кілька кроків (не більше $n-1$ кроку). В цьому методі ваги критеріїв визначаються, ґрунтуючись тільки на кількісну інформацію про ступінь їх важливості. Розглянемо задачу

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))\to(\max,\max,\cdots,\max),\quad x\in D\qquad (17.7)$$

Перший крок. Спочатку здійснюється оптимізація окремо за кожною компонентою $f_i(x)$ векторного критерію і знаходяться відповідні оптимальні плани $x_1^*,x_1^*,\cdots,x_n^*$. Далі обчислюється таблиця значень

$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$\cdots$	$f_n(x_1)$
$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	$\cdots$	$f_n(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	$\cdots$	$f_n(x_n)$

,

в якій j-й стовпчик утворюють значення j-го критерію, обчислені послідовно в усіх знайдених раніше оптимальних точках компонент.

Зрозуміло, що найбільшим елементом j-го стовпчика матриці буде $f_j(x_j)$ тобто $f_j(x_j)=\max\limits_i f_i(x_j)$.

Після цього для кожної компоненти $j=1,2,\cdots,n$ виконується нормування знайдених значень критеріїв до значень з проміжку $[0,1]$ за формулами

$$r_{i,j}=\frac{f_i(x_j)-\min\limits_i f_i(x_j)}{\max\limits_i f_i(x_j)-\min\limits_i f_i(x_j)},\ i=1,2,\cdots,n\ .\qquad (17.8)$$

В результаті отримаємо таблицю

1	$r_{2,1}$	$\cdots$	$r_{n,1}$
$r_{1,2}$	1	$\cdots$	$r_{n,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$r_{1,n}$	$r_{2,n}$	$\cdots$	1

.

В цій таблиці міститься важлива інформація про область допустимих значень критеріїв. Наприклад, у випадку, коли значення двох стовпчиків мало відрізняються в усіх рядках (крім рядків, що містять одиниці в цих стовпчиках), то відповідні критерії дуже залежні.

Для знайденої таблиці обчислюються ваги (індекси) критеріїв таким чином. Позначимо через k_j^1 – середнє арифметичне значення за елементами j-го стовпчика, не включаючи елемент рівний 1. Вага j-го критерію визначається за формулою

$$w_j^1 = \frac{1-k_j^1}{\sum_{i=1}^{m}\left(1-k_i^1\right)} .$$

Знайдені ваги показують яку увагу слід надавати j-й компоненті векторного критерію. Якщо всі елементи j-го стовпця близькі до 1, то близьким до 1 буде і k_j^1. Тоді значення $1-k_j^1$ мале, а тому малим буде і значення w_j^1. Це означає, що при оптимізації за іншими компонентами векторного критерію значення j-ї компоненти критерію буде близьким до оптимального і тому цій компоненті не варто приділяти увагу. Навпаки, якщо k_j^1 мале, то j-й компоненті слід надавати більше уваги для найшвидшого розв’язання задачі. Так знайдені ваги називаються технічними, оскільки вони обчислюються, а не призначаються.

Далі розв’язуємо задачу

$$w_1^1 f_1(x) + w_2^1 f_2(x) + \cdots + w_n^1 f_n(x) \to \max, \quad x \in D \qquad (17.9)$$

і знаходимо оптимальний розв’язок $\left(x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, \cdots, x_{n,1}^*\right)$.

Порівнюючи знайдений розв’язок $\left(x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, \cdots, x_{n,1}^*\right)$ із точкою утопії $x_1^*, x_1^*, \cdots, x_n^*$, суб’єкт, що приймає рішення, визначає чи задовольняє вимогам знайдене розв’язок $\left(x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, \cdots, x_{n,1}^*\right)$. Якщо так, то задача розв’язана.

Якщо ні, то суб’єкт, що приймає рішення, виділяє одну компоненту векторного критерію (нехай це буде $f_m(x)$), призначає для неї порогове значення l_m, прийнятливе для цього критерію. Таким чином, накладається вимога $f_m(x) \ge l_m$. Остання нерівність звужує область допустимих значень до $D_1 \subseteq D$. На цьому перший крок закінчується.

Другий і наступні кроки. Другий крок розпочинається із знаходження області D_1. При цьому число критеріїв на одиницю менше вихідного. Закінчується другий крок вибором порогового значення для ще одного критерію. Оскільки після кожного кроку число критеріїв зменшується на одиницю, то через щонайбільше $n-1$ крок ми дістанемо прийнятливі значення за всіма критеріями.

Приклад. Для випуску двох видів продукції використовується три види ресурсів. Вважаються відомими норми витрачання ресурсів на виготовлення одиниці кожного виду продукції, ціни за одиницю кожного ресурсу, ціни реалізації одиниці продукції першого та другого виду, та запаси ресурсів. Числові показники задається відповідними матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ R = (2,5,1),\ C = (12,14),\ B = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Нехай x та y кількість випущеної продукції першого та другого виду відповідно, $X = (x, y)$. Очікувана виручка дорівнює CX, а прибуток складає $w = CX - RAX$.

Якщо прагнути досягти одночасно максимальної виручки та прибутку, то прийдемо до задачі оптимізації за двома критеріями :

$$CX \to \max,$$
$$(C - RA)X \to \max,$$
$$AX \le B.$$

В координатній формі задача має вигляд

$$u = 12x + 14y \to \max,$$
$$v = 3x + 2y \to \max,$$
$$x + 3y \le 15,$$
$$x + y \le 7,$$
$$2x + y \le 12,$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Неважко упевнитися, що область допустимих значень задачі утворює в площині XOY опуклий п'ятикутник $OABCD$, де $O(0;0)$, $A(0;5)$, $B(3;4)$, $C(5,2)$, $D(6;0)$. Відомо , що лінійна функція на опуклому багатокутнику досягає найбільшого значення в одній з вершин п'ятикутника. Складемо таблицю значень критеріїв у вершинах п'ятикутника

	O	A	B	C	D
u	0	70	92	88	72
v	0	10	17	19	18

.

З таблиці знаходимо $\max\limits_{(x,y)\in OABCD} u(x,y) = u(B) = 92$, $\max\limits_{(x,y)\in OABCD} v(x,y) = v(C) = 19$, тобто критерії досягають свого найбільшого значення в різних вершинах. Ідеальна точка $I(92;19)$ не належить множині значень векторного критерію.

Відомо, що при лінійному перетворенні координат пряма переходить в пряму. Звідси випливає, що образом багатокутника $OABCD$ в площині UOV

буде опуклий п’ятикутник $O'A'B'C'D'$, де $O'(0;0)$, $A'(70;10)$, $B'(92;17)$, $C'(88,19)$, $D'(72;18)$. Межу Парето утворює сторона $B'C'$, рівняння якої має вигляд $u+2v=126$.

А. Розв’яжемо задачу методом ідеальної точки. Для цього треба знайти розв’язок задачі квадратичного програмування

$$\rho=(u-92)^2+(v-19)^2 \to \min ,$$
$$u+2v=126, \ (u,v)\in B'C' .$$

Щоб знайти розв’язок, знайдемо умовний екстремум $\rho=(u-92)^2+(v-19)^2 \to \min$, $u+2v=126$ і перевіримо чи буде точка максимуму належати відрізку $B'C'$.

Оскільки $u=126-v$, то $\rho=(34-2v)^2+(v-19)^2$. Стаціонарну точка знаходимо з умови $\rho'=10v-176=0$. Отже, $v=17,6; u=90,8$, тобто $(u^*,v^*)=(90,8;17,6)$ оптимальна пара значень критерій.

Оптимальну пару планів знайдемо, розв’язавши систему рівнянь

$$\begin{cases}12x+14y=90,8 ,\\ 3x+2y=17,6\end{cases}.$$

Звідси $x^*=3,6$; $y^*=3,4$.

В. Розв’яжемо тепер задачу методом згортання. Векторний критерій (u,v) замінимо одним скалярним критерієм вигляду $k_\alpha=\alpha u+(1-\alpha)v$, де $\alpha\in[0,1]\subset(-\infty,\infty)$.

Якщо взяти $\alpha=0,25$, тобто надати більшої ваги збільшенню прибутку, то відповідна функція $k_{0,25}=\frac{1}{4}(21x+20y)$. Склавши таблицю значень цього критерію у вершинах п’ятикутника $OABCD$:

	O	A	B	C	D
$k_{0,25}$	0	$\frac{100}{4}$	$\frac{143}{4}$	$\frac{145}{4}$	$\frac{126}{4}$

,

бачимо, що найбільше значення досягається у вершині C.

Якщо взяти $\alpha=0,75$, тобто надати більшої ваги нарощуванню виручки, то відповідна функція $k_{0,75}=\frac{1}{4}(38x+44y)$. Склавши для цієї функції таблицю значень у вершинах п’ятикутника $OABCD$:

	O	A	B	C	D
$k_{0,25}$	0	$\frac{220}{4}$	$\frac{293}{4}$	$\frac{283}{4}$	$\frac{234}{4}$

,

упевнюємося, що найбільше значення досягається у вершині B.

Таким чином, в трьох розглянутих випадках оптимальні плани виявилися різними. Це означає, що прийняте рішення істотно залежить від методу розв'язання багатокритеріальної задачі.

Запитання для самоперевірки знань

1. В чому полягає особливість розв'язання багатокритеріальних задач ?
2. Наведіть приклад економічної проблеми, що спонукає побудову двокритеріальної моделі.
3. Які є основні методи розв'язання багатокритеріальних задач ?
4. Як можна перевірити чи належить точка межі Парето ?
5. У чому особливості методу послідовних поступок ?
6. З яких міркувань вибираються ваги компонент векторного критерію в методі згортання ?

Література

1. Введение в исследование операций. Хэмди А. Таха.– Москва, Санкт-_Петербург, Киев: Издательский дом «Вильямс», 2001.– 912с.
2. Исследование операций. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. М.: Проспект, 2006. – 280с.
3. Исследование операций. Косоруков О.А., Мищенко А.В. М.: Экзамен, 2003.– 448с.
4. Математические методы в экономике. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемних Ю.Н. М.: Дело и Сервис, 2001.– 368с.
5. Дослідження операцій. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. К.: Екомен, 2007. – 256с.
6. Математичне програмування. Івченко І.Ю. К.: Центр учбової літератури, 2007. – 232с.
7. Дослідження операцій. Зайченко Ю.П. К.: ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. – 688с.
8. Методи і моделі дослідження операцій. Крюков М.М., Кравець Т.В. К.: КУЕТТ, 2006. – 218с.

Навчально-методичне видання

Микола Павлович Андросенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій

Відповідальний за випуск Андросенко М.П.

Редактор: Щербак Н.В.

Підписано до друку 07.10.09 Формат паперу 60×84/16.
Папір офсетний. Друк – ризографія,
Замовлення № 186-09. Тираж 120 прим.

Друк – Редакційно-видавничий центр ДЕТУТ.
Свідоцтво про реєстрацію від 27.12.2007 р. Серія ДК № 3079
03049, м. Київ – 49, вул. Миколи Лукашевича, 19