МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

А.Ю. Андрейцев, О.О. Кільчинський, Т.С. Клецька

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №1
для студентів денної форми навчання
за напрямком 6.050202
«Автоматика і автоматизація на транспорті»

Київ 2014

УДК 51:517

Андрейцев А.Ю., Кільчинський О.О., Клецька Т.С.

ВИЩА МАТЕМАТИКА: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №1. Для студентів денної форми навчання за напрямком 6.050202 «Автоматика і автоматизація на транспорті»/ Андрейцев А.Ю., Кільчинський О.О., Клецька Т.С. – К.: ДЕТУТ, 2014. – 80 с.

У даних методичних вказівках розроблено варіанти розрахункових робіт з математики і методичні рекомендації для їх виконання. Робота призначена для самостійного опрацювання студентами програмного матеріалу за тематикою першого семестру: лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної. Самостійна робота з варіантами потрібна для засвоєння всіх зазначених тем на належному рівні.

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 4 від 22.11.2013 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки і менеджменту (протокол № 2 від 28.11.2013 р.).

Призначені для студентів денної форми навчання за напрямом 6.050202 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології».

Укладачі: *Андрейцев А.Ю.,* к.ф.-м.н., доцент,
Кільчинський О.О., к.ф.-м.н., доцент,
Клецька Т.С., к.і.н., доцент

Рецензенти: *Крижановська Т.В.*, к.ф.-м.н., професор,
Скрипка В.І., к.ф.-м.н., доцент

ЗМІСТ

Передмова та загальні методичні поради

Методичні вказівки складені для поглиблення, засвоєння, набуття навичок самостійної роботи та контролю знань студентів по розділах вищої математики, що вивчаються у 2 семестрі I курсу за спеціальностями АСТЗ та КІКС (напрям підготовки 6.050202, « Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології»). З цією метою розроблено тематику і викладено відповідну методику розв'язування типових задач по всіх варіантах розрахункової роботи. Послідовність розв'зування типових задач співпадає з послідовністю вивчення тем у навчальному курсі і послідовністю задач у варіантах розрахункової роботи.

При виконанні розрахункової роботи студент повинен дотримуватись таких вимог:

1) номер варіанта індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
2) розрахункова робота виконується на аркушах паперу у форматі А4;
3) перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписується її умова і всі конкретні дані до відповідного варіанта;
4) розв'язування кожної задачі повинно супроводжуватись необхідними поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

1) ознайомитись з наведеним переліком питань з дисципліни «Вища математика» і опанувати відповідний теоретичний матеріал з допомогою конспекта лекцій та рекомендованої літератури;
2) ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до індивідуальних завдань;
3) роботу над варіантами виконувати поетапно протягом всього семестру (в міру проходження відповідних тем лекційних та практичних занять);
4) по завершенні кожного з етапів відповідна частина роботи (що оформлена належним чином) подається на перевірку викладачу;
5) повністю завершену роботу треба здати на перевірку викладачу не пізніше ніж за два тижні до кінця семестру;
6) студенти, які не виконали індивідуальних завдань і не здали роботу вчасно, не допускаються до іспиту з дисципліни як такі, що не виконали навчальний план.

Питання з дисципліни «Вища математика» (1 курс, Ісеместр)

1. Числові множини. Числова вісь. Декартова і полярна системи координат.
2. Комплексні числа (КЧ) в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
3. Арифметичні операції з КЧ в алгебраїчній формі.
4. Операції з КЧ у тригонометричній та показниковій формах.
5. Тригонометрична й показникова форми КЧ: видобування коренів.
6. Означення, способи задавання та класифікація функцій.
7. Границя числової послідовності та функції.
8. Нескінченно малі та нескінченно великі величини (НМВ та НВВ), їх властивості.
9. Теореми про границі. Невизначеності. Перша та друга важливі границі.
10. Класифікація НМВ, ланцюжок еквівалентних НМВ.
11. Неперервність функції. Властивості функцій, неперервних в точці.
12. Точки розриву функції та їх класифікація.
13. Властивості функцій, неперервних на відрізку.
14. Означення, геометричний та фізичний зміст похідної функції.
15. Таблиця похідних і правила диференціювання.
16. Похідна від складеної, неявної, оберненої та параметрично заданої функцій.
17. Логарифмічне диференціювання.
18. Диференціал функції, його геометричний зміст та властивості.
19. Застосування диференціала до наближених обчислень.
20. Похідні та диференціали вищих порядків.
21. Визначники, обчислення визначників 2-го та 3-го порядків.
22. Мінори та алгебраїчні доповнення, застосування до обчислення визначника n- го порядку.
23. Властивості визначників.
24. Матриці та їх типи, квадратна, діагональна, одинична, ступінчата та трикутна матриці.
25. Операції з матрицями: транспонування, додавання, множення матриці на скаляр та на матрицю.
26. Обернена матриця та її знаходження.
27. Елементарні перетворення і ранг матриці. Властивості ранга.
28. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь(СЛАР) та їх матричний запис.
29. Теорема Кронекера-Капеллі. Аналіз випадків при розв’язуванні СЛАР.
30. Розв’язування СЛАР за правилом Крамера.
31. Матричний спосіб розв’язування СЛАР та матричних рівнянь.
32. Розв’язування СЛАР за методом Гауса.
33. Вектори та лінійні операції з ними.
34. Системи лінійно залежних і незалежних векторів. Базиси на площині та в тривимірному просторі (в R_2 та R_3).
35. Прямокутна декартова система координат в R_2 та R_3. Лінійні операції з векторами у координатній формі.

36. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх властивості, застосування та знаходження за координатами векторів-множників.
37. Пряма на площині: різні види рівнянь, знаходження кута між прямими, умови паралельності та перпендикулярності, відстань від точки до прямої.
38. Площина: різні види рівнянь, знаходження кута між площинами, умови паралельності та перпендикулярності, відстань від точки до прямої.
39. Знаходження кута між прямою та площиною, відстані від точки до площини.
40. Лінії 2-го порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола та парабола.

Теоретичні відомості та методика розв’язування задач

Задача 1. Знайти границі числових послідовностей та функцій.

А. Теоретичні відомості

Означення 1. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n, то множина чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ називається **числовою послідовністю** і позначається через $\{x_n\}$, де $x_n = x(n)$ – загальний член послідовності (деяка функція від натурального аргумента $n \in N$).

Означення 2. Число a називається **границею послідовності** $\{x_n\}$, і пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (або $x_n \to a$ при $n \to \infty$), якщо для довільного, як завгодно малого, числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N(\varepsilon) > 0$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Означення 3. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається **нескінченно малою (НМП)**, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Означення 4. Послідовність $\{z_n\}$ називається **нескінченно великою (НВП)**, і пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, якщо для довільного, як завгодно великого, числа $M > 0$ знайдеться таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх $n > N(M)$, виконується нерівність $|z_n| > M$. (Якщо ця нерівність виконується лише у вигляді $z_n > M$, або $z_n < -M$, то відповідно пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$).

Означення 5. Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ в точці x_0, і це позначають $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$ (або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$), якщо для довільного, як завгодно малого, числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x при умові $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення 6. Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (або $x \to -\infty$) і пишуть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (або $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$), якщо для довільного, як завгодно малого, числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon) > 0$, що для всіх x при умові $x > N$ (або $x < -N$) виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. (Якщо ця нерівність виконується при умові $|x| > N$, тобто і при $x > N$ і при $x < -N$, то пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$).

Означення 7. Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою величиною (НМВ) при** $x \to x_0$ (або $x \to \infty$), якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ (або $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

Означення 8. Функція $\alpha(x)$ називається **НМВ вищого порядку** ніж $\beta(x)$ при $x \to a$ (a −стале число чи нескінченність), якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Означення 9. **НМВ** $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **еквівалентними** при $x \to a$ (a −стале число чи нескінченність), і пишуть $\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Означення 10. Функція $z(x)$ називається **нескінченно великою величиною (НВВ) при** $x \to x_0$ і пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = \infty$, якщо для довільного, як завгодно великого, числа $M > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x при умові $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$ виконується нерівність $|z(x)| > M$. (Якщо ця нерівність виконується лише у вигляді $z(x) > M$, або $z(x) < -M$, то відповідно пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = -\infty$).

Означення 11. Функція $z(x)$ називається **нескінченно великою величиною (НВВ) при** $x \to \infty$ і пишуть $\lim\limits_{x \to \infty} z(x) = \infty$, якщо для довільного, як завгодно великого, числа $M > 0$ знайдеться таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x при умові $|x| > N$ виконується нерівність $|z(x)| > M$. (Якщо остання нерівність виконується лише при умові $x > N$, або $x < -N$, то відповідно пишуть $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} z(x) = \infty$).

Аналогічно розкриваються за змістом: $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} z(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} z(x) = -\infty$.

Таблиця 1

Границі степеневої та показникової функцій
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\lambda} = \infty, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{\lambda}} = 0 \quad (\lambda = const, \lambda > 0);$
2) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} q^{\lambda} = 0 \ (q = const,\ 0 < q < 1), \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\lambda} = \infty \ (q = const,\ q > 1) \end{cases}.$

Означення 12. Функція $z_1(x)$ називається **НВВ вищого порядку ніж НВВ** $z_2(x)$ **при** $x \to a$ (a −стале число чи нескінченність), якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{z_1(x)}{z_2(x)} = \infty$.

Приклади

1) **Степеневі функції** $u(x) = x^m$, $v(x) = x^n$ $(0 < m < n)$ при $x \to 0$ є **НМВ**, а при $x \to \infty$ − **НВВ**. Серед них при $x \to 0$ НМВ (при $x \to \infty$ НВВ) **вищого порядку** є та, що **має вищий степень змінної *x***, тобто функція $v(x) = x^n$: оскільки

$n - m > 0$, то за табл.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{v(x)}{u(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-m} = 0$, $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{v(x)}{u(x)} = \lim\limits_{x\to \infty} x^{n-m} = \infty$.

2) **Показникові функції** $u(x) = q_1^x$, $v(x) = q_2^x$ $(q_1 > q_2 > 1)$ при $x \to -\infty$ є **НМВ**, а при при $x \to +\infty$ **НВВ**. Серед них при $x \to -\infty$ НМВ (при $x \to +\infty$ НВВ) **вищого порядку** є та, що **має більшу основу,** тобто функція $u(x) = q_1^x$: оскільки

$\dfrac{q_1}{q_2} > 1$, $\dfrac{q_1}{q_2} < 1$, то за табл.1 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{v(x)}{u(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{q_1^x}{q_2^x} = \lim\limits_{x\to -+\infty}\left(\dfrac{q_2}{q_1}\right)^x = 0$,

$$\lim_{x\to \infty}\frac{v(x)}{u(x)} = \lim_{x\to \infty}\frac{q_1^x}{q_2^x} = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^x = \infty.$$

Властивості границь

1. (*про границю елементарної функції*)**.** Якщо $f(x)$− елементарна функція, а x_0− довільна точка з області її визначення, то існує граничне значення: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_0)$.

2. (*про властивості НМВ і НВВ*)**.** 1) Якщо при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$,) функція $\alpha(x)$ є НМВ, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є НВВ; 2) якщо при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$,) функція $z(x)$ є НВВ, то функція $\dfrac{1}{z(x)}$ є НМВ; 3) сума скінченної кількості НМВ також є НМВ; 4) якщо якщо при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) функція $\alpha(x)$ є НМВ, а функція $f(x)$ є обмеженою: $|f(x)| \le C$, то й добуток $\alpha(x)\, f(x)$ також є НМВ: $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x) f(x)) = 0$.

3. (*про границі операцій над функціями*)**.** Якщо при $x \to a$ (a−стале число чи нескінченність) існують (скінченні чи нескінченні) границі $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} v(x)$, і визначені операції

$$\lim_{x\to a}u(x)+\lim_{x\to a}v(x),\ \lim_{x\to a}u(x)\cdot\lim_{x\to a}v(x),\ \frac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)},\ (\lim_{x\to a}u(x))^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}, \qquad (1)$$

то існують відповідні границі $\lim\limits_{x\to a}\big(u(x)+v(x)\big)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(u(x)v(x)\big)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$ і мають місце рівності:

$$\begin{cases} 1)\ \lim\limits_{x\to a}\big(u(x)+v(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}u(x)+\lim\limits_{x\to a}v(x);\ 2)\ \lim\limits_{x\to a}\big(u(x)v(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}v(x); \\ 3)\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)};\ 4)\ \lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}=(\lim\limits_{x\to a}u(x))^{\lim\limits_{x\to a}v(x)}; \\ 5)\ \lim\limits_{x\to a}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a}f(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Зауваження 1. Якщо границі $\lim\limits_{x\to a}u(x)$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)$ існують, а деякі з операцій (1) не визначені, то в правих частинах відповідних формул (2), можемо отримати **невизначеності** − символи $[\infty-\infty]$, $0\cdot\infty$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$, що набувають певного числового значення, тільки тоді, коли додатково врахувати специфіку зміни функцій $u(x)$ та $v(x)$.

Зауваження2. Оскільки границю послідовності можна розглядати як частинний випадок границі функції, коли $x\to+\infty$ і приймає тільки натуральні значення, то відповідні твердження щодо границі функцій мають силу і для послідовностей.

У випадку невизначеностей для знаходження граничних значень (**розкриття невизначеностей**) в лівих частинах формул (1),(2) до виразів під знаком границі застосовують елементарні методи − тотожні алгебраїчні перетворення, формули першої та другої важливих границь (табл.1), ланцюжок еквівалентних НМВ (табл.2) − або методи диференціального числення, правило Лопіталя. В ході розкриття тип невизначеності може змінюватись: невизначеність або усувається, або усувається після переходу в інший тип.

Таблиця 2

Перша важлива границя для невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$
а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctgx}{x}=1.$
Друга важлива границя для невизначеності $[1^\infty]$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a, \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1, & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x} = m \end{cases},$

де e − ірраціональне число: $e = 2{,}7182818284\ldots$

в) Якщо при $x \to a$ (a −стале число чи нескінченність) маємо

$\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}$.

Таблиця 3

Ланцюжок еквівалентних НМВ (для невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$)

При $x \to a$, $t(x) \to 0$ (a стале число чи нескінченність) маємо ланцюжок еквівалентних НМВ:

$t(x) \leftrightarrow \sin t \leftrightarrow tg\, t \leftrightarrow \arcsin t \leftrightarrow arctg\, t \leftrightarrow \ln(1+t) \leftrightarrow (e^t-1) \leftrightarrow \dfrac{a^t-1}{\ln a} \leftrightarrow \dfrac{(1+t)^r-1}{r}$

.Граничне значення $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ не змінюється, якщо нескінченно малі множники у виразах $u(x)$, $v(x)$ замінити відповідними їм функціями ланцюжка.

Б. Методика розв'язування задач

1. *Алгебраїчні способи розкриття невизначеностей для границі* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

1) При розкритті невизначеності $[\infty-\infty]$ **(**коли $f(x) = u(x)+v(x)$), $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = -\infty$) у виразі $f(x)$ порівняти порядки доданків, винести множником НВВ найвищого порядку і скористатись формулами (2).

У застосуванні до многочленів при $x\to\infty$ за цим способом знаходимо, що при $x\to\infty$ граничне значення многочлена визначається його старшим членом (доданком зі старшим степенем):

$$\lim_{x\to\infty}(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\infty}(a_m x^m)\,. \qquad (3)$$

Приклад 1. Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1000n-10\sqrt{n}+15)$.

Розв'язання: Якщо покласти $u(n) = 2n^2+1000n+15$, $v(n) = -10\sqrt{n}$, то за формулою (3) матимемо $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1000n+15) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v(n) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}(-10\sqrt{n}) = -\infty$ і прийдемо до невизначеності $[\infty-\infty]$. Для її розкриття у виразі під знаком границі винесемо множник n^2 і застосуємо формули табл.1:

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1000n-10\sqrt{n}+15)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2+1000\frac{1}{n}-10\frac{\sqrt{n}}{n^2}+15\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(2+1000\frac{1}{n}-10\frac{1}{n^{3/2}}+15\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+1000\frac{1}{n}-10\frac{1}{n^{3/2}}+15\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\infty\cdot 2=\infty.$$

Відповідь: ∞.

Приклад 2. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to+\infty}(10\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}+5^{-3x})$.

Розв'язання: За формулами (2) і табл.1 отримаємо $\lim\limits_{x\to+\infty}(10\cdot 3^x+5^{-3x})=$

$$10\lim_{x\to+\infty}3^x++\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5^3}\right)^x=\infty+0=\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(-3\cdot 2^{2x})=-\infty\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(10\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}+5^{-3x})=[\infty-\infty]$ − невизначеність. Для розкриття невизначеності у виразі під знаком границі винесемо множником НВВ найвищого порядку (з більшею основою): $\lim\limits_{x\to+\infty}(10\cdot 3^x-3\cdot 2^{2x}+5^{-3x})=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[10\cdot 3^x-3\cdot 4^x+\left(\frac{1}{125}\right)^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left\{4^x\left[10\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-3+\left(\frac{1}{125}\right)^x\right]\right\}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}4^x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[10\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-3+\left(\frac{1}{125}\right)^x\right]=\infty\cdot(-3)=-\infty.$$

Відповідь: $-\infty$.

2) При розкритті невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ **(**коли $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}v(x)=\infty$) у чисельнику та знаменнику дробу $f(x)$ винести множником НВВ найвищого порядку, скоротити дріб на спільний множник і скористатись формулами табл.1. Зокрема, діє правило − при $x\to\infty$ граничне значення відношення многочленів визначається відношенням старших членів чисельника та знаменника:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\begin{cases}\infty,\ m>n;\\ 0\ \ m<n;\\ \dfrac{a_m}{b_n},\ m=n.\end{cases}\qquad(4)$$

Приклад 3. Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{10n^3+15n^2+n}$.

Розв'язання: Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-100n^2+1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^3=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(10n^3+15n^2+n)=$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 10n^3 = \infty$, то маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Винесемо у чисельнику та знаменнику дробу НВВ найвищого порядку − старший степінь n^3. Скоротивши на цей множник, позбудемось невизначеності і матимемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{10n^3+15n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\dfrac{100}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(10+\dfrac{15}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{100}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{10+\dfrac{15}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{1}{10}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{10}$.

3) Якщо $f(x)$ є раціональним дробом (відношенням многочленів) з ірраціональними множниками $\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}$, $\sqrt[3]{P(x)}-\sqrt[3]{Q(x)}$,… у чисельнику чи знаменнику, то для розкриття невизначеності $[\infty-\infty]$ позбутись ірраціональності в потрібному місці з допомогою формул:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\quad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}},\ldots \qquad (5)$$

і звести знаходження границі до розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 4. Знайти границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$.

Розв'язання: Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3n+5}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, то маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Домножимо та поділимо на спряжений вираз $\sqrt{n^2+3n+5}+n$, за формулами (5) позбудемось ірраціональності в чисельнику, розкриємо нову невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Знайдемо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5-n^2}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{3}{2}$.

Приклад 5. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Розв'язання: Розглянем окремо випадки, коли $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

а) При $x\to+\infty$ маємо невизначеність $[\infty-\infty]$**.** Застосуєм перетворення (5) і дістанемо:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

б) При $x\to-\infty$ невизначеності нема:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\infty\cdot(\infty+\infty)=-\infty\cdot\infty=-\infty.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$; б) $-\infty$ при $x\to-\infty$.

2. *Алгебраїчні способи розкриття невизначеностей для границі* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

1) При розкритті невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ **(**коли $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=0$) чисельник та знаменник дробу $f(x)$ скоротити на спільний множник − НМВ найнижчого порядку /для многочленів на найнижчий степінь $(x-x_0)$ / − і продовжити знаходження границі.

Приклад 6. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$.

Розв'язання: Оскільки $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$, $\lim\limits_{x\to2}(x^2+x-6)=0$, то маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття у чисельнику та знаменнику дробу $f(x)$знайдемо спільний множник $x-2$ (ту НМВ, що прямує до нуля при $x\to2$ і через це обертає в нуль чисельник та знаменник). Після скорочення на множник $x-2$ позбудемось невизначеності і знайдемо:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}=\frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

2) При розкритті невизначеності $[\infty-\infty]$ **(**коли $f(x)=\frac{u_1(x)}{v_1(x)}-\frac{u_2(x)}{v_2(x)}$, де $u_1(x)$, $v_1(x)$, $u_2(x)$, $v_2(x)$ − многочлени, $\lim\limits_{x\to x_0} v_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v_2(x)=0$) відняти дроби і звести до знаходження границі до випадку $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Приклад 7. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{7x+6}{x^2+x-6}\right)$.

Розв'язання: Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x+6}{(x-2)(x+3)}=\infty$, то маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Для її розкриття віднімемо дроби і отримаємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Останню, як і в попередньому прикладі, розкриємо, скорочуючи у виразі під знаком границі чисельник і знаменник на спільний множник $x-2$, що прямує до нуля. Матимемо:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{7x+6}{x^2+x-6}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+3)}-\frac{7x+6}{(x-2)(x+3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+3)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)x}{(x-2)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+3}=\frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{5}$.

3) Якщо $f(x)$є раціональним дробом (відношенням многочленів) з ірраціональними множниками $\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}$, $\sqrt[3]{P(x)}-\sqrt[3]{Q(x)}$,… у чисельнику чи знаменнику, то для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ позбутись ірраціональності в потрібному місці з допомогою формул (5), скоротити чисельник і знаменник на спільний множник, що прямує до нуля.

Приклад 8. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x-5}-1}{x^2+3x-10}$.

Розв'язання: Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. У виразі під знаком границі позбудемось ірраціональності в чисельнику за другою з формул (5), розкриємо невизначеність, скоротивши чисельник і знаменник на спільний множник $x-2$, що прямує до нуля, знайдемо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x-5}-1}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-5)-1}{(x^2+3x-10)\left(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-5)-1}{(x^2+3x-10)\left(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+5)\left(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x+5)\left(\sqrt[3]{(3x-5)^2}+\sqrt[3]{3x-5}+1\right)}=\frac{1}{7}.$$ *Відповідь*: $\dfrac{1}{7}$.

Приклад 9. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}\right)}{x^2-16}$.

Розв'язання: Маємо невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладемо знаменник на множники, домножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз. По скороченні чисельника і знаменника на множник, що прямує до нуля, позбудемось невизначеності і знайдемо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}\right)}{x^2-16}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+5-(2x+1)}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-x+4}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{(x+4)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{-1}{(4+4)\left(\sqrt{4+5}+\sqrt{8+1}\right)}=-\frac{1}{48}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{48}$.

3. *Застосування важливих границь та ланцюжка еквівалентних НМВ.*

При розкритті невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[1^{\infty}\right]$ доцільно користуватись формулами важливих границь та ланцюжком еквівалентних НМВ (див. табл. 2, табл. 3).

Приклад 10. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$.

Розв'язання: Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для її розкриття скористаємось формулами $1-\cos^2 x=\sin^2 x$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ та першою важливою границею (табл. 2). Знайдемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot 2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 11. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln^2\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)}{tg\pi x}$.

Розв'язання: Вирази у чисельнику та знаменнику прямують до нуля. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ розкриємо з допомогою ланцюжка еквівалентних НМВ (див. табл. 3). Функцію у знаменнику перетворимо так, щоб при $x \to 2$ її аргумент став нескінченно малим (як і для всіх функцій цієї таблиці); спираючись на періодичність, дістанемо: $tg\pi x = tg(\pi x - 2\pi) = tg(\pi(x-2))$. Далі звернемось до ланцюжка: 1) з співвідношення $tg\, t \leftrightarrow t$ при $t = \pi(x-2) \to 0$ отримаємо $tg(\pi(x-2)) \leftrightarrow \pi(x-2)$; 2) з співвідношення $\ln(1+t) \leftrightarrow t$ при $t = \sqrt{x^2-4} \to 0$ матимемо $\ln\left(1+\sqrt{x^2-4}\right) \leftrightarrow \sqrt{x^2-4}$, $\ln^2\left(1+\sqrt{x^2-4}\right) \leftrightarrow x^2-4$. Таким чином, знайдемо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln^2\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)}{tg\pi x} = \lim_{x\to 2}\frac{\ln^2\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)}{tg\pi(x-2)} =$$

$$= \begin{bmatrix} t \to 0 \Rightarrow \quad tgt \leftrightarrow \ln(1+t) \leftrightarrow t: \\ 1)\ t = \pi(x-2) \to 0 \Rightarrow \ tg(\pi(x-2)) \leftrightarrow \pi(x-2); \\ 2)\ t = \sqrt{x^2-4} \to 0 \Rightarrow \ \ln\left(1+\sqrt{x^2-4}\right) \leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \end{bmatrix} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}{\pi(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{\pi(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\pi(x-2)} = \frac{4}{\pi}.$$

Відповідь: $\frac{4}{\pi}$.

Приклад 12. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

Розв'язання: Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x^2-4} = \infty$, маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$. Для її розкриття скористаємось формулою табл.2:

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to a}(u(x)-1)v(x)}.$$

Поклавши $a = 2$, $u(x) = 3x-5$, $v(x) = \frac{2x}{x^2-4}$, знайдемо:

$$\lim_{x\to 2}(u(x)-1)v(x) = \lim_{x\to 2}(3x-6)\frac{2x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{6}{x+2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}(u(x)-1)v(x)} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Відповідь: $e^{\frac{3}{2}}$.

Задача 2. Знайти похідні.

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Похідною функції** $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до відповідного приросту аргументу Δx при умові, що $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблиця похідних

T	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$		$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0	9	$\sin x$	$\cos x$
2	x	1	10	$\cos x$	$-\sin x$
3	x^n	nx^{n-1}	11	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
5	a^x	$a^x \ln a$	13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	e^x	e^x	14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	15	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання: 1) $(Cu)' = Cu'$; 3) $(uv)' = u'v + uv'$;

2) $(u+v)' = u' + v'$; 4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Похідна складеної функції $y = f(\varphi(x))$ дорівнює добутку її похідної за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за незалежною змінною: $y'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$.

Якщо функція задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то похідна функції y за незалежною змінною x дорівнює відношенню похідних від y та x за параметром t:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Якщо y є неявною функцією від x, тобто задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язним відносно y, то для знаходження похідної $\dfrac{dy}{dx}$ потрібно продиференціювати обидві частини рівності, пам'ятаючи, що y є функцією від x, а потім розв'язати отриману рівність відносно шуканої похідної y'. Ця похідна буде залежати в загальному випадку від x та y.

Для знаходження похідної від показниково-степеневої функції $y = u^v$, де u та v – функції від x необхідно:

1) прологарифмувати обидві частини рівняння за основою e:

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x),$$

2) продиференціювати обидві частини цієї рівності, пам'ятаючи, що $\ln y$ є складеною функцією від x:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x),$$

3) замінити y його виразом через x і визначити y':

$$y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій.

1) $y=\left(x^5+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\sin x$; 2) $y=\dfrac{x^4-3}{\cos x+e^x}$; 3) $y=tg^3x$; 4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

5) $y=(3x-6)^5\cdot arctg2x$; 6) $\begin{cases}x=\sin 2t-2t\\ y=t^2+1\end{cases}$; 7) $x^2+y^2-xy=0$; 8) $y=(2x+3)^{\operatorname{tg}x}$.

Розв'язання:

1) Оскільки y є добутком двох функцій: $u=\left(x^5+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $v=\sin x$, то

$$y'=(uv)'=u'v+uv'=\left(\left(x^5+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\sin x\right)'=\left(\left(x^5+x^{-3}\right)\cdot\sin x\right)'=$$

$$=\left(x^5+x^{-3}\right)'\cdot\sin x+\left(x^5+x^{-3}\right)\cdot(\sin x)'=\left(5x^4-3x^{-4}\right)\cdot\sin x+\left(x^5+x^{-3}\right)\cdot\cos x=$$

$$=\left(5x^4-\frac{3}{x^4}\right)\cdot\sin x+\left(x^5+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\cos x.$$

2) Оскільки y є часткою двох функцій: $u=x^4-3$, $v=\cos x+e^x$, то

$$y'=\left(\frac{x^4-3}{\cos x+e^x}.\right)'=\frac{\left(x^4-3\right)'\left(\cos x+e^x\right)-\left(x^4-3\right)\left(\cos x+e^x\right)'}{\left(\cos x+e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^3\cdot\left(\cos x+e^x\right)-\left(x^4-3\right)\left(-\sin x+e^x\right)}{\left(\cos x+e^x\right)^2}.$$

3) Оскільки y є складеною функцією: $y=\varphi^3$, $\varphi=tgx$, то

$$y'_x=\left(tg^3x\right)'=f'_\varphi\cdot\varphi'_x=3\varphi^2\cdot\varphi'_x=3tg^2x\cdot(tgx)'=3tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}=\frac{3\sin^2x}{\cos^4x}.$$

4) Аналогічно до попереднього прикладу маємо:

$$y'=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)'=\frac{1}{x}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5) Маємо добуток двох складених функцій. Тому

$$y' = \left((3x-7)^5\right)' \cdot arctg\,2x + (3x-7)^5 \cdot (arctg\,2x)' =$$

$$= 5(3x-7)^4 \cdot 3 \cdot arctg\,2x + (3x-7)^5 \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = (3x-7)^4\left(15arctg\,2x + \frac{6x-14}{1+4x^2}\right).$$

6) Оскільки y задана параметрично, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(t^2+1\right)'}{(\sin 2t - 2t)'} = \frac{2t}{2\cos 2t - 2} = \frac{t}{\cos 2t - 1}.$$

7) Оскільки y задана неявно, то продиференцюємо обидві частини рівності:

$$\left(x^2 + y^2 - xy\right)' = (0)'$$

Тоді матимемо : $2x + 2yy' - y - xy' = 0$, $y'(2y - x) = y - 2x$, $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$.

8) Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою e:

$$\ln y = \ln(2x+3)^{\operatorname{tg} x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \operatorname{tg} x \ln(2x+3);$$

продиференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$(\ln y)' = (\operatorname{tg} x \ln(2x+3))' \quad \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = (\operatorname{tg} x)' \ln(2x+3) + \operatorname{tg} x(\ln(2x+3))' \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{2x+3} \quad \Leftrightarrow \quad y' = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{2x+3}\right).$$

Відповідь: 1) $y' = \left(5x^4 - \dfrac{3}{x^4}\right) \cdot \sin x + \left(x^5 + \dfrac{1}{x^3}\right) \cdot \cos x$;

2) $y' = \dfrac{4x^3 \cdot \left(\cos x + e^x\right) - \left(x^4 - 3\right)\left(-\sin x + e^x\right)}{\left(\cos x + e^x\right)^2}$; 3) $y' = \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$; 4) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $y' = (3x-7)^4\left(15arctg\,2x + \dfrac{6x-14}{1+4x^2}\right)$; 6) $y'_x = \dfrac{t}{\cos 2t - 1}$; 7) $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$;

8) $y' = (2x+3)^{\operatorname{tg} x}\left(\dfrac{\ln(2x+3)}{\cos^2 x} + \dfrac{2\operatorname{tg} x}{2x+3}\right)$.

Задача 3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $y = f(x)$ в точці x_0.

А. Теоретичні відомості

Рівняння дотичної $L_д$ та нормалі $L_н$ до лінії $y=f(x)$ в точці x_0 мають вигляд:

$$(L_д):\ y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \quad (L_н):\ y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0), \qquad (6)$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $y = x^2 + 6\sqrt{x} - 3$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання: 1) Знайдемо похідну y': $y' = \left(x^2 + 6\sqrt{x} - 3\right)' = 2x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

2) Обчислимо значення y_0 та $y'(x_0)$: $y = x^2 + 6\sqrt{x} - 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_0 = \left(x^2 + 6\sqrt{x} - 3\right)_{|x=1} = 4, \quad y' = 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'(x_0) = \left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)_{|x=1} = 5.$$

3) Застосуємо формули (6):

$$(L_д):\ y - 4 = 5(x-1) \Rightarrow y - 5x + 1 = 0; \quad (L_н):\ y - 4 = -\frac{1}{5}(x-1) \Rightarrow 5y + x - 21 = 0.$$

Відповідь: $(L_д)$: $y - 5x + 1 = 0$ − рівняння дотичної; $(L_н)$: $5y + x - 21 = 0$ − рівняння нормалі.

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $y^2 + 6xy + 4x^2 - 20 = 0$ в точці $x_0 = 1$ (у півплощині $y > 0$).

Розв'язання: 1) Рівняння лінії визначає *y* як неявну функцію від *x*. Для знаходження похідної y' продиференцюємо це рівняння, враховуючи, що *y* є функцією від *x*. Матимемо:

$$(y^2 + 6xy + 4x^2 - 20)' = (0)' \Rightarrow 2yy' + 6y + 6xy' + 8x = 0,$$

$$2y'(y + 3x) = -2(4x + 3y) \Rightarrow y' = -\frac{4x + 3y}{y + 3x}.$$

2) В рівнянні лінії покладемо $x = x_0 = 1$, ординату y_0 точки дотику знайдемо серед коренів рівняння $y^2 + 6y - 16 = 0$. З двох коренів $y_1 = 2$, $y_2 = -8$ умові

$y > 0$ задовольняє тільки корінь $y_1 = 2$. Тому ординатою точки дотику є $y_0 = 2$.

Значення $y'(x_0)$ знайдемо за формулою $y'(x_0) = \left(-\dfrac{4x+3y}{y+3x} \right)_{|x=1;y=2} = 2.$

3) Застосуємо формули (6). При $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $y'(x_0) = 2$ отримаємо:

($L_д$): $y - 2 = 2(x-1) \Rightarrow y - 2x = 0$; ($L_н$): $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y + x - 5 = 0$.

Відповідь: ($L_д$): $y - 2x = 0$ − рівняння дотичної; ($L_н$): $2y + x - 5 = 0$ − рівняння нормалі.

Задача 4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y = f(x)$.

А. Теоретичні відомості

Якщо значення $f(x_0)$ та $f'(x_0)$ відомі, то значення $f(x)$ в точці $x = x_0 + \Delta x$, достатньо близькій до точки x_0, знаходиться наближено за формулою:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{7}$$

Зауваження. Якщо аргумент тригонометричної функції задано в градусах, то його необхідно перевести в радіани за співвідношенням

$$1^0 = \frac{\pi}{180} = \frac{3{,}1415\ldots}{180} \approx 0{,}01745. \tag{8}$$

Б. Методика розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити наближено з допомогою диференціала: $y = \sqrt[3]{3x+2}$, $x = 1{,}96$.

Розв’язання: 1) Знайдемо похідну y':

$$y' = \left(\sqrt[3]{3x+2}\right)' = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}.$$

2) Підберемо x_0 та Δx так, щоб у точці x_0, достатньо близькій до точки $x = x_0 + \Delta x$ значення $f(x_0)$, $f'(x_0)$ були відомими.

Оскільки при $x = 1{,}96$ маємо $3x + 2$=7,88, $f(x) = \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{7{,}88}$, то значення x_0 підберемо з умови $3x_0 + 2 = 8$. При такому виборі буде $x_0 = 2$, $f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{4}$. Відповідне значення Δx знайдемо за формулою: $\Delta x = x - x_0$. При $x = 1{,}96$, $x_0 = 2$ звідси матимемо $\Delta x = 1{,}96 - 2 =$
$= -0{,}04$.

3) Підставимо значення $f(x)=\sqrt[3]{7,88}$, $f(x_0)=2$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{4}$ та $\Delta x = -\ 0,04$ у формулу (7) і знайдемо: $f(x)=\sqrt[3]{7,88}\approx 2+\dfrac{1}{4}(-0,04)=1,99$.

Відповідь: 1,99.

Приклад 2. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sin x,\quad x=28,5^0$.

Розв'язання: 1) Знайдемо похідну y': $y'=(\sin x)'=\cos x$. 2) Виберемо $x_0=30^0$ і отримаємо: $f(x_0)=\sin 30^0=0,5$, $f'(x_0)=\cos 30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1,7320\ldots}{2}\approx 0,8660$,

$\Delta x = x-x_0 = 28,5^0-30^0=-1,5^0$. За співвідношенням (8) у виразі Δx перейдемо від градусів до радіанів: $\Delta x=$ $-1,5^0 = -1,5\dfrac{\pi}{180}=-1,5\cdot 0,01745=-0,02617$.

3) Підставимо значення $f(x)=\sin 28,5^0$, $f(x_0)=0,5$, $f'(x_0)=0,8660$ та $\Delta x=$ $=-\ 0,02617$ у формулу (7) і знайдемо: $f(x)=\sin 28,5^0\approx 0,5-0,8660\cdot 0,02617=$ $=0,5-0,02266=0,4773$.

Відповідь: 0,4773.

Задача 5. Дано матриці: *A,B*. Треба знайти: 1) pA^2+qA, 2) *AB* та *BA*.

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Матрицею** А розмірами $m\times n$ називається прямокутна таблиця вигляду:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

яка складається з чисел $a_{ij}\,(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, що розміщені в m рядків і n стовпців. Числа a_{ij} називаються елементами матриці; перший індекс *i* задає номер рядка, а другий *j* − номер стовпця, де міститься елемент a_{ij}.

Матрицю (9) позначають також скорочено: $\mathrm{A}=(a_{ij})$ або $\mathrm{A}=(a_{ij})_{mxn}$.

Матриці $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$називаються рівними і пишуть $A=B$, якщо вони мають однакові розміри і їх відповідні елементи є рівними: $a_{ij}=b_{ij}$.

Матриця, у якої кількість рядків та стовпців однакова і дорівнює числу n, називається **квадратною матрицею** n-го порядку. **Головною діагоналлю** квадратної матриці n-го порядку називається діагональ, яка йде з її лівого верхнього до правого нижнього кута, тобто складається з елементів a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}. **Діагональ**, яка йде з правого верхнього до лівого нижнього кута, називається **побічною**.

Квадратна **матриця** E, у якої елементи головної діагоналі є одиницями, а всі інші − нулями називається **одиничною**.

Операції з матрицями

При множенні матриці на число кожен її елемент множиться на це число.

Щоб додати (відняти) дві матриці **однакової розмірності**, треба додати (відняти) їх відповідні елементи.

Добуток AB двох матриць $\exists$ («існує») лише тоді, коли **кількість стовпців** $n_{\mathbf{A}}$ **першої з них дорівнює кількості рядків** m_B **другої**, тобто при $n_{\mathbf{A}}=m_B$. Елементи матриці $C = AB$ знаходять як суму добутків відповідних елементів i-го рядка першої матриці та j-го стовпця другої за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}. \tag{10}$$

Одинична матриця E виконує роль числа 1 при множенні дійсних чисел: якщо існують відповідні добутки, то $AE = A$, $EA = A$.

У загальному випадку $AB \neq BA$. Степенем A^n $(n = 2, 3, \ldots)$ позначають добуток матриці A саму на себе n разів: $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ і т.д. Підносити до степеня можна лише квадратні матриці.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Знайти $3A^2 - 2A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot5+0\cdot1+7\cdot(-1) & 5\cdot0+0\cdot2+7\cdot0 & 5\cdot7+0\cdot3+7\cdot2 \\ 1\cdot5+2\cdot1+3\cdot(-1) & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot0 & 1\cdot7+2\cdot3+3\cdot2 \\ -1\cdot5+0\cdot1+2\cdot(-1) & -1\cdot0+0\cdot2+2\cdot0 & -1\cdot7+0\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 49 \\ 4 & 4 & 19 \\ -7 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$3A^2 - 2A = 3\begin{pmatrix} 18 & 0 & 49 \\ 4 & 4 & 19 \\ -7 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 54 & 0 & 147 \\ 12 & 12 & 57 \\ -21 & 0 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 14 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 0 & 133 \\ 10 & 8 & 51 \\ -19 & 2 & -13 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 44 & 0 & 133 \\ 10 & 8 & 51 \\ -19 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти AB та BA, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: За формулою (10) знайдемо:

1) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot2+3\cdot5 & 4\cdot3+3\cdot(-2) & 4\cdot1+3\cdot0 \\ -2\cdot2+5\cdot5 & -2\cdot3+5\cdot(-2) & -2\cdot1+5\cdot0 \\ 1\cdot2+2\cdot5 & 1\cdot3+2\cdot(-2) & 1\cdot1+2\cdot0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 6 & 4 \\ 21 & -16 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot4+3\cdot(-2)+1\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot5+1\cdot2 \\ 5\cdot4+(-2)\cdot(-2)+0\cdot1 & 5\cdot3+(-2)\cdot5+0\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 23 \\ 24 & 5 \end{pmatrix};$$

2) $AB=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cdot 2+5\cdot 5 & 7\cdot 3+5\cdot(-2) & 7\cdot 1+5\cdot 0\\ 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot(-2) & 3\cdot 1+4\cdot 0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}24 & 11 & 7\\ 26 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\bar{\exists}$ ("не існує"), бо $n_B=3\neq m_A=2$

(кількість стовпців першої матриці-множника не дорівнює кількості рядків другої матриці-множника).

Відповідь: 1) $AB=\begin{pmatrix}23 & 6 & 4\\ 21 & -16 & -2\\ 12 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}3 & 23\\ 24 & 5\end{pmatrix}$; 2) $AB=\begin{pmatrix}24 & 11 & 7\\ 26 & 1 & 3\end{pmatrix}$,

$BA=\bar{\exists}$.

Задача 6. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом та за правилом Крамера.

А. Теоретичні відомості

Означення 2. **Визначником** квадратної матриці A n-го порядку називається функція від її елементів, яка позначається через Δ або $\det A$, задається у вигляді

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

і обчислюється за спеціальними правилами (див. далі). Порядок матриці називається порядком визначника, елементи матриці – елементами визначника.

Означення 3. **Мінором** M_{ij} **елемента** a_{ij} визначника Δ називається визначник, який отримуємо з визначника Δ після викреслення i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких міститься елемент a_{ij}.

Означення 4. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} **елемента** a_{ij} визначника Δ називається його мінор M_{ij} з множником $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\,M_{ij}. \qquad (11)$$

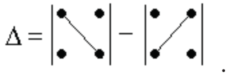
Правила обчислення визначників

1. Визначник 1-го порядку обчислюється за формулою: $|a|=a$, де a − елемент матриці $A=(a)$.

2. Визначник 2-го порядку обчислюється за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (12)$$

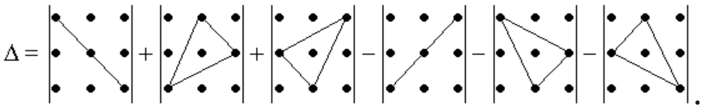
Доданки у правій частині цієї формули складають відповідно до схеми:



3. Визначник 3-го порядку обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (13)$$

Доданки у правій частині тут складають відповідно до схеми «правила трикутників»:



4. Визначник *n*-го порядку (*n* = 2, 3,) дорівнює сумі добутків елементів свого довільного рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \quad (i = \overline{1;n})$$

або (14)

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}, \quad (j = \overline{1;n}).$$

Означення 5. **Оберненою** до квадратної матриці *A* *n*-го порядку називається матриця A^{-1}, яка задовольняє умові:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \qquad (15)$$

де *E* − одинична матриця *n*-го порядку.

Означення 6. Квадратна матриця *A* називається **невиродженою**, якщо виконується умова $\det A \neq 0$.

Обернена матриця існує лише при умові $\det A \neq 0$ (тільки для невиродженої матриці) і обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

де $\det A$ – визначник матриці А, а A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}.

Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{17}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − невідомі, $a_{ij}\,(i, j = \overline{1,n})$ − коефіцієнти при невідомих, $b_1, b_2, \ldots\ b_n$ − вільні члени. Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

де А – матриця системи (матриця коефіцієнтів при невідомих), X – матриця-

стовпець невідомих, В – матриця-стовпець вільних членів. Тоді згідно з правилом множення матриць систему можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$AX = B. \tag{18}$$

Припустимо, що $\det A \neq 0$ і матриця A^{-1}, обернена до А, існує. Домножимо обидві частини цього рівняння з лівого боку на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то з останнього співвідношення маємо:

$$X = A^{-1}B. \tag{19}$$

Формула (19) дає розв'язок матричного рівняння (18), а з тим і системи (17).

Отже, щоб розв'язати квадратну систему лінійних рівнянь, достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її з правого боку на матрицю-стовпець вільних членів.

Правило Крамера розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано квадратну систему (17) n лінійних рівнянь з n невідомими. Якщо матриця системи є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$, то ця система має єдиний розв'язок, який можна знайти з допомогою формул (за правилом Крамера):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{20}$$

де Δ − визначник матриці системи, Δ_1, Δ_2, …, Δ_n, − визначники, які отримуємо з визначника Δ після заміни його 1-го, 2-го, …, n-го стовпця на матрицю-стовпець вільних членів:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити визначник, мінор M_{12} та алгебраїчне доповнення A_{12} для матриць: 1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: 1) За формулою (12) обчислимо: $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 5 \cdot (-3) = 43$. Мінор M_{12} – це визначник, що отримується з визначника Δ після викреслення всіх елементів першого рядка і другого стовпця. M_{12} знайдемо як визначник 1-го порядку: $M_{12} = -3$. Алгебраїчне доповнення A_{12} знайдемо за формулою (10) при $i = 1, j = 2$: $A_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = (-1)^3\, M_{12} = -M_{12} = -(-3) = 3$.

2) За формулою (13) обчислимо: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 \cdot 4 -$

$- 7 \cdot 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 4 = 2$. Викреслимо з визначника Δ елементи першого рядка і другого стовпця; мінор M_{12} знайдемо як визначник 2-го порядку: $M_{12} =$ $= \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 5$. Алгебраїчне доповнення A_{12} знайдемо за формулою:

$A_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = -M_{12} = -5$.

Відповідь: 1) $\Delta = 43$, $M_{12} = -3$, $A_{12} = \mathbf{3}$; 2) $\Delta = 2$, $M_{12} = 5$, $A_{12} = -5$.

Приклад 2. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання: 1) Застосуємо матричний спосіб. Складемо матриці

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A. Спершу обчислимо визначник матриці A і переконаємось, що матриця A^{-1} існує:

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 0 = 15.$$

Оскільки $\det \mathrm{A} \neq 0$, то обернена матриця існує, систему можна розв'язувати за формулою (19).

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів матриці A за формулою (11):

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad \mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad \mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \qquad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3; \qquad \mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6; \qquad \mathrm{A}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

За формулою (16) при $n = 3$ складемо обернену матрицю:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32} \\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевіряючи співвідношення $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E}$, тобто умову (15), переконаємось у правильності знаходження оберненої матриці:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&4\\7&1&-2\\-3&6&3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot7+0(-3)&1(-2)+2\cdot1+0\cdot6&1\cdot4+2(-2)+0\cdot3\\-1\cdot1+1\cdot7+2(-3)&-1(-2)+1\cdot1+2\cdot6&-1\cdot4+1(-2)+2\cdot3\\3\cdot1+0\cdot7+1(-3)&3(-2)+0\cdot1+1\cdot6&3\cdot4+0(-2)+1\cdot3\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}15&0&0\\0&15&0\\0&0&15\end{pmatrix}=\mathrm{E}.$$

За формулою (19) знайдемо матрицю невідомих X і розв’язок системи:

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&-2&4\\7&1&-2\\-3&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.\quad \text{Отже, остаточно}\quad \begin{cases}x_1=-1,\\x_2=2,\\x_3=1.\end{cases}$$

2) Застосуємо правило Крамера.

Оскільки вже встановлено, що $\Delta=\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&1&2\\3&0&1\end{vmatrix}=15\neq 0$, то систему можна розв’язувати за формулами (20) при $n=3$.

За формулами (21) обчислимо визначники $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&2&0\\5&1&2\\-2&0&1\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot(-2)+0\cdot5\cdot0-0\cdot1\cdot(-2)-2\cdot5\cdot1-3\cdot2\cdot0=-15,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&0\\-1&5&2\\3&-2&1\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot1+3\cdot2\cdot3+0\cdot(-1)\cdot(-2)-0\cdot5\cdot3-3\cdot(-1)\cdot1-1\cdot2\cdot(-2)=30,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&5\\3&0&-2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(-2)+2\cdot5\cdot3+3\cdot(-1)\cdot0-3\cdot1\cdot3-2\cdot(-1)\cdot(-2)-1\cdot5\cdot0=15.$$

Далі за формулами (20) отримаємо ті самі значення x_1, x_2, x_3, що вже були знайдені матричним способом :

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-15}{15}=-1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{30}{15}=2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{15}{15}=1.$$

Відповідь: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Задача 7. Розв'язати за методом Гауса систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Елементарними перетвореннями** матриці A називаються такі:

1) переставлення рядків (стовпців), 2) множення рядка (стовпця) на довільний ненульовий множник *k*, 3) множення рядка (стовпця) на довільний ненульовий множник *k* і додавання до іншого рядка (стовпця).

Означення 2. **Матриці** *A* та *B* називаються **еквівалентними**, і пишуть *A* ↔ *B*, якщо одну з них можна отримати з іншої з допомогою елементарних перетворень.

Означення 3. **Ступінчатою** називається **матриця** *S*, що має властивість: перший ненульовий елемент у кожному наступному рядку може міститись лише правіше, ніж у попередньому: якщо в якомусь рядку перший ненульовий елемент знаходиться на *k*-му місці, то в усіх наступних рядках на перших *k* місцях − самі нулі.

Перші ненульові **елементи** в рядках ступінчатої матриці називатимемо **опорним**. **Рядок** та **стовпець**, на перетині яких міститься опорний елемент називатимемо **напрямними**.

Кожну матрицю елементарними перетвореннями рядків можна привести до ступінчатого вигляду.

Приклад. Ступінчатими є матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

У першій матриці опорними є елементи 3, 1, 2, у другій − 3, 5, у третій − 3, 4, 2.

Означення 4. **Мінором *k*-го порядку** матриці $(a_{ij})_{mxn}$ називається будь-який визначник, складений з елементів, що містяться на перетині її *k* рядків та *k* стовпців.

Означення 5. **Рангом** $r(A)$ **матриці** $(a_{ij})_{mxn}$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Властивості ранга

1. Ранг довільної матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ задовольняє нерівності $0 \le r(A) \le min(\ m,\ n)$.

2. При елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється (еквівалентні матриці мають однакові ранги).

3. Ранг довільної матриці A дорівнює кількості ненульових рядків ступінчатої матриці S_A, еквівалентної до матриці A.

Зауваження. Властивість 3 дає ефективний метод визначення рангу великорозмірних матриць.

Про кількість розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{22}$$

Складемо матрицю A (**матрицю системи**) і матрицю $\widetilde{A}$ (**розширену матрицю системи)**, яку отримуємо з A після прєднання до неї стовпця вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \ \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_3 \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_4 \end{array}\right). \tag{23}$$

За теоремою Кронекера-Капеллі при знаходженні розв'язків системи (22) можливі три випадки:

1) при $r(A) = r(\widetilde{A}) = n$ (n − кількість невідомих)$\Rightarrow$ система має єдиний розв'язок (є визначеною);
2) при $r(A) = r(\widetilde{A}) < n \ \Rightarrow$ система має безліч розв'язків (є невизначеною);
3) при $r(A) \neq r(\widetilde{A}) \Rightarrow$ система не має розв'язків (є несумісною).

Означення 6. **Ступінчатою** називається система лінійних рівнянь, розширена матриця якої є ступінчатою. Перші **невідомі** в рівняннях ступінчатої системи називаються **базисними**, усі інші − **вільними**. У кожному з рівнянь базисна змінна має множником опорний, тобто перший ненульовий, елемент відповідної матриці *S*.

Метод Гауса розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Суть методу Гауса полягає в тому, що послідовним виключенням невідомих з максимально можливої кількості рівнянь система (22) приводиться до еквівалентного (ступінчатого) вигляду, на базі якого розв'язок системи можна отримати, розглядаючи кожне з рівнянь як рівняння тільки з однією невідомою.

Перетворення систем лінійних рівнянь можна інтерпретувати відповідними перетвореннями їх матриць і навпаки. Метод Гауса ґрунтується на елементарних перетвореннях розширеної матриці системи і здійснюється за два кроки.

Перший крок (*прямий хід методу Гауса*): за системою лінійних рівнянь складаємо розширену матрицю $\widetilde{A}$ і з допомогою елементарних перетворень приводимо її до еквівалентної ступінчатої матриці $S_{\widetilde{A}}$. Порівнюючи ранги $r(A)$ та $r(\widetilde{A})$, робимо висновок про сумісність або несумісність системи. Якщо система є сумісною (при $r(A) = r(\widetilde{A})$), то переходимо до другого кроку.

Другий крок (*обернений хід методу Гауса*): від знайденої ступінчатої матриці $S_{\widetilde{A}}$ повертаємось до відповідної системи лінійних рівнянь (ця система також буде ступінчатою). Піднімаючись знизу вгору, послідовно розв'язуємо рівняння системи відносно базисних змінних. При $r(A) = r(\widetilde{A}) = n$ (n − кількість невідомих) система матиме єдиний розв'язок. У випадку $r(A) = r(\widetilde{A}) < n$ вона матиме нескінченну кількість розв'язків, базисні невідомі будуть функціями від вільних і при цьому кожна із вільних невідомих може приймати довільне значення.

Приведення матриці до ступінчатого вигляду можна реалізувати, застосовуючи переставлення рядків та операцією утворення нулів у стовпці під опорним елементом.

Процедура утворення нулів у стовпці опорного елемента

Якщо a_{pq} є опорним елементом p-го рядка матриці $\widetilde{A}$ ($a_{pq} \neq 0$), то для утворення нулів у стовпці цього елемента треба з рядками матриці $\widetilde{A}$ виконати такі елементарні перетворення: 1) p-й рядок поділити на елемент a_{pq}; 2) від кожного i-го рядка ($\forall i \neq p$) відняти добуток його елемента a_{iq} із раніше поділеним p-м рядком (a_{iq} отримуєм як елемент i-го рядка, що міститься у спільному стовпці з опорним елементом a_{pq}).

При застосуванні цієї процедури отримаємо еквівалентну до $\widetilde{A}$ матрицю $\left(a'_{ij}\middle|b'_j\right)_{mxn}$, елементи якої обчислюються за формулами:

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}},\ b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}},\ a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{pq} - a_{pj}a_{iq}}{a_{pq}},\ b'_i = \frac{b_i a_{pq} - b_p a_{iq}}{a_{pq}}\ \ (i = \overline{p;m}\ ,\ j = \overline{q;n}). \quad (24)$$

Зауваження 1. Обчислення спрощуються, якщо a_{pq} = 1. Тому перед застосуванням процедури буває корисним операціями з рядками перетворити цей елемент в одиницю.

Зауваження 2. Покладаючи у формулах (24) $i = \overline{p;m}$, $j = \overline{q;n}$, можна перейти від методу Гауса до його модифікації у метод Жордана-Гауса. Останній вимагає більшого обсягу обчислень при користуванні формулами (24), зате не потребує виключення виразів базисних змінних на оберненому ході методу Гауса. При розв'язуванні за методом Жордана-Гауса у кожному опорному стовпці ненульовим має бути лише опорний елемент, до всіх інших (як нижче, так і вище опорного елемента) треба застосувати процедуру утворення нулів.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Знайти ранг $r(A)$ матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ двома способами: 1) дослідженням порядків ненульових мінорів, 2) приведенням матриці до ступінчатого вигляду.

Розв'язання: 1) Встановимо найвищий з порядів серед усіх ненульових мінорів матриці *A*. Матриця складається з 9-ти елементів, тобто мінорів 1-го порядку; серед них є ненульові: a_{11} = 5, a_{12} = 2 і т.д. (достатньо хоча б одного). Тому $r(A) \geq 1$. Матриця має 9 мінорів 2-го порядку, серед них є ненульові (так, ненульовим є мінор $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$). Тому $r(A) \geq 2$. У матриці є єдиний мінор 3-го порядку, тобто визначник самої матриці *A*, який дорівнює нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$ $5\cdot2\cdot2 + 2\cdot3\cdot(-1) + 7\cdot1\cdot3 - 7\cdot2\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot3 = 0$. Тому $r(A) < 3$. Оскільки серед ненульових мінорів матриці *A* найвищий порядок мають мінори 2-го порядку, то $r(A) = 2$.

2) Приведемо матрицю *A* до ступінчатого вигляду. Процес приведення можна починати вже з першого рядка, вибравши в якості опорного елемент a_{11} = 5. Поділимо перший рядок на 5, вислідний рядок віднімемо від другого і додамо до третього рядка матриці *A*, отримаємо еквівалентну їй матрицю з нулями у

стовпці під опорним елементом: $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 1{,}4 \\ 0 & 1{,}6 & 1{,}6 \\ 0 & 3{,}4 & 3{,}4 \end{pmatrix}$. Поділивши другий стовпець на 1,6 і віднявши від третього, поділеного на 3,4, приходимо до ступінчатої матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 1{,}4 \\ 0 & 1{,}6 & 1{,}6 \\ 0 & 3{,}4 & 3{,}4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & 1{,}4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_A.$$

Таким чином, встановлено, що матриця A еквівалентна ступінчатій матриці S_A з двома ненульовими рядками. Тому (за властивістю ранга, у підтвердження вже встановленого) $r(A)=2$.

Відповідь: $r(A)=2$.

Приклад 2. Розв'язати за методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=6, \\ 4x_1+6x_2-7x_3=10, \\ 3x_1+5x_2-5x_3=0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Перший крок (*прямий хід методу Гауса*). Складемо розширену матрицю $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 6 \\ 4 & 6 & -7 & 10 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Елементарними перетвореннями рядків приведемо її до ступінчатого вигляду. Зробимо попередні перетворення: такі, щоб опорний елемент у першому рядку став одиницею. Від третього рядка віднімемо перший, переставивши ці рядки, матимемо:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 6 \\ 4 & 6 & -7 & 10 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 4 & 6 & -7 & 10 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

(застосуємо процедуру утворення нулів у стовпці під опорним елементом першого рядка: помноживши перший рядок на 4 та 2, віднімемо відповідно від другого та третього):

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 34 \\ 0 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

(віднявши другий рядок від третього, отримаємо ступінчату матрицю)

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -6\\ 0 & 2 & 1 & 34\\ 0 & 0 & 0 & -16\end{array}\right)=\mathrm{S}_{\widetilde{A}}.$$

Оскільки у матриці S_A є тільки два ненульових рядки, а у матриці $\mathrm{S}_{\widetilde{A}}$ їх три, то справджується $r(A) = 2 \neq r(\widetilde{A}) = 3$ і за теоремою Кронекера-Капеллі система не має розв'язків (є несумісною).

Другий крок (*обернений хід методу Гауса*). Потреба у здійсненні другого кроку тут відпадає.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 3. Розв'язати за методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 = 3,\\ x_1 + x_2 = -1,\\ 2x_1 + 3x_2 = -3,\\ 5x_1 - 4x_2 = 4.\end{cases}$$

Розв'язання:

Перший крок (*прямий хід методу Гауса*). Складемо розширену матрицю $\widetilde{A}$ системи і елементарними перетвореннями рядків приведемо її до ступінчатого вигляду:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 0 & -3\\ 5 & -4 & 0 & 4\end{array}\right)\leftrightarrow$$

(переставимо перший та другий рядки, опорним елементом у першому рядку зробимо одиницю):

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 0 & -3\\ 5 & -4 & 0 & 4\end{array}\right)\leftrightarrow$$

(застосуємо процедуру утворення нулів у стовпці під опорним елементом: помножимо перший рядок на 3, 2, 5 і віднімемо від другого, третього та четвертого рядків відповідно)

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -4 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -9 & 0 & 9\end{array}\right)\leftrightarrow$$

(переставимо другий та третій рядки)

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \end{array}\right)\leftrightarrow$$

(застосуємо процедуру утворення нулів під опорним елементом другого рядка: помноживши другий рядок на 4 та 9, додамо до третього та четвертого)

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)= \mathrm{S}_{\widetilde{A}}.$$

Отримали ступінчату матрицю, $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3 = n$ (n − кількість невідомих). За теоремою Кронекера-Капеллі система має розв'язок.

Другий крок (*обернений хід методу Гауса*). Від матриці $\mathrm{S}_{\widetilde{A}}$ повернемось до відповідної системи рівнянь, розв'язуємо її, рухаючись у напрямку від останнього рівняння до першого:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ \quad x_2 = -1, \\ \quad x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $(0,\ -1,\ 2)$.

Приклад 4. Розв'язати за методом Гауса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

Розв'язання:

Перший крок (*прямий хід методу Гауса*). Складемо розширену матрицю $\widetilde{A}$ системи і елементарними перетвореннями рядків приведемо її до ступінчатого вигляду:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)\leftrightarrow$$

(віднімемо від другого рядка перший, а потім переставимо рядки)

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)\leftrightarrow$$

(застосуємо процедуру утворення нулів під опорним елементом другого рядка)

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{S}_{\widetilde{A}}.$$

Отримали ступінчату матрицю, $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < n = 4$. За теоремою Кронекера-Капеллі система має нескінченну кількість розв'язків.

Другий крок (*обернений хід методу Гауса*). Від матриці $S_{\tilde{A}}$ повернемось до відповідної системи рівнянь, розв'язуємо її, рухаючись у напрямку від останнього рівняння до першого:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ \quad 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно базисних змінних x_1, x_2, знайдемо:

$$x_2 = \frac{1}{3}(3 + 5x_3 + x_4),\ x_1 = \frac{1}{3}(6 - x_3 - 2x_4).$$

Тут x_3 та x_4 − вільні змінні, їм можна надавати яких завгодно значень і за наведеними вище формулами обчислювати відповідні їм значення x_1та x_2, а, отже, і розв'язки (x_1, x_2, x_3 , x_4) системи. Оскільки змінним x_3 та x_4 можна надати нескінченну кількість значень, то (як вже зазначалося) система має нескінченну кількість розв'язків.

Відповідь: $\left(\dfrac{3 + 5x_3 + x_4}{3},\ \dfrac{6 - x_3 - 2x_4}{3},\ x_3,\ x_4 \right)$ $(\forall x_3, x_4 \in R)$.

Задача 8. Довести, що вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}$ за цим базисом.

А. Теоретичні відомості

Означення 1. **Вектором** називається напрямлений відрізок, одна **з** граничних точок якого називається **початком,** а інша − **кінцем**. Для різних векторів застосовують позначення $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, тощо. Вектор з початком A і кінцем B позначається через $\overline{AB}$.

Модулем (довжиною) вектора називається відстань між його початком та кінцем. Модулі векторів $\overline{a}, \overline{AB}, \ldots$ позначають через $|\overline{a}|, |\overline{AB}|, \ldots$

Нульовим називається вектор $\overline{0}$, модуль якого дорівнює нулю.

Одиничним називається вектор, модуль якого дорівнює одиниці.

Компланарними називаються вектори, які містяться у спільній площині або у паралельних площинах.

Колінеарними називаються вектори, які містяться на спільній прямій або на паралельних прямих. Колінеарність векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ позначається символом $\overline{a} \| \overline{b}$.

Протилежним до $\overline{a}$ називається вектор ($-\overline{a}$), який задовольняє таким умовам: 1) $|-\overline{a}| = |\overline{a}|$, 2) $(-\overline{a}) \| \overline{a}$, 3) вектори ($-\overline{a}$) і $\overline{a}$ мають протилежні напрямки.

Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називаються **рівними,** і пишуть $\overline{a} = \overline{b}$**,** якщо виконуються умови: 1) $|\overline{a}| = |\overline{b}|$, 2) $\overline{a} \| \overline{b}$, 3) $\overline{a}$ та $\overline{b}$ мають спільний напрямок.

У кожній точці можна побудувати вектор, рівний даному.

Лінійні операції з векторами

Сумою векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ називається вектор $\overline{a}+\overline{b}$, направлений з початку вектора $\overline{a}$ в кінець вектора $\overline{b}$, якщо початок $\overline{b}$ збігається з кінцем вектора $\overline{a}$.
Різницею $\overline{a}-\overline{b}$ **векторів** $\overline{a}$, $\overline{b}$ називається сума векторів $\overline{a}$ і $-\overline{b}$.
Добутком $\lambda\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ **на число** λ називається вектор, що має такі властивості: 1) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$; 2) $(\lambda\overline{a})\|\overline{a}$, 3) при $\lambda>0$ напрямки векторів $\overline{a}$ і $\lambda\overline{a}$ однакові; при $\lambda<0$ − протилежні; при $\lambda=0 \Rightarrow \lambda\overline{a}=\overline{0}$.
Зауваження 1. Вектор $-\overline{a}$ (протилежний до $\overline{a}$ має властивості: 1) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$; 2) $-\overline{a}=(-1)\ \overline{a}$).
Зауваження 2. Ненульові вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли при деякому λ має місце рівність:

$$\overline{a}=\lambda\overline{b}. \tag{25}$$

Означення 2. Вектор $\overline{b}$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_k}$, якщо його можна подати у вигляді:

$$\overline{b}=\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\cdots+\lambda_k\overline{a_k},$$

де $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$ − деякі числа, що називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Означення 3. **Вектори** $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_k}$ називаються **лінійно незалежними**, якщо векторна рівність з числовими множниками $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$:

$$\lambda_1\overline{a_1}+\lambda_2\overline{a_2}+\cdots+\lambda_k\overline{a_k}=\overline{0} \tag{26}$$

можлива лише у випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 =\ldots = \lambda_k = 0$.
Вектори $\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots,\overline{a_k}$ називаються **лінійно залежними**, якщо векторна рівність (26) можлива у випадку, коли серед чисел $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_k$ є відмінні від нуля.
Означення 3. **Базисом** деякого простору R називається довільна впорядкована система лінійно незалежних векторів $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}$ цього простору, якщо кожен вектор $\overline{a}\in R$ можна подати лінійною комбінацією:

$$\overline{a}=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+\cdots+a_n\overline{e_n}. \tag{27}$$

Розмірністю простору R називається кількість базисних векторів у довільному базисі цього простору. Простір з розмірністю n позначається через R_n.

Базиси можна змінювати, але кількість базисних векторів у кожному з базисів простору R залишається незмінною.

Формула (27) називається формулою розкладення вектора $\overline{a}$ у базисі $\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n}$, числа a_1, $a_2,\ldots$, a_n − **координатами вектора** $\overline{a}$ у цьому базисі. Формулу (27) можна подати більш стисло у **координатній формі** (з допомогою матриці- рядка або матриці-стовпця):

$$\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ або } \overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Лінійні операції з векторами у координатній формі здійснюються так само, як із матрицями.

Базисом на площині (у просторі R_2) називається впорядкована пара лінійно незалежних (неколінеарних) векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}$. Будь-який вектор $\overline{a}$ площини можна розкласти за базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}$:

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2}.$$

Базисом у просторі (у просторі R_3) називається впорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. Будь-який вектор $\overline{a}$ простору можна розкласти за базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$:

$$\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}.$$

Прямокутною декартовою системою координат у просторі називається сукупність точки O (початку координат) і базисних векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ (трьох взаємно перпендикулярних одиничних векторів) зі спільним початком у точці O; напрямки векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ співпадають відповідно з напрямками осей Ox, Oy, Oz координатної системи $Oxyz$.

Надалі всі вектори задаватимемо у прямокутній декартовій системі координат.

Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Довести, що вектори $\vec{p} = (3; -5; 2), \vec{q} = (4; 5; 1), \vec{r} = (-3; 0; -4)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x} = (-4; 5; -16)$ за цим базисом.

Розв'язання. Вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ утворюють базис у просторі R_3 тільки тоді, коли вони лінійно незалежні. За формулою (26) це означає, що рівність $\lambda_1\overline{p} + \lambda_2\overline{q} + \lambda_3\overline{r} = \overline{0}$ повинна виконуватись лише у єдиному випадку: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Цю рівність подамо у матричній формі (з матрицями-стовпцями (28)) і зведемо до системи лінійних рівнянь:

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ -5\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -95 \neq 0$, а $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то за правилом Крамера ця система має єдиний розв'язок: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Таким чином, доведено, що вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ є лінійно незалежними і утворюють базис. Для розкладення вектора $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ шукатимемо цей вектор як лінійну комбінацію $\vec{x} = x_1\vec{p} + x_2\vec{q} + x_3\vec{r}$ з невідомими коефіцієнтами x_1, x_2, x_3 − координатами вектора $\vec{x}$ у цьому базисі. Як і раніше, від розкладення у векторній формі перейдемо до розкладення у скалярній формі і до відповідної системи лінійних рівнянь:

$$\vec{x} = x_1\vec{p} + x_2\vec{q} + x_3\vec{r} \Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4, \\ -5x_1 + 5x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -16. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему за правилом Крамера, матимемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -95, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 \\ 5 & 5 & 0 \\ -16 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -95, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & -16 & -4 \end{vmatrix} = -190,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -16 \end{vmatrix} = -475 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

Отримані значення x_1, x_2, x_3 дозволяють знайти потрібне розкладення:

$$\vec{x} = \vec{p} + 2\vec{q} + 5\vec{r}.$$

Відповідь: $\vec{x} = \vec{p} + 2\vec{q} + 5\vec{r}$.

Задача 9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a} = (x; a_2; a_3)$ і $\vec{b} = (b_1; y; b_3)$ так, щоб вектори $\vec{c}_1 = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = \lambda_3\vec{a} + \lambda_4\vec{b}$ були колінеарними.

А. Теоретичні відомості

Ненульові вектори $\vec{c}, \vec{d}$ є колінеарними тоді і тільки тоді, коли вони вони зв’язані співвідношенням: $\vec{c} = \lambda\vec{d}$. У координатній формі це формулюється так: для колінеарності векторів $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ та $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ необхідно й достатньо, щоб їх координати були пропорційними, тобто мали місце рівності :

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3}. \tag{29}$$

Б. Методика розв’язування задач

Приклад 1. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a} = (x; -4; 2)$ і $\vec{b} = (2; y; -1)$ так, щоб вектори $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{b} - 4\vec{a}$ були колінеарними.

Розв’язання. Виразимо координати векторів $\vec{c}$, $\vec{d}$ через координати та $\vec{b}$:

$$\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b} \Leftrightarrow 3\begin{pmatrix}x\\-4\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\y\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-4\\-12-2y\\8\end{pmatrix},$$

$$\vec{c}=\vec{b}-4\vec{a} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\y\\-1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}x\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4x\\y+16\\-9\end{pmatrix}.$$

За умовою (29) пропорційності координат векторів $\vec{c}$ та $\vec{d}$ отримаємо співвідношення: $\dfrac{3x-4}{2-4x}=\dfrac{-12-2y}{y+16}=\dfrac{8}{-9}$. Звідси виводимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{3x-4}{2-4x}=\dfrac{8}{-9},\\ \dfrac{-12-2y}{y+16}=\dfrac{8}{-9}.\end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно невідомих x, y, знаходимо:

$$\begin{cases}-9(3x-4)=8(2-4x),\\ 9(12+2y)=8(y+16)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4,\\ y=2.\end{cases}$$

Відповідь: $x=-4$, $y=2$.

Задача 10. Застосування векторної алгебри до задач аналітичної геометрії.

А. Теоретичні відомості

Координати вектора $\overline{AB}$ з початком в точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем в точці $B(x_2; y_2; z_2)$ визначаються як різниці координат кінця і початку:

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;\ \ y_2-y_1;\ \ z_2-z_1).$$

Довжина (модуль) вектора $\overline{AB}=(x; y; z)$ знаходиться за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Означення 1. **Скалярним добутком** $\bar{a}\cdot\bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число, яке позначається через $\bar{a}\cdot\bar{b}$ або $(\bar{a},\ \bar{b})$ та дорівнює добутку модулів векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\varphi.$$

Якщо вектори задані своїми координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{b}$ обчислюється за формулою:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2.$$

Скалярний добуток можна застосувати для знаходження косинуса кута φ між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ за формулою $cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$ або (через координати векторів):

$$\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Якщо $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. Умова перпендикулярності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ у координатній формі:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Означення 2. **Векторним добутком** вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який задовольняє таким умовам:

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярний до обох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;
2) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють праву трійку (з кінця вектора $\overline{c}$ найкоротший поворот φ від вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ видно проти годинникової стрілки);
3) модуль вектора $\overline{c}$ обчислюється за формулою $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$.

Векторний добуток позначається $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ або $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані своїми координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторний добуток $\overline{a} \times \overline{b}$ знаходиться за формулою:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Векторний добуток можна застосувати для обчислення площі трикутника *ABC*, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$$

Означення 3. **Мішаним добутком** трьох впорядкованих векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називається скалярний добуток вектора $\overline{a}$ з векторним добутком $[\overline{b}, \overline{c}]$ векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$. Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ позначається через $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то мішаний добуток $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ обчислюється за формулою:

$$\overline{a} \cdot [\overline{b}, \overline{c}] = \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, знаходиться за формулою

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right|.$$

Рівняння площини в просторі, що проходить через три задані точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Якщо розкрити визначник, то рівняння площини у загальному вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{30}$$

де $\overline{n} = (A, B, C)$ – вектор нормалі до площини.

Канонічне рівняння прямої в просторі, що проходить через задану точку $\mathrm{M}_o(x_0, y_0, z_0)$ паралельно напрямному вектору $\overline{\mathrm{s}} = (1, m, n)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{31}$$

Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Якщо пряма в просторі задана рівнянням (31), а площина α рівнянням (30), то синус кута ψ між ними обчислюється за формулою:

$$\sin\psi = \left| \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right|$$

Якщо пряма паралельна площині, то $Al + Bm + Cn = 0$.

Якщо пряма перпендикулярна площині, то $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

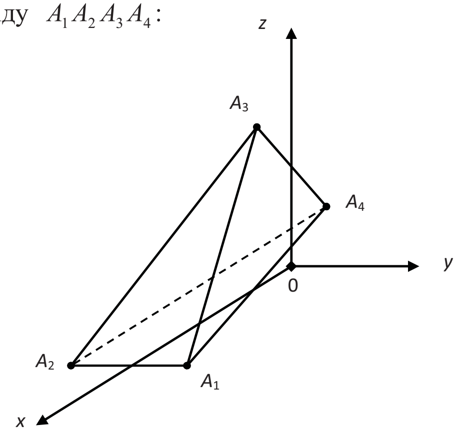
Б. Методика розв'язування задач

Приклад 1. Дано вершини піраміди – точки $A_1(5;1;0)$, $A_2(7;0;1)$, $A_3(2;1;4)$, $A_4(5;5;3)$. Знайти:

1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
2) площу трикутника $A_1A_2A_3$;
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
4) рівняння ребра A_1A_2;
5) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Розв'язання:

Побудуємо піраміду $A_1A_2A_3A_4$:



1) Кут φ між ребрами A_1A_2 та A_1A_3 – це кут між векторами $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_1A_3}$. Знайдемо координати векторів: $\overline{A_1A_2}$ = (7 – 5; 0 – 1; 1 – 0) = (2; –1; 1), $\overline{A_1A_3} = (2-5; 1-1; 4-0) = (-3; 0; 4)$. Косинус кута знайдемо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{2\cdot(-3) + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{-2}{5\sqrt{6}} \approx -0{,}16$$

2) Площу грані $A_1A_2A_3$ обчислимо за формулою $S_{\mathrm{A_1A_2A_3}} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|$, де $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}$ □ векторний добуток векторів $\overline{A_1A_2}$ та $\overline{A_1A_3}$. Матимемо:

$$\overline{A_1A_2} = (2;-1;1),\ \overline{A_1A_3} = (-3;0;4),\ \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - 11\bar{j} - 3\bar{k} = \left(-4;-11;-3\right),$$

$$S_{\mathrm{A_1A_2A_3}} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-11)^2 + (-3)^2} = \sqrt{146} \text{ кв.од.}$$

3) Об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знайдемо за формулою $V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$, де $\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (2;-1;1)$; $\bar{b} = \overline{A_1A_3} = (-3;0;4)$; $\bar{c} = \overline{A_1A_4} = (0;4;3)$. Отримаємо:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 12 - 0 - 32 - 9 = -53 \quad \Rightarrow$$

$$V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| = \frac{1}{6}\left|-53\right| = 8\frac{5}{6} \text{ куб. од.}$$

4) Запишемо рівняння площини $A_1A_2A_3$ як площини, що проходить через задані три точки $A_1(5;1;0)$, $A_2(7;0;1)$, $A_3(2;1;4)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 5 & y - 1 & z - 0 \\ 7 - 5 & 0 - 1 & 1 - 0 \\ 2 - 5 & 1 - 1 & 4 - 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 5 & y - 1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -4(x-5) - 11(y-1) - 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 11y + 3z - 31 = 0.$$

5) Рівняння ребра A_1A_4 складемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A_1(5;1;0)$ і $A_4(5;5;3)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-5}{5-5}=\dfrac{y-1}{5-1}=\dfrac{z-0}{3-0}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{3}$.

6) Знайдемо синус кута ψ між ребром A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$. Зі складених раніше рівнянь ребра та площини, матимемо: $\bar{s}=(l,m,n)=(0;4;3)$, $\bar{n}=(A,B,C)=$ $=(-4;-11;-3)$. Далі за формулою () отримаємо:

$$\sin\psi=\left|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|=\left|\frac{0\cdot(-4)+4\cdot(-11)+3\cdot(-3)}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-11)^2+(-3)^2}}\right|=$$
$$=\left|\frac{-53}{5\sqrt{146}}\right|\approx 0{,}88.$$

Відповідь: 1) $\cos\varphi=-0{,}08$; 2) $S=\sqrt{146}$; 3) $V=8\dfrac{5}{6}$; 4) $4x+11y+3z-31=0$; 5) $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z}{3}$; 6) $\sin\psi=0{,}88$.

ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ №№ 1 – 30

Варіант №1

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n+4}{n^2-n+n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+n^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{x^2-2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{x\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{5x}{x^2-4}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $y=\dfrac{4x-x^2}{4}$ в точці $x_0=2$.

3. Знайти похідні:; 1) $y=\sqrt[4]{x^3-6x}$; 2) $y=tg^5 5x$;

3) $y=\dfrac{\arcsin x}{x+\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\begin{cases} x=\arccos(1/\sqrt{t}) \\ y=\arcsin(1/\sqrt{t}) \end{cases}$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$; 6) $y=x^{\sin x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала: $y=\sqrt[3]{x}$, $x=7{,}76$.

5. Знайти A^2-2A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом і за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=-2, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=-3, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=-1. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3+x_4=-1, \\ -4x_2+5x_3-x_4=3. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;1;2),\vec{q}=(1;0;1),\vec{r}=(-1;2;4)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-2;4;7)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x,y векторів $\vec{a}=(x;-3;1)$ і $\vec{b}=(2;y;4)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{d}=6\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди – точки $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №2

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-1}{8-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-8n+3}-n\sqrt{n(n+5)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}}{x^3+x^2-x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin^3 x-2\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-3)^{\frac{4x-1}{x^2-x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=2x^2+3x-1$ в точці з абсцисою $x_0=-2$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=x^5\cdot\arcsin 4x$; 2) $y=\ln\arcsin 5x$;

3) $y=\dfrac{arcctg\sqrt{x^2-1}}{x}$; 4) $\begin{cases} x=te^{-t}, \\ y=te^{2t} \end{cases}$; 5) $xy=\sin(x+y)$; 6) $y=(arctgx)^x$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x=1{,}58$.

5. Знайти $2A^2+A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом і за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2+2x_3=-1, \\ 4x_1+x_2+4x_3=9. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-3x_4=5, \\ 2x_1-x_2+4x_3-5x_4=13, \\ 3x_2-x_4=9. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;3;0), \vec{q}=(2;-1;1), \vec{r}=(0;-1;2)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(6;12;-1)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;4;-2)$ і $\vec{b}=(1;y;-2)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{d}=2\vec{a}-5\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-10, 5, 8)$, $A_4(5, 2, 4)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №3

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n-4n^3}{4+n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-4)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+tg2x)}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{(3x-2)/(x^2-3x)}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x-x^3$ точці $x_0=-1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=arcctgx/\sqrt{1+x^2}$; 2) $y=\sqrt[5]{x+2x^2}\cdot 3^{-x}$;

3) $y=\sqrt{e^{7x-5}}$; 4) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$;5) $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$; 8) $y=x^{3^x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x+\sqrt{5-x^2}$, $x=0{,}98$.

5. Знайти $2A^2-A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=8, \\ x_1+x_2+2x_3=4, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=9. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=5, \\ 4x_1+4x_2+3x_3=6. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(2;1;-1),\vec{q}=(0;3;2),\vec{r}=(1;-1;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-1;-4;4)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;4;1)$ і $\vec{b}=(1;y;7)$ так, щоб вектори $\vec{c}=5\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №4

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-n-2}{1+2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+2}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{\sqrt{8+x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln(1+x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}(5+2x)^{\frac{x-3}{x^2-4}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=x^2+4\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0=4$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=(4^{2x-1}+3)^5$; 2) $y=\sqrt[3]{6x^2-3x+1}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}}{\ln^2 x}$;

4) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$; 5) $y^2-xy=e^y+x$; 6) $y=\left(\sqrt[5]{x}\right)^{\sqrt{x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27{,}54$.

5. Знайти A^2+2A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=16, \\ 2x_1+3x_2+x_3=11, \\ 5x_1+2x_2+2x_3=12. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=9, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=8, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-14, \\ 3x_1+x_2=10. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(4;1;1), \vec{q}=(2;0;-3), \vec{r}=(-1;2;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-9;5;5)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;2;-3)$ і $\vec{b}=(2;y;-1)$ так, щоб вектори $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{d}=8\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(7, -3, 2)$, $A_4(6, -3, 6)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №5

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3+8n-5}{1+n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\left(e^{3x}-1\right)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin 3x\right)^{ctg 2x}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до лінії $y=x+\sqrt{x^3}$ в точці $x_0=4$.

3. Знайти похідні функцій:1) $y=x^2\cdot e^{1-\cos x}$;2) $y=\sqrt[3]{(1-\sin x)/(1+\sin x)}$;

3) $y=4^{(1+x)arctg\sqrt{x}}$; 4) $\begin{cases} x=\sqrt{t}\sin t, \\ y=t\cos\sqrt{t} \end{cases}$; 5) $x\ln y=\cos\left(xy^2\right)$; 6) $y=\left(\cos x\right)^{\arcsin x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1{,}012$.

5. Знайти A^2-3A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=-1, \\ x_1+2x_3=3, \\ 3x_1+x_2+2x_3=-1. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_3=-2, \\ 5x_1+2x_2+4x_3=6. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(-2;0;1), \vec{q}=(1;3;-1), \vec{r}=(0;4;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-5;-5;5)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x,y векторів $\vec{a}=(x;5;4)$ і $\vec{b}=(5;y;7)$ так, щоб вектори $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, -5, 2)$, $A_2(6, 0, -3)$, $A_3(3, 6, -3)$, $A_4(10, 6, 7)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №6

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-10n^2}{2n^2+3n+9}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3(n+5)}-n^2\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{e^{3x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\left(3-\dfrac{6}{x}\right)^{2x^2/(x-3)}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{x^2}-5$ в точці з абсцисою $x_0=-8$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=x^3\cdot 10^{2x-3}$; 2) $y=arctg\sqrt{\cos 2x}$;
3) $y=2^{\frac{x-\cos x}{\sin x}}$; 4) $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t). \end{cases}$; 5) $xe^y+ye^x=xy$; 6) $y=x^{\frac{2}{x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x^2+7}$, $x=0{,}97$.

5. Знайти $3A^2+A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=3, \\ 5x_1+3x_2-6x_3=25, \\ x_1-2x_2+3x_3=-6. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=1, \\ 5x_1+3x_2-6x_3=4, \\ 2x_1-3x_2-3x_3=1. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(5;1;0), \vec{q}=(2;-1;3), \vec{r}=(1;0;-1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(13;2;7)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;4;-2)$, $\vec{b}=(1;y;-1)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=4\vec{a}+\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(0, -1, 1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(1, -5, 9)$, $A_4(-1, -6, 3)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №7

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n^2+3n}{1+n^2-2n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{ctg 3x}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x})$ в точці з абсцисою $x_0=4$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $(x^3-3x+1)^5$; 2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

3) $y=\sqrt[4]{1-\cos 4x}$;

4) $\begin{cases} x=e^t+e^{-t}, \\ y=e^t-e^{-t}. \end{cases}$; 5) $\dfrac{x}{y}=\ln(xy-5)$; 6) $y=x^{e^x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x}$, $x=26{,}46$.

5. Знайти $3A^2-A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=7, \\ 2x_2+x_3=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3=14. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3+4x_4=1, \\ x_1-x_2+3x_3-5x_4=-3, \\ 2x_1+x_3+3x_4=2. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;1;1), \vec{q}=(-2;0;1), \vec{r}=(3;1;0)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-19;-1;7)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;-2;5)$, $\vec{b}=(3;y;-4)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(5, 2, 0)$, $A_2(2, 5, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(-1, 1, 1)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №8

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+7n-2}{n^2-2n+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2}-\sqrt{n(n-2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x^2-4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{1}{tg 3x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=\sqrt[4]{x}$ в точці з абсцисою $x_0=16$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\sqrt[4]{2x^2-1}\cdot\cos x$; 2) $y=\arccos\sqrt{x}$; 3) $y=3^{ctg\frac{1}{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, \\ y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}. \end{cases}$; 5) $\cos(xy)=\dfrac{y}{x}$; 6) $y=(\ln x)^{\cos x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1{,}97$.

5. Знайти A^2+3A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-8, \\ 5x_1+7x_2-2x_3=-5. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=8. \\ 3x_1+2x_3-4x_4=8. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;0;2), \vec{q}=(0;1;1), \vec{r}=(2;-1;4)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(3;-3;4)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;4;-3)$, $\vec{b}=(2;y;-1)$ так, щоб вектори $\vec{c}=6\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=\vec{a}+3\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(2, 1, -2)$, $A_2(1, 2, 1)$, $A_3(5, 0, 6)$, $A_4(-10, 9, -7)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №9

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-9-n^3}{1+5n^2-n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-x}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{e^{x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 6}(x-5)^{\frac{2x}{x^2-36}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=2x^2-3\sqrt[3]{x}$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти похідні функцій: 1); $y=\sqrt{x}\arccos x^2$; 2) $y=\dfrac{4x}{(2-9x)^4}$;

3) $y=\ln^3(3x-4)$; 4) $\begin{cases} x=tarctgt, \\ y=\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}). \end{cases}$; 5) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=2$; 6) $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x^{11}$, $x=1{,}021$.

5. Знайти A^2-4A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+x_2-2x_3=-6, \\ 2x_1-2x_2+x_3=9. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=9, \\ 3x_2+x_3=-1, \\ 6x_1+7x_2+3x_3=17, \\ 3x_1+x_2=10. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(3;1;0),\vec{q}=(-1;2;1),\vec{r}=(-1;0;2)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(3;3;-1)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;-3;-2)$, $\vec{b}=(1;y;-5)$ так, щоб вектори $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(-2, 0, -4)$, $A_2(-1, 7, 1)$, $A_3(4, -8, 4)$, $A_4(1, 4, 6)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №10

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2n+5}{18-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n-1)(n-2)}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x^2-3x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{e^{3x}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{2x}{x^2-4x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2-\sqrt[4]{3x^3}}{x^2}$ в точці $x_0=3$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=tg(3x^3-5x+2)$; 2) $y=\sin x\cdot tg^3 x$; 3) $y=\arcsin \lg x^2$; 4) $\begin{cases} x=\arcsin\ln t, \\ y=\sqrt[4]{t-1}. \end{cases}$; 5) $x=y+arcctgy$; 6) $y=x^{\arccos x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1{,}21$.

5. Знайти $4A^2-A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-7, \\ x_2+2x_3=1, \\ x_1+4x_3=13. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=15, \\ 3x_1+4x_2+5x_3=12. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(-1;2;1), \vec{q}=(2;0;3), \vec{r}=(1;1;-1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-1;7;-4)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;4;2)$, $\vec{b}=(3;y;-5)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}$ були колінеарними.

9. Вершини піраміди − точки $A_1(14, 4, 5)$, $A_2(-5, -3, 2)$, $A_3(2, 6, -3)$, $A_4(2, 2, -1)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №11

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9+7n+8n^3}{2n^3-n^2-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{n+4n^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-1\right)^2}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\left(3+x\right)^{\frac{5x}{x^2-4}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$ в точці з абсцисою $x_0=64$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\log_4\sqrt[3]{x^5}$; 2) $y=tg4^{5x}$; 3) $\begin{cases} x=2^{4t+5}, \\ y=t^3e^{-t} \end{cases}$

4) $y=(arcctg\sqrt{x})/(x^2+x)$;; 5) $xy=arctg\dfrac{x}{y}$; 6) $y=(\arcsin x)^{2x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x^{21}, x=0{,}998$.

5. Знайти $4A^2+A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=3, \\ 2x_1-3x_2-x_3=1, \\ 3x_1-x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_2+x_3=4, \\ 3x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;1;4), \vec{q}=(0;-3;2), \vec{r}=(2;1;-1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(6;5;-14)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;5;0)$, $\vec{b}=(7;y;3)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=-2\vec{a}+\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$, $A_4(8, 4, -9)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №12

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+8n+2}{4-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-8n+3}-\sqrt{n(n+5)}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}}{x^3-x^2-x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin^3 x-2\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{4}{x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=2^{\arcsin x}$; 2) $y=e^{-x\cos x}$; 3) $y=arctg\dfrac{x}{\sqrt{5-x}}$;

4) $\begin{cases} x=\cos 3t+tgt, \\ y=tg3t-\cos^2 t. \end{cases}$; 5) $x^2y+2xy^2-y^3=10$; 6) $y=x^{\log_3 x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1{,}03$.

5. Знайти A^2+4A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2-2x_3=5, \\ 6x_1-2x_2+7x_3=11. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=6, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-12, \\ 5x_1+7x_2-2x_3=-3. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;-2;0), \vec{q}=(-1;1;3), \vec{r}=(1;0;4)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(6;-1;7)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;0;3)$, $\vec{b}=(1;y;-4)$ так, щоб вектори $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(2, -1, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(-4, 2, 5)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №13

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16n^3-9}{2n^3+3n^2+4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n(n-4)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-x^2}{\sqrt{x+6}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+tg2x)}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{3x-2}{x^2-9}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=2x^2+3$ в точці $x_0=-1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\sqrt[5]{8x-14x^2}$; 2) $y=\ln(3-2x^3)$;

3) $y=ctg\dfrac{x}{\sin x}$; 4) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+4}, \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+4}) \end{cases}$; 5) $3\cos^2(x+y)=8$; 6) $y=(arcctgx)^{x^2}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x^6$, $x=2{,}01$.

5. Знайти $2A^2-3A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=7, \\ x_1+2x_2-x_3=5. \\ 2x_1-5x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=5, \\ -x_2+x_3+4x_4=1. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;0;5), \vec{q}=(-1;3;2), \vec{r}=(0;-1;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(5;15;0)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;7;-1)$, $\vec{b}=(-3;y;2)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}+2\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №14

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n^2+n-4}{2n^2+5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-2n+2}-3n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{\sqrt{7+2x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\ln(1+tgx)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{2x-3}{x^2-4}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\cos\pi x+x\ln x$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=arctg\sqrt{x^3}$; 2) $y=\cos^3(x^2-4x)$;

3) $y=2^x\ln(2^x+2^{-x})$; 4) $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{t^3+5}}{\sin t}, \\ y=\log_4 t. \end{cases}$; 5) $xy=e^{2x}-e^{-3y}$; 6) $y=(\lg x)^{\sqrt[3]{x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8{,}24$.

5. Знайти $2A^2+3A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2-5x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-9x_3=9, \\ 5x_1-x_2-3x_3=8. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=-2, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4=6, \\ x_1+2x_3+5x_4=4. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;1;0), \vec{q}=(0;1;-2), \vec{r}=(1;0;3)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(2;-1;11)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;7;0)$, $\vec{b}=(1;y;4)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+4\vec{b}$ і $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №15

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-4n-6}{16-n^2-n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4-3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-x}}{x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\arcsin 6x)}{x\,tg\,3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg3x)^{ctg\,2x}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{2x^2+1}{x}$ в точці $x_0=0{,}5$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{\ln x+5\sqrt{x}}{\sin x}$; 2) $y=\sqrt{\arccos x^3}$; 3) $\begin{cases}x=\sqrt[4]{\sin 4t},\\ y=\sec t.\end{cases}$;

4) $y=2^{x/\log_2 x}$; 5) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{9}$; 6) $y=x^{arcctg\,4x}$.

4. Обчислити наближено наближено з допомогою диференціала $y=x^7$, $x=1{,}996$.

5. Знайти $3A^2-2A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix}11 & 3 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 7 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=4,\\ 3x_1-x_2+x_3=-2,\\ 4x_1+x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=1,\\ 3x_1+x_2+2x_3=10,\\ 5x_1-3x_2=14,\\ 4x_1-x_2+x_3=13.\end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;0;2), \vec{q}=(-1;0;1), \vec{r}=(2;5;-3)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(11;5;-3)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;2;-3)$, $\vec{b}=(1;y;-2)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}-6\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(5, 9, -8)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №16

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+5}{6n-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-3n}-n^2\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 3x}{e^{3x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}\left(3-\dfrac{4}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x-3}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=(x^4+2)(1+x)$ в точці $x_0=-2$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{tgx+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-\sec x}$; 2) $y=\dfrac{4}{\sqrt[4]{x-x^2}}$;

3) $y=\log_4 x\cdot\cos 3x$; 4) $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2}, \\ y=\arccos\left(t/\sqrt{1+t^2}\right) \end{cases}$; 5) $y=1+xe^y$; 6) $y=(tgx)^{\cos x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x}$, $x=7{,}64$.

5. Знайти $3A^2+2A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 11 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=1, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=5, \\ 7x_1-8x_2+4x_3=-2. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(2;0;1), \vec{q}=(1;1;0), \vec{r}=(4;1;2)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(8;0;5)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;9;-2)$, $\vec{b}=(5;y;3)$ так, щоб вектори $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=-\vec{a}+4\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 5, 7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, 12)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №17

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n^2+5n^3}{n^3-9n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-4n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tg\,4x)}{e^{3x}-e^{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^4+1}$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=2^{x/(1+\ln x)}$; 2) $y=arcctg^2(2/x)$;
3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctg(x/3)}$; 4) $\begin{cases} x=t/\cos 5t, \\ y=tg5t \end{cases}$; 5) $y\ln x-x\ln y=x+y$; 6) $y=(\cos x)^{\ln x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt{4x-1}$, $x=2{,}56$.

5. Знайти $2A^2-4A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:
$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1+5x_2-x_3=3, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=5. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:
$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3=3, \\ x_1+5x_2+8x_3=-3. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;1;3), \vec{q}=(1;2;-1), \vec{r}=(2;0;-1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(3;1;8)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;0;-2)$, $\vec{b}=(6;y;3)$ так, щоб вектори $\vec{c}=5\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-5\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, -4)$, $A_3(5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №18

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3-5n^2}{1-3n-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-2}-n\sqrt{n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x^2-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{x\arcsin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 4x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{x^3+9}{1-5x^2}$ в точці $x_0=-1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=10^{\sin x}$; 2) $y=\sin\left(1+e^{-2x}\right)$;

3) $y=\arcsin\dfrac{3x}{x+1}$; 4) $\begin{cases} x=\cos(4t^2-t^3), \\ y=\dfrac{\ln 6t}{7}. \end{cases}$; 5) $\ln 2x+arctg\dfrac{y}{x}=0$; 6) $y=\sqrt[4]{x}^{\sin x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt{2x^2+x+1}$, $x=1{,}016$.

5. Знайти $2A^2+4A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+x_3=9, \\ x_1+2x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2, \\ x_2+2x_3=0, \\ x_1+4x_2+x_3=2. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;2;-1), \vec{q}=(3;0;2), \vec{r}=(-1;1;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(8;1;12)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;8;3)$, $\vec{b}=(1;y;4)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №19

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+40n+3}{n^3-8}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{e^{4x}-e^{2x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to6}(7-x)^{\frac{2x}{x^2-6x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=6\sqrt[3]{x}-x$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{x}}{\ln x}$; 2) $y=\sqrt[3]{tg^2 x}$; 3) $y=\ln x\cdot 4^{\sqrt{x}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt{(1+ctgt)^3}, \\ y=\arccos t. \end{cases}$; 5) $(x+y)^2=x^3y^3$; 6) $y=(\log_2 x)^{x^2}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8{,}36$.

5. Знайти $4A^2-2A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 11 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=4, \\ 4x_1-5x_2-6x_3=3, \\ 3x_1+x_2-8x_3=0. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ 7x_1+7x_2-x_4=2. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;4;1), \vec{q}=(-3;2;0), \vec{r}=(1;-1;2)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-9;-8;-3)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;-1;6)$, $\vec{b}=(1;y;2)$ так, щоб вектори $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=\vec{a}-5\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №20

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+5n+2}{3-2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n^2}-n\sqrt{(n-1)n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{4-x}}{x^2-3x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\left(e^{arctg\,2x}-1\right)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{1}{3x+2}$ в точці $x_0=2$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\log_5\sqrt[4]{x}$; 2) $y=tg^3\dfrac{3}{x}$; 3) $y=\dfrac{\arccos x^3}{e^x}$;

4) $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}, \\ y=\ln(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}). \end{cases}$; 5) $x+y=e^{x-y}$; 6) $y=(ctgx)^{5x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=4{,}16$.

5. Знайти $4A^2+2A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix}10 & 8 & 9\\ 2 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-2, \\ 2x_1+x_2+3x_3=3, \\ 3x_1+3x_2+2x_3=7. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=4, \\ x_1+3x_3+5x_4=6. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;1;-2), \vec{q}=(3;-1;1), \vec{r}=(4;1;0)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(5;-9;13)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;-2;4)$, $\vec{b}=(7;y;5)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №21

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+9n-18n^3}{2n^3+4n^2+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{2n+4n^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{x^2-x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{x\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ в точці $x_0=-2$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=5^{\sqrt{\log_3 x}}$; 2) $y=\sin(x^2+\sqrt{x})$; 3) $e^{x+y}=\sin xy$;

4) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$; 5) $\begin{cases}x=t^3\arcsin t,\\ y=t^3\ln t.\end{cases}$; 6) $y=(arctgx)^{x^2}$

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x^7$, $x=2{,}002$.

5. Знайти $3A^2-5A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix}3&1&3\\6&2&7\\11&2&12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&5&4\end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3=24,\\4x_1+3x_2+3x_3=20,\\x_1+6x_2+x_3=6.\end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3=-1,\\2x_1+3x_2+x_3=0,\\5x_1+2x_2+2x_3=9.\end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;5;1),\vec{q}=(3;2;-1),\vec{r}=(-1;1;0)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-15;5;6)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;7;0)$, $\vec{b}=(4;y;-1)$ так, щоб вектори $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{d}=5\vec{a}-3\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №22

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-8}-n\sqrt{n(n+5)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{x\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точці $x_0 = 3$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{5\cos x}{x-\ln x}$; 2) $y = arcctg^3\dfrac{1}{x}$; 3) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t/\ln t \end{cases}$;

4) $y = 9^{\sqrt{x}tgx}$; 5) $x^2y^2+2\ln xy = 4$; 6) $y = x^{\arcsin x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt{4x-3}$, $x = 1{,}78$.

5. Знайти $3A^2+5A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 10 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+9x_3=28, \\ 7x_1+3x_2-6x_3=-1, \\ 7x_1+9x_2-9x_3=5. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=8, \\ x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=1. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;0;1), \vec{q}=(0;-2;1), \vec{r}=(1;3;0)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(8;9;4)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;-1;4)$, $\vec{b}=(1;y;-2)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -2, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №23

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n-2n^3}{n^3-5n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+tg2x)}{\sin 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{3x}{x^2-9}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ в точці $x_0=3$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{arctgx+1/\text{x}}{5+e^x}$;2) $y=\left(x^2+5\right)^3$; 3) $y=ctgx\cdot e^{-x^2}$;

4) $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$; 5) $xy+\ln y-2\ln x=0$; 6) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt{x^3}$, $x=0{,}98$.

5. Знайти $5A^2-3A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 10 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 8x_1+4x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+6x_2-2x_3=4, \\ 3x_1+10x_2+x_3=11. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-5, \\ x_2+2x_3=7. \\ x_1+4x_3=14, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(2;1;0), \vec{q}=(1;-1;0), \vec{r}=(-3;2;5)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(23;-14;-30)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;1;-2)$, $\vec{b}=(5;y;7)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, 4)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №24

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{5-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{8+x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{5x}-1\right)^2}{x\arcsin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}\left(3+x\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=2(x+1)\sqrt[3]{x}$ в точці $x_0=8$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{\cos x}{e^{2x}}$; 2) $y=e^{\sqrt[3]{x}}$; 3) $y=\arccos^5 3x$;

4) $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$; 5) $x^2\sin y+\cos y-\cos 2x=0$; 6) $y=x^{e^{-x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x^5$, $x=2{,}997$.

5. Знайти $5A^2+3A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-8, \\ 5x_1+7x_2-2x_3=-5. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-2, \\ 5x_1+7x_2-2x_3=1, \\ 6x_1+9x_2=3. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(2;1;0), \vec{q}=(1;0;1), \vec{r}=(4;2;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(3;1;3)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;5;3)$, $\vec{b}=(7;y;-2)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}+5\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(6, 0, -3)$, $A_4(1, 1, 2)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №25

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^3-8n^2+n-1}{n^2-5n-2n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x^2+2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 5x)^{ctgx}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$ в точці $x_0=-1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{12x^3+4e^x}{\log_2 x}$; 2) $y=x^3 tg 2x$; 3) $y=\sqrt[3]{ctg\dfrac{x}{5}}$;

4) $\begin{cases} x=\sqrt[4]{t+1}, \\ y=t/\sqrt[4]{t+1} \end{cases}$; 5) $e^{y^2}=x^2-y$; 6) $y=5x^{\sqrt{x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x=1{,}03$.

5. Знайти A^2-5A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2+7x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=10, \\ 3x_1+2x_2+5x_3=17. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3+x_4=3, \\ 2x_2-x_3+4x_4=4, \\ x_1+5x_3-7x_4=-5. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;3;1), \vec{q}=(1;-1;2), \vec{r}=(2;-1;0)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-1;7;0)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;2;9)$, $\vec{b}=(0;y;1)$ так, щоб вектори $\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}$ і $\vec{d}=4\vec{a}-3\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(1, -2, 4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №26

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n+3}{n^2+2n-4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{e^{x^2}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5}\left(3-\dfrac{6}{x-2}\right)^{\frac{2x^2}{x-5}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=5-4\sqrt{x^5}$ в точці $x_0=1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{6^x-12}{3\sin x-x}$; 2) $y=2^x\arccos^5 x$; 3) $y=3^{ctg\ln x}$;

4) $\begin{cases} x=5\cos^3 t \\ y=7\sin^3 t \end{cases}$; 5) $e^{-x}\sin y-e^y\cos x=0$; 6) $y=(\ln x)^x$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=x^4$, $x=3{,}998$.

5. Знайти A^2+5A, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=1, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=19. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-2x_2+3x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+4x_2+x_3+10x_4=11. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;-1;2), \vec{q}=(3;2;0), \vec{r}=(-1;1;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(11;-1;4)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;-1;6)$, $\vec{b}=(-1;y;8)$ так, щоб вектори $\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, 5)$, $A_4(3, 1, -4)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №27

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-5n+n^2-n^3}{n-n^2-2n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+2n}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x}{\sin^2 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg 2x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{5x+3\cos x}{3^x-7}$; 2) $y=\sqrt{4+\ln x}\arccos x$;

3) $y=\cos^5(4x+1)$; 4) $\begin{cases} x=2t/(1+t^2), \\ y=(1-t^2)/(1+t^2) \end{cases}$; 5) $\sin\dfrac{x}{y}=e^{xy}$; 6) $y=(\sin 2x)^{\cos x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{1-\sin 3x}$, $x=0{,}02$.

5. Знайти $5A^2-A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6, \\ 4x_1+3x_2-2x_3=-4, \\ -5x_1-4x_2-x_3=-6. \end{cases}$$

7. Розв’язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2+2x_3=2. \\ x_1+5x_2-x_3=5. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;1;4), \vec{q}=(-3;0;2), \vec{r}=(1;2;-1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(-13;2;18)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;0;8)$, $\vec{b}=(-3;y;7)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №28

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n-7}{1-n-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x^2+4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\left(e^{5x}-1\right)}{tg4x\cdot arctgx}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg4x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{3x-2x^3}{3}$ в точці $x_0=-1$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{\cos x+3}{\ln x+5x}$; 2) $y=x^3 arcctg(2x-5)$;

3) $y=\arcsin^5 6x$; 4) $\begin{cases} x=2/\sqrt{\cos 2t}, \\ y=t/\sqrt{\sin 2t} \end{cases}$; 5) $x\ln y-y\ln x=8$; 6) $y=(arctg2x)^{\sin 3x}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0{,}01$.

5. Знайти $5A^2-2A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=6, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=4, \\ 2x_1-x_2+2x_3=8. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;-2;1), \vec{q}=(3;1;-1), \vec{r}=(4;0;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(0;-8;9)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;3;4)$, $\vec{b}=(2;y;0)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}+5\vec{b}$ і $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №29

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-n+7}{1+3n^3+8n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-x}{x^3-27}$; 4) ;$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{tg^2 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 6}(x-5)^{\frac{2x}{x^2-6x}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x/(2x+1)$ в точці $x_0 = 2$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{\sec x-2tgx}{arcctgx}$; 2) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=t^3\sin 3t \end{cases}$; 3) $y=e^{1-\sin^4 x}$;

4) $y=\sqrt{4x^2-2x+5}$; 5) $x^2+y^2=4\sqrt{xy}$; 6) $y=(\sin 3x)^{\sqrt[3]{x}}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt[4]{2-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$, $x=1{,}02$.

5. Знайти $5A^2+A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_3=2, \\ 3x_1+x_2+2x_3=8, \\ 4x_1+x_2+4x_3=10. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(0;1;5), \vec{q}=(3;-1;2), \vec{r}=(-1;0;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(8;-7;-13)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;2;-7)$, $\vec{b}=(5;y;-3)$ так, щоб вектори $\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(-3, 5, 6)$, $A_2(2, 1, 4)$, $A_3(0, 3, -1)$, $A_4(-5, 2, 8)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

Варіант №30

1. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n+1}{2n-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1-3x)}{x\arcsin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -4}(x+5)^{\frac{2x}{x^2-16}}$.

2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}$ в точці $x_0=4$.

3. Знайти похідні функцій: 1) $y=\dfrac{6x^2+\sqrt{x^5}}{\log_4 x}$; 2) $y=\cos\left(2\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)$;

3) $y=4^{x^3\cos x}$; 4) $\begin{cases} x=t/\left(1+t^3\right), \\ y=t^2/\left(1+t^3\right) \end{cases}$; 5) $e^{xy}-x^2+y^2=0$; 6) $y=x^{x^2}$.

4. Обчислити наближено з допомогою диференціала $y=\sqrt{x^2+5}$, $x=1{,}97$.

5. Знайти $2A^2+5A$, AB та BA, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричним способом та за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$$

7. Розв'язати за методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 2x_2+x_3=7, \\ 5x_1+x_2+x_3=10, \\ 7x_1+x_2+2x_3=15. \end{cases}$$

8. Довести, що вектори $\vec{p}=(1;0;1), \vec{q}=(1;-2;0), \vec{r}=(0;3;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{x}=(2;7;5)$ за цим базисом.

9. Визначити невідомі координати x, y векторів $\vec{a}=(x;2;-5)$, $\vec{b}=(1;y;4)$ так, щоб вектори $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ і $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}$ були колінеарними.

10. Вершини піраміди − точки $A_1(2, 4, -3)$, $A_2(5, 6, 0)$, $A_3(-1, 3, 3)$, $A_4(10, -8, 7)$. Знайти: 1) косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_3; 2) площу трикутника $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$; 4) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) рівняння ребра A_1A_4; 6) синус кута між ребром A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$.

ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики.: У 2-х т.; Т.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 338 с.
2. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики.: У 2-х т.; Т.2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
3. Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч.; Ч.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
4. Математичний практикум/ Під ред. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч.; Ч.2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.: Збірник задач – К.: Вища школа, 2001. – 480 с.

Додаткова література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970–1985, т. 1, 2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965–1980.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов./ Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1964–1978.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.–383 с.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.: Ч.1, 2. – М.: Высш. шк., 1986.