МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

А. Ю. АНДРЕЙЦЕВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 2
для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки
6.070101 «Транспортні технології»**

Київ 2014

УДК 51:517

Андрейцев А. Ю.

Вища математика: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №2 для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.070101 «Транспортні технології»/ Андрейцев А. Ю. – К.: ДЕТУТ, 2014. – 64 с.

Методичні вказівки призначені для індивідуальної роботи студентів з вищої математики. В них наводяться основні типи задач з вищої математики для студентів I курсу 2 семестру за напрямком підготовки 6.070101 «Транспортні технології». На простих прикладах вивчаються найхарактерніші методи розв'язання математичних задач.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 4 від 22. 11. 13) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол № 2 від 28. 11. 13).

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.070101 «Транспортні технології».

Укладач: *А. Ю. Андрейцев*, к.ф.-м. н., доцент

Рецензенти: *Т. В. Крижановська*, к.ф.-м. н., професор
О. О. Безущак, к.ф.-м. н., доцент

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки охоплюють основні розділи курсу «Вища математика» для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.070101 «Транспортні технології» за 2 семестр I курсу. Послідовність номерів задач відповідає послідовності лекцій курсу «Вища математика». Це забезпечує рівномірне завантаження студентів і виконання ними розрахункової роботи протягом семестру, починаючи з першої лекції. Для полегшення орієнтації студентів в курсі вищої математики та глибшого засвоєння навчального матеріалу перед переліком умов завдань для самостійної роботи студентів наведено методичні рекомендації для розв'язання відповідних задач, а в кінці методичних вказівок – список контрольних питань з теорії, а також наведено список рекомендованої літератури.

Розрахункова робота повинна виконуватись на аркушах паперу білого кольору формату А4 на одному боці аркуша відповідно до чинних правил оформлення розрахункових і контрольних робіт. Зворотній бік аркуша використовується для виправлення помилок, а також для можливих допоміжних зауважень, вказівок і пояснень викладача. На титульній сторінці обов'язково має бути вказано назву університету, назву предмета, номер розрахункової роботи, прізвище та ініціали студента, групу, в якій він навчається, а також прізвище викладача, який перевіряє роботу.

При підготовці до захисту розрахункової роботи рекомендується розглянути питання, наведені в кінці посібника. Перед виконанням кожної задачі з розрахункової роботи потрібно засвоїти теоретичні відомості з відповідної теми та самостійно розібрати наведені приклади. Розв'язання задач з розрахункової роботи повинно містити детальні пояснення всіх етапів її виконання

Методичні вказівки містять 30 варіантів розрахункової роботи. Номер варіанта визначається порядковим номером прізвища студента в журналі викладача.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Задача 1. Обчислити невизначені інтеграли.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Функція $F(x)$ називається **первісною** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в усіх точках цього відрізка виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна функції $f(x)$, то будь-яка інша первісна $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $C = const$.

Означення 2. Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** цієї функції і позначається $\int f(x)dx$.

Таким чином,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла називають **інтегруванням**. Властивості невизначеного інтеграла випливають із його означення при умові, що функція $f(x)$ має первісну.

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$; 2. $\int dF(x) = F(x) + C$;

3. $\int (af_1(x) + bf_2(x))dx = a\int f_1(x)dx + b\int f_2(x)dx \quad a, b = const$;

4. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, тоді $\int f(u)du = F(u) + C$, зокрема

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a, b = const, a \neq 0.$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \qquad n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Основними методами інтегрування є безсереднє інтегрування, заміна змінної або підстановка та інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування грунтується на загальних властивостях невизначеного інтеграла та таблиці інтегралів. При застосуванні властивості 3 підінтегральна функція розкладається у суму і вихідний інтеграл подається як лінійна комбінація табличних інтегралів.

Зауваження 1. Незалежно від кількості доданків, на які розкладено підінтегральну функцію, структура невизначеного інтеграла залишається незмінною: у кінцевому результаті інтегрування міститься лише одна довільна стала, яка вводиться по завершенні останньої операції інтегрування.

Приклад 1, а. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{(x+2)^2}{x} dx$.

Розв'язання:

Перетворимо спочатку підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x+2)^2}{x}dx = \int \frac{x^2+4x+4}{x}dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{4}{x}\right)dx = \int \left(x + 4 + \frac{4}{x}\right)dx = \int x\,dx +$$

$$+\int 4\,dx + \int \frac{4}{x}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln|x| + C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln|x| + C$.

Приклад 1,б. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2}{x^2-3}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x^2}{x^2-3}dx = \int \frac{(x^2-3)+3}{x^2-3}dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2-3}\right)dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= x - 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C = x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

***Відповідь*:** $x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$

Метод заміни змінної або підстановки грунтується на введенні під знак інтеграла такої змінної, після підстановки якої та заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної одержимо табличний інтеграл. В цьому випадку використовуються підстановки двох видів:

1) Нова змінна замінюється функцією від старої змінної (заміна введенням функції під знак диференціала).

Якщо нова змінна u є неперервно диференційованою функцією $u = \varphi(x)$ від старої змінної x і має місце рівність $g(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, то $\int g(x)dx$ можна знайти за формулою:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} u = \varphi(x), \\ du = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}, \qquad (*)$$

після чого слід повернутись до старої змінної x;

2) стара змінна замінюється функцією від нової змінної (заміна виведенням функції за знак диференціала).

Якщо стара змінна x є неперервно диференційовною функцією $x = \psi(t)$ від нової змінної t, існує обернена функція $t = \psi^{-1}(x)$ і має місце рівність $f(\psi(t))\cdot\psi'(t) = g(t)$, то $\int f(x)dx$ можна знайти за формулою:

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \psi(t), \\ dx = \psi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)},$$

після чого слід повернутись до старої змінної x .

Приклад 2. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

Розв'язання:
Скористаємось методом заміни змінних (*):

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} = \int (\cos x)^{-\frac{2}{3}} \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{matrix} \right| = -\int u^{-\frac{2}{3}} du = -3u^{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= -3(\cos x)^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$$

Відповідь: $-3\sqrt[3]{\cos x} + C$.

Інтегрування частинами застосовують для спрощення обчислення невизначеного інтеграла $\int f(x)\, dx$ за допомогою формули:

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (**)$$

(формула інтегрування частинами), де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – неперервно диференційовні функції.

Метод інтегрування частинами застосовується у випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна подати у вигляді добутку $u(x)dv(x)$ таким чином, щоб інтеграл $\int v du$ був простішим для обчислення, ніж інтеграл $\int u dv$.

Зауваження 2. За формулою (**) кінцевий результат інтегрування не зміниться, якщо до функції $v(x)$ додати довільну сталу. Тому при знаходженні функції $v(x)$ по її диференціалу з усієї множини первісних $v(x) + C = \int dv(x)$ звичайно вибирають лише одну (покладаючи, наприклад, $C = 0$).

При інтегруванні деяких функцій інтегрування частинами доцільно застосовувати повторно.

Деякі рекомендації до інтегрування частинами

1. При знаходженні інтегралів $\int P_n(x) \begin{bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx$, де $k = const$, $P_n(x) -$ многочлен $n-$го степеня, слід покласти $u = P_n(x)$, $dv = \begin{bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix} dx$. Формулу інтегрування частинами застосувати n разів (відповідно до степеня многочлена $P_n(x)$).

2. При знаходженні інтегралів $\int P_n(x) \begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctg\, x \end{bmatrix} dx$, де $P_n(x) -$ многочлен $n-$го

степеня, слід покласти $u = \begin{bmatrix} \ln x, \\ \arcsin kx \\ arctg\, kx \end{bmatrix}$, $dv = P_n(x)dx$.

Приклад 3,а. Обчислити невизначений інтеграл $\int x\, 3^x dx$.

Розв'язання:

$$\int (x-1)3^x dx = \begin{vmatrix} u = x-1 & du = dx \\ dv = 3^x dx & v = \dfrac{3^x}{\ln 3} \end{vmatrix} = \frac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx =$$

$$= \frac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx = \frac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C.$$

Відповідь: $\dfrac{(x-1)3^x}{\ln 3} - \dfrac{3^x}{\ln^2 3} + C$.

Приклад 3,б. Знайти інтеграл $\int (4x-1)\, arctgx\, dx$.

Розв'язання:

$$\int 2x arctgx\, dx = \begin{vmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = 2xdx & v = x^2 \end{vmatrix} = arctgx \cdot x^2 = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2\, arctg\, x - \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = x^2\, arctg\, x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$x^2\, arctg\, x - x + arctg\, x + C = \left(x^2+1\right) arctg\, x - x + C.$$

Відповідь: $\left(x^2+1\right) arctg\, x - x + C$.

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Означення 3. **Раціональним дробом** називається дріб виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ та $Q(x)$ – многочлени. Раціональний дріб називається **правильним**, якщо степінь $P(x)$ менший за степінь $Q(x)$, в протилежному випадку дріб називається **неправильним**.

Неправильний дріб завжди можна подати у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Будь-який правильний дріб однозначно розкладається в суму **елементарних раціональних дробів** чотирьох типів:

$\dfrac{A}{x-a}$; $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, ($m > 1$– ціле число);

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}; \quad \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \quad (n>1 - \text{ціле число}, \quad p^2-4q<0).$$

Для цього необхідно розкласти знаменник дробу на дійсні множники першого та другого степеня:

$Q(x)=(x-a)^m \times \cdots \times \left(x^2+px+q\right)^n \times \cdots$, де $p^2-4q<0$, тобто тричлен x^2+px+q має комплексно спряжені корені; після чого правильний раціональний дріб записати у вигляді суми елементарних:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\cdots+\frac{A_m}{x-a}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\cdots.$$

Коефіцієнти $A_1,\ldots A_m, B_1, C_1,\ldots, B_m, C_m$ можна знайти **методом невизначених коефіцієнтів:** привести останню рівність до спільного знаменника, а потім порівняти коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах одержаної тотожності та розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.

Зауваження 3. Ці невідомі коефіцієнти можна знайти іншим способом: надаючи в одержаній тотожності змінній x певних числових значень. В багатьох випадках, доцільно використовувати обидва способи обчислення невідомих коефіцієнтів.

Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів:

1) $\int \frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^m}=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$;

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, де $p^2-4q<0$ може бути представлений як лінійна комбінація двох інтегралів:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx=\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}=\ln\left(x^2+px+q\right)+C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

4) $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ послідовним інтегруванням частинами $n-1$ раз зводиться до 3). Відповідні формули не наводяться у зв'язку з відсутністю даних інтегралів у завданнях.

Приклад 4, а. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{x-11}{x^2-x-12}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x-11}{x^2-x-12}dx = \int \frac{x-11}{(x+3)(x-4)}dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{x-11}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)} = \frac{x(A+B)-4A+3B}{(x+3)(x-4)}$$

Отже, $x(A+B)-4A+3B = x-11$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -4A+3B=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases}$$

Коефіцієнти A, B можна знайти іншим способом: поклавши в рівноті

$A(x-4)+B(x+3) = x-11$

$x=-3$ та $x=4$. В першому випадку отримаємо $-7A=-14 \quad \Rightarrow \quad A=2$, а в другому $-\ 7B=-7 \quad \Rightarrow \quad B=-1$.

Таким чином, підінтегральний дріб розкладається на суму двох елементарних дробів:

$$\frac{x-11}{(x+3)(x-4)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}$$

Знайдемо тепер інтеграл від суми дробів:

$$\int \frac{x-11}{(x+3)(x-4)}dx = \int \frac{2dx}{x+3} - \int \frac{dx}{x-4} = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + C.$$

Відповідь: $2\ln|x+3| - \ln|x-4| + C$.

Приклад 4, б. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3-2x^2}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{3x^2+2x-4}{x^3-2x^2}dx = \int \frac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-2)+B\left(x^2-2x\right)+Cx^2}{x^2(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2(B+C)+x(A-2B)-2A}{x^2(x-2)},$$

тобто $x^2(B+C)+x(A-2B)-2A=3x^2+2x-4$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} B+C=3 \\ A-2B=2 \\ -2A=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=3 \end{cases}$$

Таким чином, $\dfrac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x-2}$. Звідки маємо:

$$\int\frac{3x^2+2x-4}{x^2(x-2)}dx=\int\frac{2dx}{x^2}+\int\frac{3\,dx}{x-2}=-\frac{2}{x}+3\ln|x-2|+C.$$

Відповідь: $-\dfrac{2}{x}+3\ln|x-2|+C.$

Приклад 4, в. Обчислити невизначений інтеграл $\displaystyle\int\frac{4x^2-2x}{x^3+1}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{4x^2-2x}{x^3+1}dx=\int\frac{4x^2-2x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{4x^2-2x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2(A+C)+x(A+B-C)+(B+C)}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}$$

Отже, $x^2(A+C)+x(A+B-C)+(B+C)=4x^2-2x$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ A+B-C=-2 \\ B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$$

Таким чином, підінтегральний дріб розкладається на суму двох елементарних дробів:

$$\frac{4x^2-2x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{2x-2}{x^2-x+1}+\frac{2}{x+1}.$$

Тоді

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-x+1}+\int\frac{2\,dx}{x+1}=\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\int\frac{2\,dx}{x+1}=$$

$$=\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}-\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+2\int\frac{d(x+1)}{x+1}=$$

$$=\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+2\ln|x+1|+C=$$

$$=\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+2\ln|x+1|+C.$$

Відповідь: $\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+2\ln|x+1|+C.$

Задача 2. Обчислити визначений інтеграл.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Нехай на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, задана функція $f(x)$. Розіб'ємо даний відрізок на n довільних частин точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ так, що $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. На кожному з відрізків виберемо довільно точку $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$ і розглянемо суму

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_1=f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+f(\xi_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\cdot\Delta x_n\text{, де }\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$$

Ця сума називається **інтегральною**.

Означення 1. Якщо існує границя інтегральної суми:

$$I=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,,\ \lambda=\max\Delta x_i\,,$$

що не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини, ні від вибору точок ξ_i, то її називають в**изначеним інтегралом** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$, а саму функцію – інтегровною на цьому відрізку. Числа a і b називаються відповідно **нижньою та верхньою межами інтегрування.**

Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$ і неперервна на ньому за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то вона інтегровна на $[a;b]$.

З означення випливає, що визначений інтеграл суми скінченного числа функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій, а сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

Якщо функція $-f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то має місце формула Ньютона – Лейбніца :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ відображає відрізок $[\alpha;\beta]$ у відрізок $[a;b]$ так, що 1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і для будь-якого $t\in[\alpha;\beta]$ виконується нерівність $a\le\varphi(t)\le b$; 2) функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, то має місце формула заміни змінної:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt \\ x=a \Rightarrow t=\alpha, \\ x=b \Rightarrow t=\beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx .$$

Якщо функції $u(x), v(x)$ та $u'(x), v'(x)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{ll} x=t^2 & x=0\Rightarrow t=0 \\ dx=2tdt & x=4\Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1}\right) = .$$

$$= 2\big(t - \ln|t+1|\big)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

Відповідь: $4-2\ln 3$.

Задача 3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Якщо фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямими $x = a, x = b$, то за умови $f_1(x) \le f_2(x)$, її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

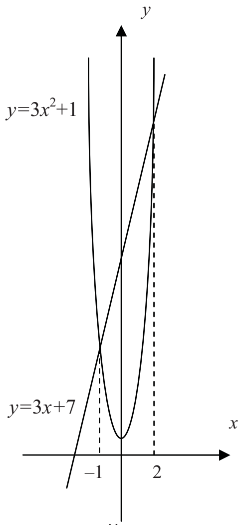
Якщо в умові обмеження $x = a, x = b$ не вказані, то межами інтегрування будуть абсциси точок перетину графіків функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$.

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 3x^2 + 1,\ \ y = 3x + 7$.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 1 \\ y = 3x + 7 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x^2 + 1 = 3x + 7 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Площу заданої області можна знайти за допомогою визначеного інтеграла.

$$S = \int_{-1}^{2} (f_1(x) - f_2(x))dx = \int_{-1}^{2} (3x + 7 - 3x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{2} (3x - 3x^2 + 6)dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 13\frac{1}{2}(кв.од)$$

Відповідь: $S = 13\frac{1}{2}(кв.\ од.)$.

Задача 4. Обчислити подвійний інтеграл по області D.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Нехай в області D на площині xOy визначена деяка функція $f(x,y)$. Розіб'ємо область D сіткою кривих на скінченне число областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, площі яких відповідно дорівнюють $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. В кожній області D_i довільно виберемо точки (ξ_i, η_i). Аналогічно до одновимірного випадку (визначеного інтеграла), введемо поняття подвійного інтеграла, як границі інтегральної суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i .$$

Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ в області D позначається символом

$$\iint_D f(x,y)dxdy .$$

Обчислення подвійного інтеграла здійснюється зведенням до повторного інтегрування, виходячи з двох таких теорем.

Теорема 1. Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною у двовимірній області $D = \{(x;y) |\ a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, що обмежена лініями $x = a, x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ і, до того ж, функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ є неперервними на відрізку $[a;b]$, то подвійний інтеграл можна звести до повторного за формулою:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Теорема 2. Якщо функція *f(x;y)* є неперервною у двовимірній області $D = \{(x;y) |\ c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, що обмежена лініями $y = c, y = d$, $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ і функції $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ є неперервними на відрізку $[c;d]$, то подвійний інтеграл можна звести до повторного за формулою:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

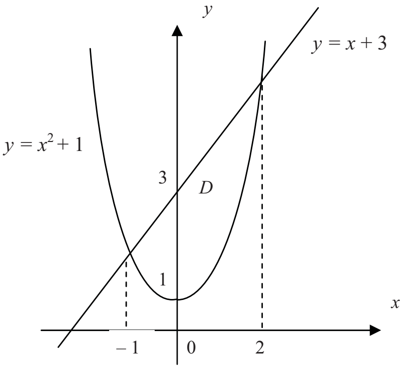
Повторні інтеграли у правих частинах наведених формул обчислюються двократним повторенням операції інтегрування, починаючи з внутрішнього інтеграла. За першою з них внутрішній інтеграл знаходиться інтегруванням за змінною y при припущенні $x = const$. За другою – навпаки: внутрішній інтеграл знаходиться інтегруванням по змінній x при припущенні $y = const$.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 12xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2 + 1$; $y = x + 3$ і $x = 0$ $(x \ge 0)$.

Розв'язання:

Побудуємо область D:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + 1 = x + 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Нас цікавить права частина отриманої області $(x \geq 0)$.

Подвійний інтеграл буде дорівнювати:

$$\iint\limits_D 12xy\,dxdy = 12\int\limits_0^2 xdx \int\limits_{x^2+1}^{x+3} ydy = 6\int\limits_0^2 x\left(y^2 \Big|_{x^2+1}^{x+3} \right)dx = 6\int\limits_0^2 x\left((x+3)^2 - \left(x^2+1\right)^2 \right)dx =$$

$$= 6\int\limits_0^2 \left(-x^5 - x^3 + 6x^2 + 8x\right)dx = \left(-x^6 - \frac{3x^4}{2} + 12x^3 + 24x^2 \right)\Bigg|_0^2 = 104$$

Відповідь: 104.

Задача 5. Розв'язати задачу Коші: $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Рівняння, яке зв'язує шукану функцію, її похідні (або диференціали) і незалежну змінну, називається **звичайним диференціальним рівнянням**.

Символічно диференціальне рівняння можна записати так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0 \text{ або } y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}\right), \qquad (*)$$

де x – незалежна змінна; y – шукана функція; $x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ – похідні шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, яка входить до його складу.

Означення 2. Розв'язком диференціального рівняння називається n раз неперервно диференційовна функція $y(x)$, яка перетворює його в тотожність.

Знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням диференціального рівняння.

Означення 3. **Загальним розв'язком** диференціального рівняння n-го порядку називається функція $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ або $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0$ (в цьому випадку його називають **загальним інтегралом**), яка задовольняє це рівняння при будь-яких значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ і інших розв'язків не існує.

Означення 4. **Задачею Коші** для рівняння (*) називається задача знаходження розв'язку рівняння $y(x)$, що задовольняє **початковим умовам**:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \qquad (**)$$

де $x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ – задані числа.

Задача Коші для рівняння (*) має розвязок, якщо сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна підібрати так, що функція $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$буде задовольняти умовам (**).

У випадку диференціального рівнянням першого порядку задача Коші запишеться так:

$$y'=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0$$

Диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлювальними змінними будемо називати рівняння, яке можна записати у вигляді:

$y'=\dfrac{N(y)}{M(x)}$ або $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{N(y)}{M(x)}$, яке еквівалентне $\dfrac{dy}{N(y)}=\dfrac{dx}{M(x)}$.

Проінтегрувавши обидві частини цієї рівності за відповідними змінними знаходимо загальний інтеграл:

$$\int\frac{dy}{N(y)}=\int\frac{dx}{M(x)}.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші: $y'-2\sqrt{y}\ln x=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$.

Розв'язання:

$y'-2\sqrt{y}\ln x=0$ – це рівняння з відокремлюваними змінними.

$\dfrac{dy}{dx}-2\sqrt{y}\ln x=0$, помножимо все рівняння на dx:

$dy-2\sqrt{y}\ln x\,dx=0 \quad \Rightarrow \quad dy=2\sqrt{y}\ln x\,dx$,

поділимо все рівняння на $2\sqrt{y}$ і проінтегруємо:

$$\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\int\ln x\,dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y}=\int\ln x\,dx$$

Обчислимо окремо другий інтеграл:

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} \int udv = uv - \int vdu \\ u = \ln x \qquad v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\,d(\ln x) = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x -$$

$$-\int dx = x\ln x - x + C$$

Повернемось до рівняння:

$$\sqrt{y} = x\ln x - x + C$$

$y = (x\ln x - x + C)^2$ – загальний розв’язок даного рівняння.

Знайдемо частинний розв’язок, що задовольняє умові $y(1) = 9$:

$$\sqrt{9} = 1 \cdot \ln 1 - 1 + C\text{, тобто } 3 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 4.$$

Таким чином, розв’язок задачі Коші буде:

$$y = (x\ln x - x + 4)^2$$

Відповідь: $y = (x\ln x - x + 4)^2$.

Задача 6. Знайти загальний розв**’**язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ називається однорідним.

Однорідне рівняння першого порядку зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни:

$\frac{y}{x} = u$, або $y = xu$. Тоді $y' = xu' + u$.

Приклад 1. Знайти загальний розв**’**язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.

Розв’язання:

Скоротимо дане рівняння на *x*:

$$y' - \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$$

Це однорідне рівняння, отже розв**’**язок будемо шукати у вигляді: $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u - \frac{ux}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{ux}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = \mathrm{tg}\,u.$$

Множимо його на dx, ділимо на $x\,\mathrm{tg}\,u$ та інтегруємо:

$$\int \mathrm{ctg}\,u\,du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad \sin u = Cx \quad \Rightarrow \quad u = \arcsin Cx.$$

Тепер повернемось до змінної $y = ux$ і отримаємо $y = x\arcsin Cx$.

Відповідь: $y = x\arcsin Cx$.

Означення 2. Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо шукана функція та її похідна входять у рівняння в першому степені, тобто лінійно:

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (*)$$

Тут $P(x), Q(x)$ – задані неперервні функції від x (або сталі).

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним, а якщо $Q(x) \neq 0$ – лінійним неоднорідним.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Розглянемо однорідне рівняння: $z' + P(x)z = 0$. Перепишемо його у вигляді $\frac{dz}{z} = -P(x)dx$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\ln|z| = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow z = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Розв'язок рівняння (*) будемо шукати у вигляді:

$$y = C(x)z(x). \qquad (**)$$

Підставляючи (**) у (*) маємо рівняння для знаходження $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Інтегруючи його маємо:

$$C(x) = C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

де C – довільна стала. Підставляючи $C(x)$ в (**), знаходимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (*):

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $y' - \sin x \cdot y = 2xe^{-\cos x}$.

Розв'язання:

Це лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку, отже розв'яжемо спочатку однорідне рівняння:

$$z' - \sin x \cdot z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \sin x dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int \sin x dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|z| = -\cos x + \ln C \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{-\cos x}.$$

Розв'язок вихідного (неоднорідного) рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = C(x)z(x) = C(x)e^{-\cos x}.$$

Підставляючи його у вихідне рівняння, отримуємо:

$$C'(x)e^{-\cos x} + C(x)\sin x e^{-\cos x} - \sin x C(x)e^{-\cos x} = 2xe^{-\cos x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{dx} = 2x.$$

Інтегруючи дане рівняння, маємо:

$$C(x) = x^2 + C,$$

де C – довільна стала. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C(x)z(x) = \left(x^2 + C\right)e^{-\cos x}.$$

Відповідь: $y = \left(x^2 + C\right)e^{-\cos x}$.

Одним з основних методів інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків є метод пониження порядку рівняння, тобто зведення рівняння шляхом заміни змінних до рівняння, що має порядок, нижчий ніж у даного.

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять явно шуканої функції

Такі рівняння мають вигляд $F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0$.

Здійснюємо заміну $y' = \dfrac{dy}{dx} = p(x)$, тоді $y'' = \dfrac{dp}{dx}$, а отже рівняння цього типу допускають пониження порядку на одиницю, тобто маємо рівняння: $F\left(x, p, \dfrac{dp}{dx}, \ldots, \dfrac{d^{(n-1)}p}{dx^{(n-1)}}\right) = 0$.

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять явно незалежної змінної

Ці рівняння мають вигляд: $F(y, y', y'') = 0$. Застосуємо заміну

$y' = \dfrac{dy}{dx} = p(y)$, тоді

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$, отже такі рівняння також допускають пониження порядку на одиницю, тобто маємо рівняння першого порядку $F\left(y, p, p\dfrac{dp}{dy}\right) = 0$.

Приклад 3, а. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $y'' = xy'''$.

Розв'язання:

Оскільки в рівнянні відсутня не тільки функція y, але і похідна y', то використаємо заміну $y'' = z(x)$, $y''' = z'(x)$. Тоді задане рівняння запишеться так:

$$z = xz'$$

$z = x\dfrac{dz}{dx}$, домножимо на dx і поділимо на xz:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad z = C_1 x$$

Повернемось до старої змінної $y'' = z(x)$:

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3.$$

Відповідь: $\dfrac{C_1}{6} x^3 + \dfrac{C_2}{2} x^2 + C_3$.

Приклад 3,б. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $yy'' = 2(y')^2$.

Розв’язання:

Оскільки в рівнянні відсутня незалежна змінна, то застосуємо заміну $y' = \dfrac{dy}{dx} = p(y)$. Тоді маємо:

$$yp\frac{dp}{dy} = 2p^2 \quad \Rightarrow \quad p = 0 \quad \text{або} \quad y\frac{dp}{dy} = 2p.$$

Розв’яжемо перше рівняння:

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C.$$

Друге рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$y\frac{dp}{dy} = 2p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y^2 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 y^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Оскільки C_1, C_2 - довільні сталі, то знак перед дробом можна прибрати. Крім того, розв’язок $y = C$ належить множині розв’язків другого рівняння, якщо покласти $C_1 = 0$. Тому загальний розв’язок вихідного рівняння має вигляд:

$$y = \frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$.

Задача 7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

де коефіцієнти $a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n$ – сталі дійсні числа. Рівняння:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (*)$$

($f(x)\equiv 0$) називається однорідним.

Структуру загального розв'язку однорідного рівняння (*) встановлює наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $y_1,y_2,...,y_n$ – частинні лінійно незалежні розв'язки рівняння (*), то загальний розв'язок цього рівняння є їх лінійна комбінація:
$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$,
де $C_1,C_2,...,C_n$ – довільні сталі.

Означення 2. **Характеристичним рівнянням** для рівняння (*) називається алгебраїчне рівняння n-го степеня:

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+...+a_{n-1}k+a_n=0\ .$$

Щоб скласти характеристичне рівняння для диференціального рівняння (*), необхідно в диференціальному рівнянні замінити невідому функцію у на одиницю, а кожну похідну шуканої функції $y^{(n)},y^{(n-1)},...,y'$ величиною k в степені, що дорівнює порядку похідної ($k^n,k^{n-1},...,k$ відповідно).

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку:

$$y''+a_1y'+a_2y=0. \qquad (**)$$

Характеристичним для нього буде квадратне рівняння:

$$k^2+a_1k+a_2=0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (**) в залежності від характеру коренів характеристичного рівняння має різний вигляд. Розглянемо окремі випадки:

1) якщо характеристичне рівняння має два різних дійсних корені $k_1\neq k_2$, то загальний розв'язок рівняння (**) має вигляд $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$;

2) якщо характеристичне рівняння має два однакових дійсних корені $k_1=k_2$ (корінь k_1 кратності 2), то загальний розв'язок рівняння (**) має вигляд $y=(C_1+C_2x)e^{k_1x}$;

3) якщо характеристичне рівняння має два комплексно спряжені корені $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta$, то загальний розв'язок рівняння (**) має вигляд
$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

Розглянемо задачу Коші:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad a_1, a_2 = const \ , \qquad (***)$$

$$y(x_0) = y_0 ,\ y'(x_0) = y_1 .$$

Структура загального розв’язку неоднорідного рівняння (***) визначається такою теоремою.

Теорема 2. Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку (***) дорівнює сумі будь-якого частинного розв’язку даного рівняння і загального розв’язку відповідного йому однорідного рівняння.

Для досить, широкого класу правих частин спеціального виду частинний розв’язок рівняння (***) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Нехай права частина рівняння (***) має спеціальний вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

де α і β – дійсні числа, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n-го та m-го степеня з дійсними коефіцієнтами. В такому випадку частинний розв’язок рівняння (***) потрібно шукати у вигляді:

$$z = x^r e^{\alpha x}\left[M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x\right],$$

де $M_s(x)$ і $N_s(x)$ – многочлени s-го степеня з невизначеними коефіцієнтами (s – більший із степеней n і m), r – кратність, з якою комплексне число $\alpha \pm i\beta$ співпадає з коренями характеристичного рівняння $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ відповідного однорідного диференціального рівняння:

$$Y'' + a_1 Y' + a_2 Y = 0 .$$

Зауваження. Якщо права частина рівняння (***) мас вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)\cos\beta x$, або $f(x) = e^{\alpha x} Q_m(x)\sin\beta x$, то і в цих випадках частинний розв’язок потрібно шукати в "повному вигляді":

$$z = x^r e^{\alpha x}\left[M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x\right].$$

Приклад. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + y' = 4\sin x$, $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$.

Розв’язання:

Знайдемо спочатку загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$$Y'' + Y' = 0 .$$

Його характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$, а корені $k_1 = 0; \ \ k_2 = -1$.

Корені дійсні і прості $(k_1 \neq k_2)$, тому загальний розв’язок матиме вигляд:

$$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad \Rightarrow \qquad Y = C_1 + C_2 e^{-x} .$$

Тепер знайдемо частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 4\sin x = P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$, тобто $n = 0$ і $\beta = 1$. Число $\alpha \pm \beta\, i = \pm\, i$ не співпадає з жодним з коренів характеристичного рівняння. Тому частинний розв’язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді:

$$z = A\sin x + B\cos x.$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B знайдемо похідні:

$$z' = A\cos x - B\sin x \qquad z'' = -A\sin x - B\cos x$$

Підставимо отримані значення z, z' і z'' в початкове рівняння $y'' + y' = 4\sin x$:

$-A\sin x - B\cos x + A\cos x - B\sin x = 4\sin x$;

$(-A-B)\sin x + (A-B)\cos x = 4\sin x$.

Знайдемо A, B методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{ll} \sin x: & -A-B=4 \\ \cos x: & A-B=0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} A=-2 \\ B=-2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad z = -2\sin x - 2\cos x.$$

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд $y = Y + z$, отже

$$y = C_1 + C_2e^{-x} - 2\sin x - 2\cos x$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші знайдемо похідну y':

$$y' = -C_2e^{-x} - 2\cos x + 2\sin x$$

і підставимо y і y' в початкові умови $y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$:

$$\begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 - 2\sin 0 - 2\cos 0 = -1 \\ y'(0) = -C_2 - 2\cos 0 + 2\sin 0 = 3 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_2 = 5 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1 = 6 \\ C_2 = -5 \end{cases}$$

Розв’язок задачі Коші буде мати вигляд $y = 6 - 5e^{-x} - 2\sin x - 2\cos x$.

Відповідь: $y = 6 - 5e^{-x} - 2\sin x - 2\cos x$.

Задача 8. Дослідити на збіжність числові ряди.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Вираз виду

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (*)$$

де $u_n \in R$, називається **числовим рядом**; числа $u_1, u_2, ..., u_n$ – членами ряду, число u_n – **загальним членом ряду**.

Означення 2. Суми:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad ..., \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \quad ...$$

називається частковими сумами ряду (*).

Означення 3. Якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум S_n, при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називають збіжним, а число S – його сумою. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або нескінченна, то ряд називається розбіжним.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо числовий ряд (*) збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Обернене твердження не вірне. Наприклад, для гармонійного ряду

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

виконується необхідна умова збіжності:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, але цей ряд є розбіжним.

Достатні ознаки збіжності рядів з додатніми членами.
Нехай задано два ряди з додатніми членами:

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \ ,$$

$$v_1+v_2+...+v_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}v_n \ .$$

Перша ознака порівняння. Якщо для всіх $n\ge n_0$ виконується нерівність $0<u_n\le v_n$, то:

1) із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$;

2) із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

Часто досліджувані ряди порівнюють з рядом, членами якого є члени геометричної прогресії $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}, \quad a\ne 0$, яка збігається при $|q|<1$ і розбігається при $|q|\ge 1$, або з узагальненим гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (збігається при $p>1$ і розбігається при $p\le 1$).

Друга ознака порівняння. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$, то обидва ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Радикальна ознака Коші. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то: при $\rho<1$ числовий ряд збігається, при $\rho>1$ – розбігається; при $\rho=1$ питання про збіжність залишається невирішеним.

Ознака Деламбера. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{n_n}=\rho$, то: при $\rho<1$ ряд збігається; при $\rho>1$ – розбігається; при $\rho=1$ питання про збіжність залишається невирішеним.

Приклад 1, а. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{5n^2+1}$.

Розв’язання:

Це додатній числовий ряд з n-им членом $u_n=\frac{3n^2-2}{5n^2+1}$.

Поревіримо, чи виконана необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{5n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{5}\neq 0.$$

Отже, ряд розбігається.
Відповідь: ряд розбіжний.

Приклад 1, б. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{(n+2)^4}$.

Розв’язання:

Це додатній числовий ряд з n-м членом $u_n=\frac{2n^2}{(n+2)^4}$, для якого виконана необхідна ознака збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, оскільки степінь чисельника менший за степінь знаменника (2<4).

Порівняємо його зі збіжним узагальненим гармонійним рядом $v_n=\frac{1}{n^2}$.

За другою ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+2)^4}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+2)^4}\cdot\frac{n^2}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{n^4+8n^3+24n^2+32n+16}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\frac{8}{n}+\frac{24}{n^2}+\frac{32}{n^3}+\frac{16}{n^4}}=4\neq 0.$$

Отже, ряди поводять себе однаково, тобто обидва збігаються.
Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{3^n}$.

Розв'язання:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{3^n} \text{ – це додатній числовий ряд з } n\text{-м членом } u_n=\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{3^n}.$$

Для дослідження даного ряду використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-1/n}{1+1/n}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47<1.$$

Отже, ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n-1)!}$.

Розв'язання:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n-1)!} \text{ – це додатній числовий ряд з } n\text{-м членом } u_n=\frac{5^n}{(2n-1)!}.$$

Тоді $(n+1)$-й член ряду має вигляд $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(2n+1)!}$.

Для дослідження даного ряду використаємо ознаку Деламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n+1)!}:\frac{5^n}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}5\cdot\frac{1}{2n(2n+1)}=5\cdot 0=0<1$$

Отже, ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 9. Знайти область збіжності степеневого ряду.

Стислі теоретичні відомості та методичні вказівки

Означення 1. Числові ряди

$$u_1+u_2+u_3+\dots \qquad (*)$$

з членами довільних знаків називають знакозмінними.

Означення 2. Знакозмінний ряд (*) називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots \qquad (**)$$

Означення 2. Ряд (*) називають умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд (**) розбігається.

Означення 3. Ряд (*) називають знакочергувальним, якщо його члени почергово змінюють знак, а саме:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad \text{де} \quad u_n > 0$$

Теорема Лейбніца. Якщо члени знакочергувального ряду такі, що $u_1 > u_2 > u_3 \ \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то цей ряд збігається, його сума додатня і не перевищує першого члена.

Означення 4. **Степеневим рядом** називається ряд виду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + (x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – сталі, які називаються коефіцієнтами степеневого ряду. При $x_0 = 0$ отримаємо частковий випадок степеневого ряду:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Означення 5. **Областю збіжності** степеневого ряду є такий інтервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$, що в будь-якій точці x, що належить цьому інтервалу, ряд збігається абсолютно; в точках $x_0 - R$ та $x_0 + R$ ряд може збігатись абсолютно чи умовно або розбігатись; а в інших точках числової осі ряд розбігається. Число R називається **радіусом збіжності** степеневого ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду визначається формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{ або } \ R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (***)$$

якщо, починаючи з деякого $n \geq n_0$, всі $a_n \neq 0$.

Для визначення області збіжності степеневих рядів спочатку використовують одну з формул (***), а потім окремо досліджують збіжність ряду в граничних точках отриманого інтервалу.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1} x^n$.

Розв'язання:

Це степеневий ряд з n-м членом $a_n = \dfrac{2^n}{n^2+1}$.

Знайдемо його радіус збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2+1} : \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Отже ряд збігається в інтервалі $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Дослідимо збіжність ряду в кінцевих точках:

1) Нехай $x = \frac{1}{2}$. Тоді ряд матиме вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Порівняємо його із збіжним узагальненим гармонійним рядом: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Оскільки $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, то за першою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ збігається і точка $x = \frac{1}{2}$ належить області збіжності.

2) Нехай $x = -\frac{1}{2}$. Тоді ряд матиме вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Це знакозмінний ряд, тому розглянемо ряд, складений з модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Цей ряд збіжний, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ збігається абсолютно і точка $x = -\frac{1}{2}$ належить області збіжності.

Остаточно, область збіжності заданого ряду $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Відповідь: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Задача 10. Розвинути функцію в ряд Маклорена.
Якщо функція $f(x)$ на проміжку $(-R; R)$ має похідні усіх порядків, обмежені деяким числом, то її можна подати у вигляді збіжного ряду:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!},$$

який називається рядом Маклорена. Наведемо розвинення основних елементарних функцій у ряди Маклорена:

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\ln(1+\text{x}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;1];$$

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1;1];$$

$$(1+\text{x})^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\times\cdots\times(m-n+1)x^n}{n!}, \quad m \notin N, \quad x \in (-1;1).$$

Приклад. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \text{arctg}\,\frac{x^2}{2}$.

Розв'язання:

Використаємо розвинення в ряд Маклорена функції $\text{arctg}\, x$:

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, , \quad (-1 \le x \le 1)$$

Замінюючи в ньому x на $\frac{x^2}{2}$ отримаємо розвинення в ряд заданої функції:

$$\text{arctg}\,\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{x^{14}}{896} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)},, \quad \left(-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\right)$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{x^{14}}{896} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ВАРІАНТ 1

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}dx$ **2)** $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$

3) $\int x\sin 2x\,dx$ **4)** $\int \frac{x\,dx}{x^2+7x+12}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=1-x$ і $y=x^2-1$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 12xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=2-x$ і $x=-1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'\sin^2 x+y=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$

2) $y'\cos x-y\sin x=\cos^2 x$

3) $yy''+y'-(y')^2=0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+4y=2\sin 2x-\cos 2x \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^4+5}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2n!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\ln\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$.

ВАРІАНТ 2

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}} dx$ **2)** $\int x^2 \cos x^3 \, dx$

3) $\int x e^{-x} dx$ **4)** $\int \frac{2x \, dx}{x^2 - 8x + 12}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$, $y = -2x$ і $x = 1$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - 2y) dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = 1 - x^3$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$.

5. Розв'язати задачу Коші: $xy' + y^2 = 0$, $y(1) = 1$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$

2) $y' - \frac{y}{x} = x^2$

3) $(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n-1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n 5^n}}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \cdot e^{-x^2}$.

ВАРІАНТ 3

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$ **2)** $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$

3) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ **4)** $\int \frac{4x^2+3x-3}{x^3-x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - x^2$ і $y = x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$ та $y = x+2$.

5. Розв'язати задачу Коші: $(1+x^2)y' - y = 0$, $y(0) = e$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' - y = x$

2) $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$

3) $y'' - (y')^2 = 0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 4xe^x \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^5+3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n n!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x\sin 2x$.

ВАРІАНТ 4

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x + x^2 e^x + 1}{x^2} dx$ **2)** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$

3) $\int x \cos 3x \; dx$ **4)** $\int \frac{4\,dx}{x^2 - 4x}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{2}$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (6x - 2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ $(x \geq 0)$.

5. Розв’язати задачу Коші: $y' = (y + 1)\operatorname{tg} x$, $y(0) = 4$.

6. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

2) $2xy' - 6y = x^2$

3) $(y + 5)y'' = (y')^2$

7. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 5y' = \sin 5x \qquad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{n^3 - 1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \cos\sqrt{x}$.

ВАРІАНТ 5

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3+8}{x}dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{\ln x+3}}{x}dx$

3) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$ **4)** $\int \frac{x+3}{x^2+x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 1$ і $y = x + 1$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x-y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $xy' - 2y = 0$, $y(1) = 3$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = x + 2y$

2) $y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

3) $x^3 y'' - y' = 0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 4\sin x \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^2+5}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)2^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

ВАРІАНТ 6

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2-9}{x+3}dx$ **2)** $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$ **4)** $\int \frac{x\,dx}{x^2-9x+20}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+9}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=1-x^2$ і $y=(x-1)^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 6x\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=1-x^3$, $y=x^2-1$ і $x=0$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=0$, $y(0)=5$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}$

2) $2xy'-6y=x^5$

3) $(1+y^2)y''=2y(y')^2$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-4y'+3y=3e^{2x} \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{5^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2 2^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{1}{x}\mathrm{arctg}\,x^2$.

ВАРІАНТ 7

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$ **2)** $\int \left(1 + e^x\right)^5 e^x \, dx$

3) $\int \ln x \, dx$ **4)** $\int \frac{x+8}{x^2 + x - 2} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (y - x) \, dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = x^2$ та $x = 2$.

5. Розв'язати задачу Коші: $(1 + x^2) y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$

2) $xy' - y = x^2 e^x$

3) $yy'' = \left(y'\right)^2$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 2y = 3e^x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5 + 7}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^{n+1}}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \ln\left(1 - 2x\right)$.

ВАРІАНТ 8

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ **2)** $\int \frac{(1+\mathrm{tg}x)^3}{\cos^2 x}dx$

3) $\int x\sin 5x\,dx$ **4)** $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=(x-2)^2$ і $y=x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 4y\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=1-x^2$ і $y=x+1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $x\sin y\cdot y'=\cos y$, $y(2)=0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$

2) $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x^2}$

3) $(1+x)y''-y'=0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-2y'+y=2e^x \qquad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+8}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(n+2)^{n+1}}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=xe^{x^3}$.

ВАРІАНТ 9

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x-2)(x+2)}{x}dx$ **2)** $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

3) $\int x^3 \ln x\, dx$ **4)** $\int \frac{3x+7}{x^2+3x+2}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \sin x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 24xy\, dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ $(x \geq 0)$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'\sqrt{1-x^2} = y$, $y(0) = e$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $2y' = \frac{2y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$

2) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3}$

3) $y'' = \frac{2}{y-1}(y')^2$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y = 2\sin x + 2\cos x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \sin\frac{x}{2}$.

ВАРІАНТ 10

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 2^x + x^2 - 2}{x^3} dx$ **2)** $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

3) $\int x e^{2x} dx$ **4)** $\int \frac{dx}{x^2 + x}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - 2y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $x y' + \sqrt{1 - y^2} = 0$, $y(2) = 0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = 4\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{y}{x}$

2) $y' + y\,tgx = \sin x \cos x$

3) $x^2 y'' + xy' = 1$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 9y' - 10y = 11e^x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 12$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 2}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n \cdot 5^n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^3 + 2n}{8n^3 + 1}\right)^{\frac{n}{5}}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x \cos 3x$.

ВАРІАНТ 11

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$

3) $\int x\ln x\,dx$ **4)** $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=5-x^2$ і $y=2-2x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=1-x^3$, $y=x^2-1$ і $x=0$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'=2xy+2x$, $y(1)=0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'=x+y$

2) $y'-2xy=e^{x^2}$

3) $y''=2yy'=0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'''-2y''+y'=6x^2 \qquad y(0)=3, \quad y'(0)=-7, \quad y''(0)=11$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{5n-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^{n+1}}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)\cdot 7^n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{x}{1+x^3}$.

ВАРІАНТ 12

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(5x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}dx$

3) $\int \arcsin x\, dx$ **4)** $\int \frac{2\,dx}{x^2-9x+20}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x \sin x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (12x-6y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=x^2$ та $x=2$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'=e^{x-y}$, $y(0)=\ln 3$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{y}{x}$

2) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{12}{x^3}$

3) $2yy''+(y')^2=0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+y=2\cos x \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=2$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n^2+3n+2)^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{(n+2)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(n+1)^2}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=x\ \mathrm{arctg}\frac{x}{2}$.

ВАРІАНТ 13

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2+6}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \frac{\arcsin x+4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3) $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$ **4)** $\int \frac{4\,dx}{x^2-2x-3}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x^2$ і $y=2-x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^2$ і $y=x+2$.

5. Розв'язати задачу Коші: $2yy'\operatorname{ctg} x+1=0$, $y(0)=2$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'(y-x)=y^2$

2) $y'+\frac{3}{x}y=\frac{5}{x^4}$

3) $(y-1)y''-2(y')^2=0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+y'-6y=e^x(2x^2-2x-7) \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^4-3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2n}{2n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+8)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{\ln(1-x)}{x}$.

ВАРІАНТ 14

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)^2}{x}dx$ **2)** $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx$

3) $\int x^2 e^x\,dx$ **4)** $\int \frac{dx}{x^3+x}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^5 \frac{dx}{x^2-8x+17}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=3-x^2$ і $y=1-x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 4x\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=4x$ і $x=0$ $(x\ge 0)$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'\operatorname{ctg} x = y+1$, $y(0)=2$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $yy'-xy'=\frac{y^2}{x}$

2) $y'-\frac{1}{x^2+1}y=(3x+4)e^{arctgx}$

3) $xy''+y'=x^2+1$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-2y'-3y=4\cos 2x-7\sin 2x \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+6}{n}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(2n+2)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=x^2e^{-2x}$.

ВАРІАНТ 15

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ **2)** $\int \left(e^x - 5\right)^3 e^x\,dx$

3) $\int \arccos x\,dx$ **4)** $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2}\,dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^7 \frac{dx}{x^2-8x+25}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=(x+1)^2$ і $y=4$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (y-x)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=2-x$ і $x=-1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{4+x^2}\,y' = y^2+1$, $y(0)=0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$

2) $xy' - y = x^2 \sin x$

3) $xy'' = y'$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = x^3 + 1 \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2}{n^4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+3)\cdot 3^n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x^2 \sin 3x$.

ВАРІАНТ 16

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x-2}}{\cos^2 x}dx$

3) $\int x\,2^{3x}\,dx$ **4)** $\int \frac{4x^2-8x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=2-x^2$ і $y=x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 6y\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3+1$, $y=x^2-1$ і $x=0$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'\cos^2 x-y=0$, $y(0)=e$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'=x+y$

2) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin 2x}{x}$

3) $xy''-y'\ln\frac{y'}{x}=0$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-y=4\sin x \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3+4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n-10}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=(1+5x)^{\frac{1}{4}}$.

ВАРІАНТ 17

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \left(x^2+4\right)\sqrt[3]{x}\,dx$ **2)** $\int \frac{(2-\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}dx$

3) $\int x^4 \ln x\,dx$ **4)** $\int \frac{3\,dx}{x^2-5x+6}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=3-x^2$ і $y=x+1$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 12xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=x^2$ та $x=2$.

5. Розв’язати задачу Коші: $y'-2xy=0$, $y(2)=1$.

6. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $x^2y'+y^2=x\,y$

2) $xy'-y=x^2\cos x$

3) $y''-y'=x\,e^x$

7. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-y'-2y=(x+2)e^{-x} \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{2n-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{7^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=x\,\operatorname{arctg}2x$.

ВАРІАНТ 18

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2}{\sqrt[3]{x}}dx$ **2)** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

3) $\int \ln 3x\,dx$ **4)** $\int \frac{dx}{x^2-9x+20}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\cos x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^2$ і $y=x+2$.

5. Розв’язати задачу Коші: $y'=(y-1)ctg\,x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$.

6. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'=\frac{y}{x}+\mathrm{tg}\frac{y}{x}$

2) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{3}{x}$

3) $xy''+y'=\frac{1}{x^2}$

7. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''-y'-6y=xe^{2x} \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+9}{n^4-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n-10}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{36^n}{(3n-1)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-x^2\right)$.

ВАРІАНТ 19

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int 2^{x+1} \cdot 3^x \, dx$ **2)** $\int \frac{x^2}{2x^3 - 3} dx$

3) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$ **4)** $\int \frac{8x - 8}{x^3 - 4x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 2$ і $y = -x^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x + y)\, dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ $(x \geq 0)$.

5. Розв'язати задачу Коші: $xy' + 3y = 0$, $y(1) = 2$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = y + x e^{\frac{y}{x}}$

2) $y' - \cos x \cdot y = (3x + 2) e^{\sin x}$

3) $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' = x^3 + x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^4 + 3}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 3}{\sqrt{n} \cdot 5^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x e^{\frac{x}{3}}$.

ВАРІАНТ 20

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{x^2-25}{x+5}dx$ **2)** $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$

3) $\int x\cos 6x\,dx$ **4)** $\int \frac{2x^2-x+2}{x^3+x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2+4x+13}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (6x-2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=2-x$ і $x=-1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'=1+\frac{2y}{x}$

2) $y'+\frac{y}{x}=21x$

3) $xy''-y'=x^2e^{2x}$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+4y'-5y=xe^x \qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-4}{5n}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3n!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}$.

ВАРІАНТ 21

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x}}dx$ **2)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

3) $\int x^2 \ln x\, dx$ **4)** $\int \frac{5x^2+6x+2}{x^3+2x^2+x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 1$ і $y = 1 - x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3 + 1$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$.

5. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{1-x^2}\, y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xyy' = y^2 + 2x^2$

2) $y' + y = (x^2 + 4x - 7)e^{-x}$

3) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^2 x$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' = x^2 - x + 3 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{n^4+2}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1)^2}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

ВАРІАНТ 22

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\left(x^2+2\right)^3}{x}dx$ **2)** $\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$

3) $\int \arcsin 2x\, dx$ **4)** $\int \frac{x^2+3x-2}{x^3-x}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=(x-1)^2$ і $y=1-x^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2x\, dxdy$, якщо область D обмежена лініями

$y=x^3$, $y=x^2$ та $x=2$.

5. Розв'язати задачу Коші: $x\cos y\cdot y'=\sin y$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'+e^{\frac{y}{x}}=\frac{y}{x}$

2) $y'-\frac{1}{\cos^2 x}y=\left(2x+3\right)\cdot e^{tgx}$

3) $xy''+y'=\ln x+1$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+16y=5\sin 2x \qquad y(0)=-3,\quad y'(0)=5.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^2-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-n^2}{n\cdot 8^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\left(1+3x\right)^{\frac{1}{6}}$.

ВАРІАНТ 23

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int (9-x)^2 \sqrt{x}\, dx$

2) $\int \frac{x}{3x^2+4} dx$

3) $\int \operatorname{arcctg} x\, dx$

4) $\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^3$ $y = 8$ і $x = 0$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (y-x)\, dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2 - 1$ і $y = x + 1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $x\,y' - \sqrt{1-y^2} = 0$, $y(3) = 0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$

2) $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = -\sin x \cdot e^{\arcsin x}$

3) $y'' = \frac{y'}{x \ln x}$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 25y = 5\cos 3x \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n-2}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n+3)}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2-2) \cdot 3^n}$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{x^2}$.

ВАРІАНТ 24

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$ **2)** $\int \frac{e^{\operatorname{arcctg} x}}{1+x^2} dx$

3) $\int \arccos 4x \, dx$ **4)** $\int \frac{4x^2-4}{x^3+2x^2} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2-2x+17}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 8y \, dxdy$, якщо область D обмежена лініями

$y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ $(x \geq 0)$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y' + 4xy = 0$, $y(1) = 1$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'\left(\frac{y}{x} - 1\right) = \frac{y^2}{x^2}$

2) $y' + \frac{1}{\sin^2 x} y = 2\cos x \cdot e^{ctgx}$

3) $(1-x^2)y'' = xy'$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$3y'' - 4y = x + 1 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{5n+6}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n n!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)2^n} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln(1+3x)}{x}$.

ВАРІАНТ 25

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin^2 x} dx$ **2)** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$

3) $\int x e^{-5x} dx$ **4)** $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+2x^2+x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{\text{arcctg} x}}{1+x^2} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x$ і $y = (x-2)^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (2x-1)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2-x$ і $x = -1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y' = xy^2 + x$, $y(1) = 0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $x^2 y' = 4(x^2 + y^2) + xy$

2) $y' + 2xy = -2x^3$

3) $xy'' - y' = x^4$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x \qquad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3+9}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{7n+1}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = x\cos 2x$.

ВАРІАНТ 26

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int(\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x})dx$ **2)** $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}$

3) $\int(x+2)\sin x\,dx$ **4)** $\int\frac{2x+1}{x^2+5x+6}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-4}^{1}\frac{dx}{x^2+8x+41}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=x^3$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 24xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=x^2-2$ і $x=0$.

5. Розв’язати задачу Коші: $2yy'\operatorname{tg}x-1=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

6. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $2x^3y'+y^3=2x^2y$

2) $y'-\frac{y}{x}=x\cdot\operatorname{tg}x$

3) $(y-1)y''=2(y')^2$

7. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+9y=15\sin 2x \qquad y(0)=-7,\quad y'(0)=0.$$

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^6-2}{3n^3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{\sqrt{n3^n}}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+5)}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{x}{1+x^2}$.

ВАРІАНТ 27

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}dx$ **2)** $\int \frac{x^3}{5x^4+1}dx$

3) $\int \operatorname{arcctg} 2x\,dx$ **4)** $\int \frac{5x}{x^2+x-6}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x^2$ і $y=3x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=x^2$ та $x=2$.

5. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{9+x^2}\,y'=y^2+1$, $y(0)=0$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y'(y-x)=\frac{y^2}{x}$

2) $y'-\frac{1}{x+5}y=e^{2x}(x+5)$

3) $y''-y'\operatorname{ctg}x=\sin 2x$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y''+4y=(6x+5)e^{-2x}$ $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{4}$.

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+9}{n^4-1}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n(3n+2)}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n-1}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\frac{1}{x}\operatorname{arctg}3x$.

ВАРІАНТ 28

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{x} dx$ **2)** $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x + 5}}{1+x^2} dx$

3) $\int x^2 \sin x \, dx$ **4)** $\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - 2x$ і $y = 5 - x^2$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$ і $y = x + 6$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y' \operatorname{tg} x = y + 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy' - y = (x+y)\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

2) $y' + y\,tgx = \cos^2 x$

3) $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin^2 x$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y''' - 4y'' + 5y' = 12e^{3x}$ $y(0) = 4$, $y'(0) = 8$, $y''(0) = 31$.

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{n^5 + 2}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2^n}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{5^n}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5} x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln\left(1 + x^3\right)}{x}$.

ВАРІАНТ 29

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(1-x)^2}{x^2}dx$ **2)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

3) $\int (2x-1)\,2^x\,dx$ **4)** $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+29}}$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=x^2$ і $y=x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (6x-2y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=x^3$, $y=4x$ і $x=0$ $(x\geq 0)$.

5. Розв'язати задачу Коші: $(1+x^2)y'-y=0$, $y(0)=e$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $xy'=y+x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$

2) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{12}{x^3}$

3) $(y-1)y''=2(y')^2$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y''+3y'+2y=\sin 2x+2\cos 2x$ $y(0)=\frac{1}{4}$, $y'(0)=\frac{3}{2}$.

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3}{n^3+4}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n^2}$ **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(5n+2)}{(n+3)!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+3}}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=x^2\cos\sqrt{x}$.

ВАРІАНТ 30

1. Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **2)** $\int \sqrt{\sin x - 1}\cos x\,dx$

3) $\int x^2 \cos x\,dx$ **4)** $\int \frac{3x+17}{x^2+2x-3}\,dx$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{\sqrt[3]{e-2}} \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^3$ і $y = x$.

4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

5. Розв'язати задачу Коші: $x\,y' - y\ln y = 0$, $y(2) = e^6$.

6. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

1) $y' = \frac{y^2+2x^2}{xy}$

2) $y' - 12x^{11}y = (x+4)e^{x^{12}}$

3) $xy'' - y' = x^3 \sin x$

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$ $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$.

8. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n+3}$ **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

9. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+2}x^n$.

10. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y = \frac{x}{1+2x}$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Метод безпосереднього (табличного) інтегрування.
5. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами.
6. Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
7. Інтегрування раціональних дробів. Розклад на елементарні дроби, виділення цілої частини.
8. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.
9. Інтегрування тригонометричних виразів. Універсальна тригонометрична заміна.
10. Інтегрування ірраціональних виразів.
11. Визначений інтеграл. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
12. Властивості визначеного інтеграла.
13. Формула Ньютона-Лейбніца.
14. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
15. Використання визначеного інтегралу для обчислення площі плоскої фігури.
16. Невласні інтеграли I і II роду. Дослідження їх збіжності.
17. Подвійний інтеграл та його обчислення.
18. Застосування подвійного інтегралу.
19. Диференціальні рівняння: означення, порядок рівняння, загальний розв'язок, частинний розв'язок, задача Коші.
20. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Приклад.
21. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Приклад.
22. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Приклад.
23. Інтегрування диференціального рівняння n-го порядку виду $y^{(n)} = f(x)$.
24. Інтегрування диференціального рівняння n-го порядку виду $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.
25. Інтегрування диференціального рівняння n-го порядку виду $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.
26. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Різні випадки коренів характеристичного рівняння.
27. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку $L[y] = f(x)$ зі спеціальною правою частиною $f(x)$.
28. Числові ряди. Основні поняття. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності.
29. Ознаки збіжності додатніх числових рядів. Ознаки порівняння, ознака Деламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші.
30. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Ознака Лейбніца.
31. Степеневі ряди. Інтервал, область та радіус збіжності степеневого ряду.
32. Розвинення функцій в степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена.
33. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.

2. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 334 с.

3. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 335 с.

4. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.

Навчально-методичне видання

Андрейцев Андрій Юрійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 2 для студентів денної форми навчання за напрямком підготовки 6.070101 «Транспортні технології»

Відповідальний за випуск – Андрейцев А.Ю.

Редакція авторська

Підписано до друку 15.01.14. Формат 60×84/16. Папір – офсетний. Спосіб друку – ризографія. Замовлення № 3/14. Наклад 35 прим.

Надруковано в Редакційно-видавничому відділі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію: Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р.
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19