МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №2
Для студентів денної форми навчання
за напрямом підготовки 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ – 2013

УДК 51:517
**ВИЩА МАТЕМАТИКА: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №2.** Для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно- інтегровані технології»/ Кільчинський О.О., Крижановська Т.В., Клецька Т.С., Семененко Т.М. – К.: ДЕТУТ, 2013. – 56 с.

В даних методичних вказівках розроблено варіанти розрахункових робіт з математики і методичні рекомендації для їх виконання. Робота призначена для самостійного опрацювання студентами програмного матеріалу за тематикою другого семестру: дослідження функції однієї змінної, функції кількох змінних, інтегральне числення. Самостійна робота з варіантами необхідна для засвоєння всіх зазначених тем на належному рівні.

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики (протокол №2 від 21.09.2012 р.) та на засіданні методичної комісії факультету економіки і менеджменту (протокол №3 від 25.10.2012 р.).
Призначені для студентів денної форми навчання за напрямом 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно - інтегровані технології».

**Укладачі:** *Кільчинський О.О.*, к.ф.-м.н., доцент, *Крижановська Т.В.*, к.ф.-м.н., доцент, *Клецька Т.С.*, к.і.н., доцент, *Семененко Т.М.*, ст. викладач

**Рецензенти:** *Куценко А.Г.*, к.ф.-м.н., доцент,
*Герцій О.А.*, к.т.н., доцент

ЗМІСТ

## Передмова та загальні методичні поради

Методичні вказівки складено для поглиблення засвоєння, набуття навичок самостійної роботи та контролю знань студентів по розділах вищої математики, що вивчаються у 2 семестрі I курсу за спеціальностями АСТЗ та КІКС (напрям підготовки 6.050202, « Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології»). З цією метою розроблено тематику і викладено відповідну методику розв'язування типових задач по всіх варіантах розрахункової роботи. Послідовність розв'зування типових задач співпадає з послідовністю вивчення тем у навчальному курсі і послідовністю задач у варіантах розрахункової роботи.

При виконанні розрахункової роботи студент повинен дотримуватись таких вимог:

1) номер варіанта індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у списку навчальної групи;
2) розрахункова робота виконується на аркушах паперу у форматі А4;
3) перед розв'язуванням кожної задачі повністю переписується її умова і всі конкретні дані до відповідного варіанта;
4) розв'язування кожної задачі повинно супроводжуватись необхідними поясненнями.

Для успішного виконання роботи треба:

1) ознайомитись з наведеним переліком питань з дисципліни «Вища математика» і опанувати відповідний теоретичний матеріал з допомогою конспекта лекцій та рекомендованої літератури;
2) ознайомитись з прикладами розв'язування типових задач до індивідуальних завдань;
3) роботу над варіантами виконувати поетапно протягом всього семестру (в міру проходження відповідних тем лекційних та практичних занять);
4) по завершенні кожного з етапів відповідна частина роботи (що оформлена належним чином) подається на перевірку викладачу;
5) повністю завершену роботу треба здати на перевірку викладачу не пізніше ніж за два тижні до кінця семестру;
6) студенти, які не виконали індивідуальних завдань і не здали роботу вчасно, не допускаються до іспиту з дисципліни як такі, що не виконали навчальний план.

**Питання з дисципліни «Вища математика» (1 курс, ІІ семестр)**

1. Монотонність функцій.
2. Опуклість, вгнутість функцій.
3. Критичні точки. Екстремуми функцій.
4. Знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку.
5. Асимптоти.
6. Повне дослідження функції.
7. Функції кількох змінних. Область визначення.
8. Частинний та повний прирости функції кількох змінних.
9. Частинні похідні функції кількох змінних. Повний диференціал.
10. Диференціювання неявних і складених функцій кількох змінних.
11. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.
12. Функції кількох змінних. Екстремуми та їх необхідна й достатня ознаки.
13. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області.
14. Похідна за напрямом. Градієнт.
15. Первісна та невизначений інтеграл.
16. Невизначений інтеграл та його властивості.
17. Таблиця невизначених інтегралів.
18. Метод безпосереднього (табличного) інтегрування.
19. Методи інтегрування: заміна змінних, внесення під диференціал та інтегрування частинами.
20. Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.
21. Інтегрування раціональних дробів. Розкладання на елементарні дроби.
22. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.
23. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних виразів.
24. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
25. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.
26. Визначений інтеграл. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
27. Формула Ньютона-Лейбніца.
28. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
29. Використання визначеного інтеграла для обчислення площі плоскої фігури.
30. Невласні інтеграли І і ІІ роду. Дослідження їх збіжності.

## 2. Типові задачі та приклади їх розв'язування

**Задача 1.** 1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

*Приклад 1.* Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3+x}}{\cos\frac{\pi}{2}}.$$

*Розв'язання*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3+x}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-\sqrt{3+x}\right)'}{\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3+x}}}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{1}{2\pi}.$$

*Відповідь.* $\frac{1}{2\pi}$.

*Приклад 2.* Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

*Розв'язання*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x\ln x-(x-1)\right)'}{\left((x-1)\ln x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0,5.$$

*Відповідь.*

*Приклад 3.* Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}(x+5)tg\frac{1}{x}.$$

*Розв'язання*

$$\lim_{x\to\infty}(x+5)tg\frac{1}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{tg\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+5}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(tg\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x+5}\right)'}==\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{(x+5)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\frac{(x+5)^2}{x^2}=\left[\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+5)^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^2=1.$$

*Відповідь. 1.*

*Приклад 4.* Знайти границю

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin5x}{\ln tg2x}.$$

*Розв'язання*

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin5x}{\ln tg2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(\ln\sin5x)'}{(\ln tg2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin5x}\cdot\cos5x\cdot5}{\frac{1}{tg2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot2}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\cos5x=1,\\ \lim\limits_{x\to0}\cos2x=1\end{array}\right]=\frac{5}{2}\lim_{x\to0}\frac{tg2x}{\sin5x}=\frac{5}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}=1.$$

*Відповідь. 1.*

**Задача 2.** Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку [a;b].
*Відомості з теорії*. Якщо функція y = f(x) є неперервною на відрізку [a;b], то для знаходження її найбільшого M та найменшого m значень треба:

1) знайти похідну $y'$ функції ;
2) з умов $y'=0$ та $\bar{\exists}y'$ (не існує $y'$) знайти критичні точки функції і відібрати з них лише ті, що містяться на відрізку [a;b];
3) обчислити значення функції f(x) у відібраних критичних точках та на кінцях відрізка (при x = a, x = b), найбільше з цих значень вибрати за M, а найменше – за m.

*Приклад 1.* $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $x\in[0;3]$.

*Розв'язання*

1) Знайдемо похідну:

$$y=(x^2-2x)^{\frac{2}{3}}\to y'=\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{1}{3}}(2x-2)=\frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x(x-2)}}.$$

2) Знайдемо критичні точки:

$$y'=0\to x-1=0\to x_1=1;\ \bar{\exists}y'\to x^2-2x=0\to x_2=0,\ x_3=2.$$

Всі знайдені критичні точки ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$, і $x_3 = 2$) містяться на відрізку [0; 3].

4) Обчислимо значення y(1) = 1, y(0) = 0, y(2) = 0, y(3) = $\sqrt[3]{27}$.Найбільшим з цих значень є число $\sqrt[3]{27}$, найменшим – число 0.

*Відповідь.* M = y(3) = $\sqrt[3]{27}$, m = y(0) = y(2) = 0.

*Приклад 2.* $y = 2\sin^2 x + \cos^3 x$, $x \in \left[ -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$.

*Розв'язання*

1) $y' = 4\sin x \cos x - 3\cos^2 x \sin x = \sin x \cos x\,(4 - 3\cos x)$.

2) $y' = 0 \to \left[ \begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = 0 \end{array} \right. \to x \in \left\{ n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2} \right\},\ n = 0; \pm 1; \pm 2; \cdots$.

На відрізку $\left[ -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$ містяться тільки критичні точки $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

3) Обчислимо значення y(0), $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4+\sqrt{27}}{8} \cong 1{,}15$,

$y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4-\sqrt{27}}{8} \cong -0{,}15$. Найбільшим з цих значень є число 2, найменшим – число $\frac{4-\sqrt{27}}{8}$.

*Відповідь.* $M = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $m = y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4+\sqrt{27}}{8}$.

**Задача 3.** Для заданої функції y = f(x)знайти:

1) область визначення D(f) функції f(x);
2) інтервали монотонності та екстремуми;
3) інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину.

*Відомості з теорії* (до пункту 2 ). **Для знаходження інтервалів монотонності та екстремумів** функції y = f(x) треба:

1. Знайти область визначення D(f) та похідну $y'$.
2. Знайти критичні точки функції f(x) (критичні точки першого роду), тобто точки $x \in D(f)$, в яких $y' = 0$ або $\exists y'$.
3. Критичними точками розбити область D(f) на інтервали, у кожному з інтервалів визначити знак похідної $y'$ (цей знак зберігається сталим протягом усього інтервалу). Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції f(x) за такими правилами: якщо в деякому інтервалі буде $y' > 0$, то функція f(x) на цьому інтервалі зростає, а в разі, коли $y' < 0$, – спадає; якщо при переході праворуч через критичну точку $x_к$ похідна $y'$ змінює знак з «–» на «+», то $x_к$ – точка мінімуму, а якщо з «+» на «–», то $x_к$ – точка максимуму.

<u>Відомості з теорії</u> (до пункту 3 ). **Для знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину** функції y = f(x) треба:

1. Знайти область визначення D(f) та похідні $y'$, $y''$.
2. Знайти критичні точки другого роду функції f(x), тобто точки $x \in D(f)$, в яких $y'' = 0$ або $\exists y''$.

3. Критичними точками другого роду розбити область D(f) на інтервали, у кожному з інтервалів визначити знак похідної $y''$ (цей знак зберігається сталим протягом усього інтервалу). Знайти інтервали опуклості та вгнутості функції f(x) за такими правилами: якщо в деякому інтервалі маємо $y''< 0$, то на цьому інтервалі функція f(x) є опуклою (точки графіка y = f(x) містяться не вище дотичної), а в разі, коли $y''> 0$, – функція f(x) є вгнутою (точки графіка y = f(x) містяться не нижче дотичної); якщо при переході через критичну точку $x_к$ похідна $y''$ змінює знак, то точка $M_к(x_к ; y_к)$ на графіку y = f(x) є точкою перегину.

4.

*Приклад 1.* Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції

$$y = (x - 2)\sqrt[3]{(x+3)^2}.$$

*Розв'язання*

1. Знайдемо область визначення та похідну $y'$:

$$D(f) = R = (-\infty;+\infty),\ y = (x-7)(x+3)^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = (x+3)^{\frac{2}{3}} + (x-7)\cdot\frac{2}{3}(x+3)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$=(x+3)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\frac{x-7}{(x+3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x+3)+2(x-7)}{\sqrt[3]{x+3}} = \frac{5(x-1)}{\sqrt[3]{x+3}}.$$

2. Знайдемо критичні точки функції f(x) (критичні точки першого роду), тобто точки $x \in D(f)$, в яких $y' = 0$ або $\nexists y'$:

$$y' = 0 \rightarrow x - 1 = 0,\ x = 1;\ \nexists y' \rightarrow x + 3 = 0,\ x = -3.$$

Отже, критичних точок дві: $x_1 = -3$ та $x_2 = 1$.

3. Критичними точками розіб'ємо область визначення D(f) на інтервали $I_1 = (-\infty ; -3)$, $I_2 = (-3 ; 1)$ та $I_3 = (1 ; +\infty)$. У кожному з інтервалів дослідимо знак похідної $y'$. Визначимо інтервали монотонності та екстремуми функції. Результати зведемо у таблицю (табл. 1).

В інтервалах $I_1$ та $I_3$ маємо $y'> 0$, тобто функція зростає; в інтервалі $I_2$ маємо $y'< 0$, тобто функція спадає.

При переході через критичну точку $x_1 = -3$ праворуч (з інтервалу $I_1$ до інтервалу $I_2$) похідна $y'$ змінює знак з «+» на «–», тому у цій точці функція досягає свого локального максимуму y(– 3) = 0. При переході через критичну точку $x_2 = 1$ (з інтервалу $I_2$ до інтервалу $I_3$) похідна $y'$ змінює знак з «–» на «+», тому у цій точці функція досягає свого локального мінімуму y(1) = $=-6\sqrt[3]{16}$.

Таблиця 1

| x | $(-\infty ; -3)$ | $-3$ | $(-3 ; 1)$ | 1 | $(1 ; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | $\nexists$ | – | 0 | + |
| y | ↑ | $y_{max} = 0$ | ↓ | $y_{min} = -6\sqrt[3]{16}$ | ↑ |

*Відповідь.* Функція монотонно зростає на інтервалах $(-\infty\,;-3)$ та $(1\,;+\infty)$, монотонно спадає на інтервалі $(-3\,;1)$; $y_{max} = y(-3) = 0$, $y_{min} = y(1) = -6\sqrt[3]{16}$.

*Приклад 2.* Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції

$$y = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 4}.$$

*Розв'язання*

1. Знайдемо область визначення та похідну $y'$: $D(f) = (-\infty;4) \cup (4 + \infty)$;

$$y' = \left(\frac{x^2 + 3x - 3}{x - 4}\right)' = \frac{(2x+3)(x-4) - (x^2 + 3x - 3)}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 9}{(x-4)^2}.$$

2. Знайдемо критичні точки (точки $x \in D(f)$, в яких $y' = 0$ або $\bar{\exists} y'$):

$$y' = 0 \to x^2 - 8x - 9 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 9 \end{array}\right.;\ \bar{\exists} y' \to x - 4 = 0,\ x = 4.$$

Оскільки точка $x = 4$ не належить до області визначення, то критичних точок тільки дві: $x_1 = -1$ та $x_2 = 9$.

3. Критичними точками розіб'ємо область визначення D(f)на інтервали $I_1 = (-\infty\,;1)$, $I_2 = (-1\,;4)$, $I_3 = (4\,;9)$ та $I_4 = (9\,;+\infty)$. У кожному з інтервалів дослідимо знак похідної $y'$. Знайдемо інтервали монотонності та екстремуми функції. Результати зведемо у таблицю (табл. 2).

В інтервалах $I_1$ та $I_4$ маємо $y' > 0$, тобто функція зростає; в інтервалах $I_2$ та $I_3$ маємо $y' < 0$, тобто функція спадає.

При переході через критичну точку $x_1 = -1$ праворуч (з інтервалу $I_1$ до інтервалу $I_2$) похідна $y'$ змінює знак з «+» на «–», тому у цій точці функція досягає свого локального максимуму $y(-1) = 1$. При переході через критичну точку $x_2 = 9$ (з інтервалу $I_3$ до інтервалу $I_4$) похідна $y'$ змінює знак з «–» на «+», тому у цій точці функція досягає свого локального мінімуму $y(9) = 21$.

Таблиця 2

| x | $(-\infty\,;-1)$ | $-1$ | $(-1\,;4)$ | $(4\,;9)$ | 1 | $(9\,;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | – | 0 | + |
| y | ↑ | $y_{max} = 1$ | ↓ | ↓ | $y_{min} = 9$ | ↑ |

*Відповідь.* Функція монотонно зростає на інтервалах $(-\infty\,;-1)$ та $(9\,;+\infty)$, спадає на інтервалах $(-1\,;4)$ та $(4\,;9)$; $y_{max} = y(-1) = 1$, $y_{min} = y(9) = 21$.

*Приклад 3.* Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину функції $y = xe^{-\frac{3}{8}x^2}$.

*Розв'язання*

1. Знайдемо область визначення та похідні $y', y''$: $D(f) = (-\infty;+\infty)$,

$$y' = e^{-\frac{3}{8}x^2} + xe^{-\frac{3}{8}x^2}\left(-\frac{3}{4}x\right) = \left(1-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-\frac{3}{8}x^2},$$

$$y'' = -\frac{3}{2}xe^{-\frac{3}{8}x^2} + \left(1-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-\frac{3}{8}x^2}\left(-\frac{3}{4}x\right) = -\frac{9}{16}x(4-x^2)e^{-\frac{3}{8}x^2}.$$

2. Знайдемо критичні точки другого роду функції f(x), тобто точки $x \in D(f)$, в яких $y'' = 0$ або $\exists y''$:

$$y'' = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 4 - x^2 = 0 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Таким чином, критичних точок три: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$.

3. Критичними точками другого роду розіб'ємо область D(f) на інтервали $I_1 = (-\infty; -2)$, $I_2 = (-2; 0)$, $I_3 = (0; 2)$ та $I_4 = (2; +\infty)$. У кожному з інтервалів дослідимо знак похідної $y''$. Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину кривої y = f(x). Результати зведемо у таблицю (табл. 3).

В інтервалах $I_1$ та $I_3$ маємо $y'' < 0$, крива опукла; в інтервалах $I_2$ та $I_4$ маємо $y'' > 0$, крива вгнута.

Оскільки перехід через кожну з критичних точок $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ супроводжується зміною знаку похідної $y''$, то крива має три точки перегину (т.п.): $M_1(-2; -2e^{-1,5})$, $M_2(0; 0)$, $M_3(2; 2e^{-1,5})$.

Таблиця 3

| x | $(-\infty; -2)$ | $-2$ | $(-2; 0)$ | 0 | $(0; 2)$ | 2 | $(2; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| y | $\cap$ | т.п. $M_1$ | $\cup$ | т.п. $M_2$ | $\cap$ | т.п. $M_3$ | $\cup$ |

*Відповідь.* $(-\infty; -2)$ та $(0; 2)$ – інтервали опуклості; $(-2; 0)$ та $(2; +\infty)$ – інтервали вгнутості; $M_1(-2; -2e^{-1,5})$, $M_2(0; 0)$, $M_3(2; 2e^{-1,5})$ – точки перегину.

**Задача 4.** Знайти частинні похідні та повний диференціал функції z = f(x,y).

*Відомості з теорії.* 1) Частинна похідна $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ знаходиться як звичайна похідна, але у припущенні, що змінна y є сталою; похідна $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ знаходиться у припущенні, що змінна x є сталою. 2) Повний диференціал функції z = f(x,y) знаходиться за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad (1)$$

де *dx*, *dy* – диференціали незалежних змінних.

*Приклад 1.* Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

$$z = \arcsin\frac{y}{x}.$$

*Розв'язання*

1) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arcsin\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\frac{-y}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{-y}{x^2}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{-y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arcsin\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{1}{x}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{1}{x}.$$

2) Застосуємо формулу (1) і знайдемо повний диференціал:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{-y}{x^2}\,dx+\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{1}{x}\,dy=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{xdy-ydx}{x^2}.$$

*Відповідь.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{-y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{1}{x}$, $dz=\frac{xdy-ydx}{|x|\sqrt{x^2-y^2}}$.

**Задача 5.** Знайти похідну функції z = f(x,y) в точці $A(x_0\,;\,y_0)$ за напрямом $\vec{l}=l_x\vec{i}+l_y\vec{j}$.

*Відомості з теорії*. Похідна функції z = f(x,y) в точці $A(x_0\,;\,y_0)$ за напрямом $\vec{l}=l_x\vec{i}+l_y\vec{j}$ знаходиться за формулою

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\cos\beta, \qquad (2)$$

де $\cos\alpha,\cos\beta$ - напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha=\frac{l_x}{\sqrt{l_x^2+l_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{l_y}{\sqrt{l_x^2+l_y^2}}. \qquad (3)$$

*Приклад 1*. Знайти похідну функції z = $y^2e^{xy}$ в точці $A(-3\,;\,1)$ за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}-5\vec{j}$.

*Розв'язання*

1) Знайдемо частинні похідні і обчислимо їх значення в точці $A(-3\,;\,1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y^2e^{xy}\right)'_x=y^2e^{xy}(xy)'_x=y^3e^{xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(y^2e^{xy}\right)'_y=2ye^{xy}+y^2e^{xy}(xy)'_y=\left(2y+y^2x\right)e^{xy},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\left.\left[y^3e^{xy}\right]\right|_A=e^{-3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\left.\left[\left(2y+y^2x\right)e^{xy}\right]\right|_A=-e^{-3}.$$

2) За формулою (3) знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{29}}.$$

3) Застосовуючи формулу (2), знайдемо:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = e^{-3}\frac{2}{\sqrt{29}} - e^{-3}\frac{-5}{\sqrt{29}} = \frac{7}{\sqrt{29}}e^{-3}.$$

*Відповідь.* $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{7}{\sqrt{29}}e^{-3}.$

**Задача 6.** Знайти градієнт функції $z = f(x,y)$ в точці $A(x_0\,;\,y_0)$.

*Відомості з теорії*. Градієнт функції $z = f(x, y)$ в точці $A(x_0\,;\,y_0)$ знаходиться за формулою

$$grad f = \left\{ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A ; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \right\}. \qquad (4)$$

*Приклад 1.* Знайти градієнт функції $z = \sqrt{3+4x^2+6y}$ в точці $A(-5;11)$.

*Розв'язання*

1) Знайдемо частинні похідні і обчислимо їх значення в точці $A(-5;11)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{3+4x^2+6y}\right)'\Big|_x = \frac{4x}{\sqrt{3+4x^2+6y}}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \frac{-20}{13};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{3+4x^2+6y}\right)'\Big|_y = \frac{3}{\sqrt{3+4x^2+6y}}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \frac{3}{13}.$$

2) За формулою (4) отримаємо значення градієнта:

$$grad f = \left\{\frac{-20}{13}\,;\,\frac{3}{13}\right\}.$$

*Відповідь.* $grad f = \left\{\frac{-20}{13}\,;\,\frac{3}{13}\right\}.$

**Задача 7.** Знайти невизначені інтеграли.

*Відомості з теорії*. Основні методи інтегрування умовно поділяються на три типи:

1) безпосереднє інтегрування;
2) інтегрування підстановкою (заміною змінної);
3) інтегрування частинами.

1) **Метод безпосереднього інтегрування** спирається на загальні властивості невизначеного інтеграла та таблицю інтегралів.

*За властивістю лінійності* підінтегральна функція розкладається у суму і вихідний інтеграл подається як лінійна комбінація табличних інтегралів.

*Зауваження.* Незалежно від кількості доданків, на які розкладено підінтегральну функцію, структура невизначеного інтеграла залишається незмінною: кінцевий результат інтегрування повинен містити лише одна довільну сталу, яка вводиться по завершенні останньої операції інтегрування.

*За властивістю інваріантності інтегрування* підінтегральний вираз $f(x)dx$ розкладається у добуток

$$f(x)dx = k\cdot g(u(x))\cdot du(x), \qquad (5)$$

де $k$ – деяка константа, $u = u(x)$ – проміжній аргумент, $du = u'(x)dx$ – його диференціал, а $g(u)$ – функція з табличною первісною $G(u)$:

$$\int g(u)du = G(u) + C.$$

В цьому випадку за властивістю інваріантності інтегрування матимемо:

$$\int f(x)\,dx = k\int g(u(x))du\,(x) = G(u(x)) + C. \qquad (6)$$

*Приклад 1.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + 4\sqrt{x} + 3x^3 + 5x - 7)dx$

*.Розв'язання*

$$\int(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + 4\sqrt{x} + 3x^3 + 5x - 7)dx = \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}} + 4\int\sqrt{x}\,dx + 3\int x^3dx + 5\int xdx - 7\int dx =$$

$$=\int x^{-\frac{5}{3}}dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 3\int x^3dx + 5\int xdx - 7\int dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + 4\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} + 5\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - 7\cdot x + C =$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + 4\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3\cdot\frac{x^4}{4} + 5\cdot\frac{x^2}{2} - 7x + C = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8x\sqrt{x}}{3} + \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} - 7x + C.$$

*Відповідь.* $\mathrm{I} = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8x\sqrt{x}}{3} + \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} - 7x + C.$

*Приклад 2.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int\frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^5} - 10}{5x\sqrt{x}}dx$.

*Розв'язання*

$$\int\frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^5} - 10}{5x\sqrt{x}}dx = \int\frac{2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 10}{5x^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{2}{5}\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{3}{5}\int\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx - 2\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx =$$

$$= \frac{2}{5}\int\frac{dx}{x} - \frac{3}{5}\int x^{\frac{1}{6}}dx - 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{3}{5}\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} - 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{18}{35}\sqrt[6]{x} + 4\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$$

*Відповідь.* $\mathrm{I} = \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{18}{35}\sqrt[6]{x} + 4\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$

*Приклад 3.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int(3 - x^2)^3\,dx$.

*Розв'язання.*

$$\int(3 - x^2)^3\,dx = \int(27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\,dx = 27\int dx - 27\int x^2dx +$$

$$+ 9\int x^4dx - \int x^6dx = 27x - 27\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C =$$

$$= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.$$

*Відповідь.* $\mathrm{I} = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.$

*Приклад 4.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int\frac{x^2}{x^2 - 3}dx$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{x^2}{x^2-3}dx = \int \frac{(x^2-3)+3}{x^2-3}dx = \int\left(1+\frac{3}{x^2-3}\right)dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{3})^2} = x - 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

*Відповідь*. $\mathrm{I} = x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$

*Приклад 5*. Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int \frac{1}{\cos^2(5x+2)}dx$.

*Розв'язання*

В підінтегральній функції введемо проміжний аргумент і знайдемо його диференціал:

$$u(x) = 5x+2, \quad d(5x+2) = (5x+2)'dx = 5dx .$$

Звідси, розв'язуючи відносно $dx$, знайдемо $dx = \frac{1}{5}d(5x+2)$, перетворимо підінтегральний вираз за формулою (5) і скористаємося властивістю інваріантності інтегрування. Результати оформимо у вигляді:

$$\int \frac{1}{\cos^2(5x+2)}\cdot dx = \left| \begin{array}{l} 5x+2 = u(x), \\ d(5x+2) = (5x+2)'dx = 5dx, \\ \frac{1}{5}d(5x+2) = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos^2(5x+2)}\cdot\frac{1}{5}d(5x+2) =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+2)}{\cos^2(5x+2)} = \frac{1}{5}\,tg(5x+2) + \mathrm{C}.$$

*Відповідь*. $\mathrm{I} = \frac{1}{5}\,tg(5x+2) + \mathrm{C}.$

*Приклад 6*. Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+2}}$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-7}} = \left| \begin{array}{c} x-3 = u(x), \\ d(x-3) = (x-3)'dx = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-7}} = \ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2-7}\right| + C = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+2}\right| + C .$$

*Відповідь*. $\mathrm{I} = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+2}\right| + C$

*Приклад 7*. Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int x\cos x^2\, dx$ .

*Розв'язання*

$$\int x\cos x^2\,dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2) = (x^2)'dx = 2x\,dx, \\ \frac{1}{2}d(x^2) = x\,dx \end{array} \right| = \int \cos x^2\cdot\frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int\cos(x^2)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$$

*Відповідь*. $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C.$

*Приклад 8.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int \frac{x^2}{x^3+1}dx$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \left| \begin{matrix} d(x^3+1) = 3x^2dx, \\ \frac{1}{3}d(x^3+1) = x^2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3+1)}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + C.$$

*Відповідь.* $\mathrm{I} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + C$.

*Приклад 9.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int \sqrt{\ln x}\,\frac{dx}{x}$.

*Розв'язання*

$$\int \sqrt{\ln x}\,\frac{dx}{x} = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x} = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}}\,d(\ln x) = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

*Відповідь.* $\mathrm{I} = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$.

*Приклад 10.* Знайти інтеграл $\mathrm{I} = \int ctgx\,dx$.

*Розв'язання.*

$$\int ctgx\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

*Відповідь.* $\mathrm{I} = \ln\left|\sin x\right| + C$.

2) **Інтегрування підстановкою** застосовується для спрощення процедури інтегрування перетворенням підінтегрального виразу через заміну змінної інтегрування. Метод виходить з інваріантності форми інтегрування і вживається двома способами (відповідно до способів введення нової змінної).

*1 спосіб*: нова змінна замінюється функцією від старої змінної (заміна введенням функції під знак диференціала).

Якщо нова змінна $u$ є неперервно диференційовною функцією $u = \varphi(x)$ від старої змінної $x$ і має місце рівність $g(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, то $\int g(x)dx$ можна знайти за формулою:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u = \varphi(x), \\ du = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(u)\,du_{|u=\varphi(x)}, \qquad (7)$$

де в кінцевому результаті (після знаходження невизначеного інтеграла) слід повернутись до старої змінної $x$ з допомогою співвідношення $u = \varphi(x)$.

*2 спосіб*: стара змінна замінюється функцією від нової змінної (заміна виведенням функції за знак диференціала).

Якщо стара змінна $x$ є неперервно диференційовною функцією $x = \psi(t)$ від нової змінної *t*, існує обернена функція $t = \psi^{-1}(x)$ і справджується рівність $f(\psi(t))\cdot\psi'(t) = g(t)$, то $\int f(x)dx$ можна знайти за формулою

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \psi(t), \\ dx = \psi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)\,dt_{|t=\psi^{-1}(x)}, \qquad (8)$$

де в кінцевому результаті (після знаходження невизначеного інтеграла) слід повернутись до старої змінної $x$ з допомогою співвідношення $t=\psi^{-1}(x)$.

*Приклад 11.* Знайти інтеграл I = ∫sin(5x + 7)*dx*.

*Розв'язання*

$$\int \sin(5x+7)dx = \left| \begin{array}{c} u = 5x+7, \\ du = d(5x+7) = (5x+7)'dx = 5dx, \\ \frac{1}{5}du = dx \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \sin u du =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos u + C = -\frac{1}{5}\cos(5x+7) + C.$$

*Відповідь.* $I = -\frac{1}{5}\cos(5x+7) + C$.

*Приклад 12.* Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-\left(x^8\right)^2}} = \left| \begin{array}{c} u = x^8, \\ du = d(x^8) = 8x^7 dx, \\ \frac{1}{8}du = x^7 dx \end{array} \right| = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin u + C = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C.$$

*Відповідь.* $I = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C$.

*Приклад 13.* Знайти інтеграл $I = \int \frac{tgx\,(2+tgx)^9}{\cos^2 x}dx$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{tgx\,(2+tgx)^9}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} u = 2+tgx, \\ du = \frac{dx}{\cos^2 x}, \\ tg\,x = u-2 \end{array} \right| = \int (u-2)\,u^9\,du = \int (u^{10} - 2u^9)\,du =$$

$$= \frac{1}{11}u^{10} - \frac{2}{10}u^{10} + C = \frac{1}{11}(2+tgx)^{10} - \frac{2}{10}(2+tgx)^{10} + C.$$

*Відповідь.* $I = \frac{1}{11}(2+tgx)^{10} - \frac{2}{10}(2+tgx)^{10} + C$.

*Приклад 14.* Знайти інтеграл $I = \int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x+2, \\ d\,u = e^x dx, \\ e^x = u-2 \end{array} \right| = \int \frac{(e^x)^2}{e^x+2}e^x\,dx = \int \frac{(u-2)^2}{u}\,du = \int (u - \frac{2}{u} + \frac{4}{u^2})\,dx =$$

$$= \frac{u^2}{2} - 2\ln|u| - \frac{4}{u} + C = \frac{(e^x+2)^2}{2} - 2\ln(e^x+2) - \frac{4}{e^x+2} + C.$$

*Відповідь*. I = $\frac{(e^x+2)^2}{2} - 2\ln(e^x+2) - \frac{4}{e^x+2} +$ C.

*Приклад 15*. Знайти інтеграл I = $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

*Розв'язання*

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} x = t^3,\ t = \sqrt[3]{x}, \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\sin t}{t^2} 3t^2 dt = 3\int \sin t dt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

*Відповідь*. I = – 3 cos $\sqrt[3]{x}$ + C.

*Приклад 16*. Знайти інтеграл I = $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ .

*Розв'язання*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t,\ t = \arcsin\frac{x}{a}, \\ dx = a\cos t\, dt, \\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\cos t \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\, dt}{a^5\cos^5 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{dt}{\cos^4 t} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \left(1+tg^2 t\right)\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^4}\int\left(1+tg^2 t\right)d\,tgt = \frac{1}{a^4}\left(tg\,t + \frac{1}{3}tg^3 t\right) + C =$$

$$= \left| \begin{array}{c} a\sin t = x,\ a\cos t = \sqrt{a^2-x^2}, \\ tg\,t = \frac{a\sin t}{a\cos t} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{array} \right| = \frac{1}{a^4}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + C.$$

*Відповідь*. I = $\frac{1}{a^4}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(1+\frac{1}{3}\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$ + C.

3) **Інтегрування частинами** застосовують для спрощення знаходження невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ за формулою:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du \qquad (9)$$

(формула інтегрування частинами), де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – неперервно диференційовні функції.

Метод інтегрування частинами застосовується у випадку, коли підінтегральний вираз f(x)dx можна подати у вигляді добутка u(x)·dν(x) таким чином, щоб інтеграл ∫ν·du (з правого боку) знаходився простіше, ніж інтеграл ∫u·dν.

*Зауваження.* За формулою (9) кінцевий результат інтегрування не зміниться, якщо до функції ν(x) додати довільну сталу. Тому при знаходженні функції ν(x) по її диференціалу з усієї множини первісних ν(x) + C = ∫dν звичайно вибирають лише одну (покладаючи, наприклад, C=0).

При інтегруванні деяких функцій інтегрування частинами доцільно застосовувати повторно.

*<u>Деякі рекомендації до інтегрування частинами</u>*

1. При знаходженні інтегралів $\int P_n(x)\begin{bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}dx$, де $k = const$, $P_n(x)-$ многочлен $n$-го степеня, покласти $u = P_n(x)$, $dv = \begin{bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}dx$. Формулу інтегрування частинами застосувати $n$ разів (відповідно до степеня многочлена $P_n(x)$).

2. При знаходженні інтегралів $\int P_n(x)\begin{bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctg\, x \end{bmatrix}dx$, де $P_n(x)-$многочлен $n$-го степеня, слід покласти $u = \begin{bmatrix} \ln x, \\ \arcsin kx \\ arctg\, kx \end{bmatrix}$, $dv = P_n(x)$.

3. При знаходженні інтегралів $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int e^{kx}\cos mx\,dx$, $\int e^{kx}\sin mx\,dx$ тощо після інтегрування частинами треба (при необхідності) розв'язати лінійнийні рівняння відносно невідомих виразів.

*Приклад 17.* Знайти інтеграл I = $\int(3x-2)\cos 5x\,dx$.

*Розв'язання*

$$\int(3x-2)\cos 5x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = 3x-2\ ,\ du = 3dx, \\ dv = \cos 5x,\ v = \int\cos 5x\,dx \overset{C=0}{=} \dfrac{1}{5}\sin 5x \end{array}\right| = (3x-2)\cdot\frac{1}{5}\sin 5x - \int\frac{1}{5}\sin 5x\cdot 3dx =$$

$$= \frac{3x-2}{5}\sin 5x - \frac{3}{5}\int\sin 5x\,dx = \frac{3x-2}{5}\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C.$$

*Відповідь*. I = $\dfrac{3x-2}{5}\sin 5x + \dfrac{3}{25}\cos 5x + C$.

*Приклад 18.* Знайти інтеграл I = $\int(4x-1)\,arctgx\,dx$.

*Розв'язання*

$$\int(4x-1)\,arctgx\,dx = \left|\begin{array}{l} u = arctgx,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = (4x-1)dx,\ v = 2x^2-x \end{array}\right| = arctgx\cdot(2x^2-x) - \int(2x^2-x)\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= (2x^2-x)\,arctg\,x - \int\frac{2x^2-x}{1+x^2}dx = = (2x^2-x)\,arctg\,x - \int\frac{2(x^2+1)-x-2}{1+x^2}dx =$$

$$= (2x^2-x)\,arctg\,x - 2\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} + 2\int\frac{dx}{1+x^2} = (2x^2-x)\,arctg\,x - 2x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2\,arctg\,x +$$
C.

*Відповідь*. I $= (2x^2-x)\,arctg\,x - 2x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2\,arctg\,x + C$.

*Приклад 19.* Знайти інтеграл I = $\int x^2 e^x\,dx$.

*Розв'язання*

$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, du = 2x\,dx, \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{vmatrix} = x^2e^x - 2\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{vmatrix} =$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

*Відповідь*. $I = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

**Задача 8.** Обчислити визначений інтеграл.

*Відомості з теорії*. 1) Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то має місце формула Ньютона – Лейбниця :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$.

2) Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, а функція $x = \varphi(t)$ відображує відрізок $[\alpha;\beta]$ у відрізок $[a;b]$ так, що 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\forall t \in [\alpha;\beta]$ виконується нерівність $a \le \varphi(t) \le b$; 2) функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, то має місце формула заміни змінної:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha, \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

3) Якщо функції $u(x), v(x)$ та $u'(x), v'(x)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

*Приклад 20*. Обчислити інтеграл $I = \int_0^\pi \sin x dx$.

*Розв'язання*

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -[\cos\pi - \cos 0] = -[-1-1] = 2.$$

*Відповідь*. $I = 2$.

*Приклад 21*. Обчислити інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

*Розв'язування*

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

*Відповідь*. $I = \frac{\pi}{4}$.

*Приклад 22*. Обчислити інтеграл $I = \int_1^{e^6} \sqrt{x} \cdot \ln x dx$.

*Розв'язування*

$$\int_1^{e^6}\sqrt{x}\cdot\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x; dv=\sqrt{x}\cdot dx \\ du=\dfrac{dx}{x}; v=\int\sqrt{x}dx=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{array} \right| = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\ln x\Big|_1^{e^6} - \frac{2}{3}\int_1^{e^6} x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\ln x\Big|_1^{e^6} - \frac{2}{3}\int_1^{e^6} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\ln x\Big|_1^{e^6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{e^6} = \frac{2}{3}(e^9\cdot\ln e^6 - \ln 1) - \frac{4}{9}(e^9-1) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot e^9\cdot 6 - 0 - \frac{4}{9}e^9 + \frac{4}{9} = \frac{32}{9}e^9 + \frac{4}{9} = \frac{32e^9+4}{9}.$$

*Відповідь*. $\mathrm{I} = \dfrac{32e^9+4}{9}$.

**Задача 9.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$.

*Відомості з теорії*. Якщо фігура обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямими $x = a, x = b$, то за умови $f_1(x) \le f_2(x)$, її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (10)$$

*Приклад 1.* Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $x - y + 2 = 0$.

*Розв'язування.* Перша лінія є параболою , що розташована гілками вгору, з вершиною в точці О (0;0. Друга лінія є прямою. Визначимо точки перетину ліній і зобразимо фігуру на малюнку (рис.1).

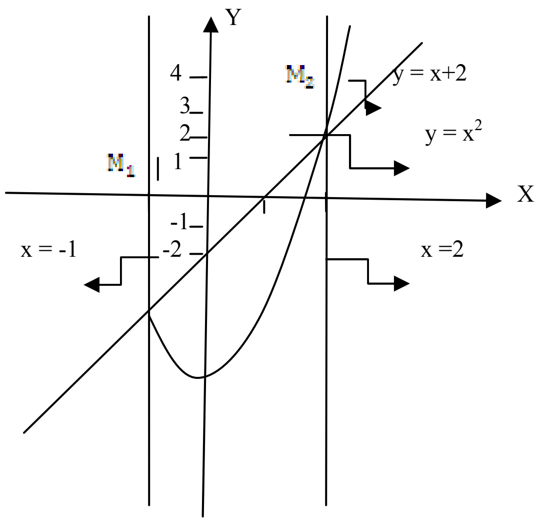


Рис.1

Координати точок перетину знайдемо як розв'язки системи $\begin{cases} y = x^2, \\ y - x - 2 = 0. \end{cases}$ –

Матимемо: $\begin{cases} y = x^2, \\ y - x - 2 = 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ y = x + 2. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 2, \end{array}\right. \\ y = x + 2. \end{cases}$

Отже, лінії перетинаються в точках: $M_1(-1; 1)$ та $M_2(2; 4)$, площу між кривими шукаємо на відрізку $[-1; 2]$ осі О$x$. За формулою (10) знайдемо:

$$S=\int_{-1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=4{,}5\,(\text{од}^2).$$

*Відповідь.* S = 4,5 (од$^2$).

**Задача10.** Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

*Відомості з теорії.* Невласні інтеграли від інтегровної функції $f(x)$ на проміжках $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$ та $(-\infty;+\infty)$ (невласні інтеграли 1-го роду) визначаються за формулами:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx\,,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx\,, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)dx\,, \tag{12}$$

де $c$ – довільне дійсне число.

Якщо якась із цих границь існує і має скінченне значення, то відповідний невласний інтеграл називається збіжним, якщо ця границя не існує або є нескінченною, – інтеграл називається розбіжним. Невласний інтеграл з обома нескінченними межами збігається лише тоді, коли збігаються обидва невласні інтеграли у правій частині формули (12).

2) Якщо функція $f(x)$ не обмежена на відрізку $[a;b]$ , $f(b-0)=\infty$ (має особливу точку $x=b$ – праву межу відрізка), але при кожному $\varepsilon$>0 інтегровна на $[a;b-\varepsilon]$, то символом $\int_{a}^{b} f(x)dx$ позначається невласний інтеграл 2-го роду, який визначається за формулою:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \tag{13}$$

аналогічно, якщо функція $f(x)$ не обмежена на відрізку $[a;b]$ , $f(a+0)=\infty$ (має особливу точку $x=a$ – ліву межу відрізка), але при кожному $\delta$>0 інтегровна на $[a+\delta;b]$, то відповідний невласний інтеграл визначається за формулою

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx\,. \tag{14}$$

Якщо функція $f(x)$ має особливу точку $x = c$ в середині відрізка[a; b], то невласний інтеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ вводиться за формулою:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx\,. \tag{15}$$

Якщо якась з границь (13),(14) існує й має скінченне значення, то відповідний невласний інтеграл називається збіжним; якщо ця границя не існує або є нескінченною – невласний інтеграл називається розбіжним. Невласний інтеграл із особливою точкою $x = c$ в середині відрізка [a; b] збігається лише тоді, коли збігаються обидва інтеграли у правій частині формули (15).

*Зауваження.* Якщо функція $f(x)$ має на відрізку [a; b] особливу точку $x = c$ $(a<c<b)$, але первісна $F(x)$ до функції $f(x)$ є неперервною в цій точці, то

при знаходженні невласного інтеграла 2-го роду можна користуватись звичайною формулою Ньютона – Лейбниця:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

*Приклад 1.* Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

*Розв'язування.* Спершу знайдемо невизначений інтеграл:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}dx = -arctg(\cos x) + C.$$

Далі за формулою (11) для невласного інтеграла 1-го роду матимемо:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-arctg(\cos x)\right)\Big|_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-arctg1 + arctg(\cos a)\right) = -\frac{\pi}{4} + \lim_{a\to-\infty} arctg(\cos a) = \nexists.$$

Оскільки граничне значення не існує, то невласний інтеграл розбігається.

*Відповідь.* $\nexists I$, інтеграл розбігається.

*Приклад 2.* Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

*Розв'язування.* Знайдемо невизначений інтеграл:

$$\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3} = \left| \begin{matrix} d\left(1+x^2\right) = 2xdx, \\ xdx = \frac{1}{2}d\left(1+x^2\right) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-3} d\left(1+x^2\right) = -\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2} + C.$$

Звідси за формулою (11) матимемо:

$$\int_3^{+\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}\right)\Bigg|_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4\left(1+b^2\right)^2} + \frac{1}{400}\right) = \frac{1}{400}.$$

*Відповідь.* $I = \frac{1}{400}$, інтеграл збігається.

*Приклад 3.* Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^x + 5}.$$

*Розв'язування.* Оскільки обидві межі інтегрування є нескінченними, то подамо вихідний інтеграл сумою двох невласних інтегралів за формулою (12) (при $c$=0):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^x+5} = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{e^x+5} + \int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^x+5}. \qquad (16)$$

Як і раніше, спершу знайдемо невизначений інтеграл, а потім повернемось до невласних інтегралів. Матимемо:

$$\int \frac{e^x dx}{e^x+5} = \left| d\left(e^x+5\right) = e^x dx \right| = \int \frac{d\left(e^x+5\right)}{e^x+5} = ln\left(e^x+5\right) + \mathrm{C}.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{e^x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{e^x dx}{e^x+5} = \lim_{a\to-\infty} \ln\left(e^x+5\right)\Big|_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\ln 6 - \ln\left(e^a + 5\right)\right] = \left|\lim_{a\to-\infty} e^a = 0\right| = \ln 6 - \ln 5,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^x + 5} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{e^x dx}{e^x + 5} = \lim_{b\to+\infty} \ln\left(e^x + 5\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(e^b + 5\right) - \ln 6\right] = \left|\lim_{b\to+\infty} e^b = +\infty\right| = +\infty.$$

Оскільки у правій частині (16) один із невласних інтегралів розбігається, то їх сума також розбігається.

*Відповідь.* $I = \infty$, інтеграл розбігається.

*Приклад 4.* Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

*Розв'язування.* Маємо невласний інтеграл 2-го роду з особливою точкою x = 0 в середині відрізка інтегрування [–1; 2]. Спершу знайдемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

Оскільки функція первісна до підінтегральної функції, – функція F(x) = $-e^{\frac{1}{x}}$, не є неперервною в особливій точці, то при інтегруванні по проміжку [–1; 2] звичайною формулою Ньютона – Лейбниця користуватись не можна. Застосовуючи формулу (15) (при c = 0), матимемо:

$$\int_{-1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx + \int_{0}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx. \quad (17)$$

Невласні інтеграли у правій частині цієї рівності розкриєм за формулами (13), (14):

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-e^{\frac{1}{\varepsilon}} + e^{-1}\right) = e^{-1},$$

$$\int_{0}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{\delta\to+0} \int_{0+\delta}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{\delta\to+0}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Bigg|_{\delta}^{2} = \lim_{\delta\to+0}\left(-e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{\delta}}\right) = +\infty.$$

Оскільки один з цих невласних інтегралів розбігається, то їх сума (17) також розбігається.

*Відповідь.* $I = \infty$, інтеграл розбігається.

## ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ № 1 - 30

### Варіант 1

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg2x\cdot\ln tgx)$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-9}{e^{\sqrt{x}}+5}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{100-x^2}\ ,\quad [-6;8].$$

3. Для заданої функції $F(x)=(x-3)\sqrt{x}$ знайти :
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості , вгнутості .
4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції: $z=x^2\ln y+6xy$ .
5. Знайти похідну функції $z=x^2-3xy$ в точці $A(1;2)$ за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}+\vec{j}$ .
6. Знайти градієнт функції $z=arctg(xy)$ в точці A(1;1) .
7. Знайти невизначені інтеграли :

1) $\int\frac{4x^2-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$;  2) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

3) $\int 2^x\cdot\sin xdx$;  4) $\int\sin 4x\cdot\sin 6xdx$.

8.Обчислити інтеграли :

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$;  2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(x^2-3)dx$;  3) $\int\limits_0^6\frac{dx}{\sqrt{4-\frac{x}{2}}}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-8x-4y+16=0\ ,\quad x-2y+8=0\ .$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2dx}{\sqrt{x}}.$$

## Варіант 2

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{2x-3}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{(x+1)(9-x)},\quad [0;7].$$

3. Для заданої функції $F(x)=x+2-2\sqrt{x+2}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.
4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$.
5. Знайти похідну функції $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$.
   в точці А(1; 2) за напрямом вектора $\vec{l}=\vec{i}+4\vec{j}$.
6. Знайти градієнт функції $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точці А(2; 1).
7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{3\sqrt[3]{x^2}-5x}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{e^{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$;

3) $\displaystyle\int\ln x\cdot\sqrt[5]{x^3}\,dx$; 4) $\displaystyle\int\sin 6x\cdot\cos 4x\,dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^8\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln x}}$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\cdot 5^{-x}x\,dx$; 3) $\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x}\,dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-12x-3y+36=0\ ,\quad 2x-y-12=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}.$$

## Варіант 3

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7}{e^{2x}-1}$ .

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=1-x^3-3x^2, \quad [-1;1].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{6}{x\sqrt{4-x^2}}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\sqrt{x^2+3y^2}$ .
5. Знайти похідну функції $z=\ln(e^x+e^y)$ в точці A(0; 0) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}$ .
6. Знайти градієнт функції $z=5x^2y-3xy^3+y^4$ в точці A(2; 2) .
7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{4x^6+5\sqrt[5]{x^2}-14}{x^3}dx$;  2) $\int\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}}dx$;

3) $\int\dfrac{\ln x}{x^5}dx$;  4) $\int\cos 6x\cdot\cos 4x dx$ .

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{x^8+1}dx$;  2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}3^x\cdot\cos x dx$;  3) $\int\limits_0^{1.5}\sqrt[3]{6x-1}dx$

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-6x-y-2=0\ ,\quad x+y+2=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}.$$

## Варіант 4

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-3^x)}{tg2x}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5}{e^{4x}+3}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=2x+3\sqrt[3]{x^2}\ ,\quad [-1.5;8].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\cos 2y}{2}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^2+y^2$ в точці A(3; 2) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=x^2-2xy+3y-1$ в точці A(1; 2).

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{3-6x^7+\sqrt[6]{x^2}}{x^2}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)}dx$;

3) $\displaystyle\int x^2\cdot\sin 4x dx$;  4) $\displaystyle\int\sin^2 10x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^2\frac{e^x+3x^2}{\sqrt{x^3+e^x}}dx$;  2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^x\cdot\sin x dx$  3) $\displaystyle\int_1^{14}\frac{6}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}}dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-8x-3y+16=0\ ,\quad 2x-y-8=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx.$$

## Варіант 5

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{arctg(x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{9x-8}$ .

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = 9\sin x - \sin 3x + 3\,,\quad [-\pi;0].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = y + \dfrac{6}{x} + \dfrac{x}{y}$ .

5. Знайти похідну функції $z = arctg(xy)$ в точці A(2; 2) за напрямом $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$ .

6. Знайти градієнт функції $z = x^3 y + xy^2$ в точці A(1; 3) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{8\sqrt[4]{x^3} - 3x^3}{x}dx$; 2) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

3) $\int 3^x \cdot \cos dx$; 4) $\int \cos^2 6x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 x^2 \ln x dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx$; 3) $\int\limits_0^4 (x^2 - \sqrt{x})^2\, dx$ .

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 - 6x + y - 1 = 0\ ,\quad x + y - 7 = 0 .$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^5} .$$

## Варіант 6

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = 2x^3 + 23x^2 - 12x + 1, \quad [-1;5].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{x^2}{4y}+\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z = x^3 + 3xy - y^2$ в точці A(2; 1) за напрямом $\vec{l} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точці A(0; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{7x^3-2\sqrt[5]{x^3}-1}{x^3}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

3) $\displaystyle\int x\cdot 5^{-x}\,dx$; 4) $\displaystyle\int \sin 8x \sin 2x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x+x\cdot\ln^2 x}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\cdot arctgx dx$; 3) $\displaystyle\int_{-5}^{-1}(x+2)^2\,dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 - 3x - y + 3 = 0\ ,\ \ 5x + y - 6 = 0\ .$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}.$$

## Варіант 7

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sin(x-1)}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{5x}{x^2+1},\quad [0;4].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

$$z=3x+y+4(x^2+y^2-3).$$

5. Знайти похідну функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці А(0; 4) за напрямом $\vec{l}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точці А(4; 3) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{9x^7-3\sqrt[5]{x^2}+5}{x^2}dx$;  2) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

3) $\int(x^2-3)\cdot\sin x dx$;  4) $\int\sin 8x\cdot\cos 2x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{0.5}\frac{\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$;  2) $\int\limits_0^1 x^2\cdot 2^x dx$;  3) $\int\limits_{-1..5}^{-1}(6x+4)^5 dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-4x-4y+4=0\ ,\ \ x-2y+10=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x+4}.$$

## Варіант 8

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{2^{\sqrt{x}}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 2x)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{x^2+5}{x-2},\quad [3;6].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{1}{x^2-6x}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=5x^2+2y^2+\dfrac{6}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^3-xy+y^2$ в точці A(2; 0) за напрямом $\vec{l}=3\vec{i}+5\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці A(3; 2) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{3x^3+\sqrt[3]{x}-7}{x^3}dx$; 2) $\int\dfrac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}}dx$;

3) $\int x^2\cdot\cos 5x dx$; 4) $\int\cos 8x\cdot\cos 2x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{ctg 2x}}{\sin^2 2x}dx$; 2) $\int\limits_{-\ln 2}^{0}x\cdot e^{-2x}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{0.5}\dfrac{12xdx}{(4x-3)^4}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-2x+y+2=0\ ,\quad x-y-4=0\,.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}.$$

## Варіант 9

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^4)}{\sin(\pi x^3)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+4}{e^{\sqrt{x}}+4}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{5-2x}\,,\quad [-2;1].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\sqrt{2x^2+4y}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^2-xy+y^4$ в точці А(0; 2) за напрямом $\vec{l}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=tgx-x+3\sin y$ в точці $A(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4})$.

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{2x^4+7\sqrt[5]{x^2}-6}{x^3}dx$; 2) $\int\cos 6x\cdot\sqrt{\sin 6x}dx$;

3) $\int x^2\cdot\sin 3xdx$; 4) $\int\sin^2 8xdx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^{\ln 0.5}\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+1)\cdot\cos xdx$; 3) $\int\limits_4^{49}(\dfrac{4}{\sqrt{x}}-1)dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2+6x+y-3=0\ ,\quad x-y+9=0\,.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}\,.$$

## Варіант 10

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4arctg(3x-3)}{2^{x-1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 2x}{\ln(e^{2x}-1)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=4x^4-4x^2+2,\quad [-2;1].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{1}{x}-3x^2$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=y^2x-2x+3y+5$.
5. Знайти похідну функції $z=x^4-xy+y^2$ в точці A(1; 2) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$.
6. Знайти градієнт функції $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ в точці A(0; 1).
7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{10x^9+\sqrt[3]{x^2}+2}{x^5}dx$; 2) $\int\dfrac{\sqrt[3]{5+\ln x}}{x}dx$;

3) $\int x^2\cdot arctgx dx$; 4) $\int\cos^2 10x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^{\pi}\dfrac{3x^2+\cos x}{\sqrt{x^3+\sin x}}dx$; 2) $\int\limits_1^3 x^4\cdot\log_3 x dx$; 3) $\int\limits_1^{13}\dfrac{dx}{\sqrt{6x+3}}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-8x-y+16=0,\quad 2x-y+16=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+1}.$$

## Варіант 11

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\cdot\ln tg\frac{x}{2}\right)$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-9}{e^{\sqrt{x}}-5}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{100-x^2}\ ,\quad [-8;6].$$

3. Для заданої функції $F(x)=(x-5)\sqrt{x}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.
4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції: $z=x^3\ln y+5xy$.
5. Знайти похідну функції $z=x^2-3xy$ в точці A(–1; 1) за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}+\vec{j}$.
6. Знайти градієнт функції $z=arctg(xy)$ в точці A(1; 1).
7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{x^8+\sqrt[3]{x^2}+4}{x^2}dx$;  2) $\int\frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$;

3) $\int x^2\cdot e^{-2x}dx$;  4) $\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 x^2\cdot\ln x dx$;  2) $\int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos^2 x dx$;  3) $\int_{\frac{1}{3}}^{3}(3x-1)^3 dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-2x-4y+1=0\ ,\quad x-2y+11=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx.$$

## Варіант 12

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{2x}\right)$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x}+2)}{4x-5}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{(x-1)(5-x)},\quad [1;3].$$

3. Для заданої функції $F(x)=x+3-2\sqrt{x+3}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.
4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\ln\left(5+x^3-y^2\right)$.
5. Знайти похідну функції $z=x^3-2x^2y+xy^2+1$ в точці A(0; 1) за напрямом вектора $\vec{l}=\vec{i}+4\vec{j}$.
6. Знайти градієнт функції $z=\sqrt{8+x^2+y^2}$ в точці A(2; 2) .
7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{5x^7+\sqrt[5]{x^2}-4}{x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{e^x+3x^2}{\sqrt{e^x+x^3}}dx$;

3) $\int x\cdot e^{2x}dx$; 4) $\int\sin 3x\cdot\cos 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}x^2\cdot\sin 3x dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt[7]{\frac{63}{64}}}\frac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}}dx$; 3) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{2}(x-4)^2dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-4x+y-5=0\ ,\quad x+y-5=0\ .$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}\ .$$

## Варіант 13

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7}{e^{2x}+1}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3, \quad [0;4].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{3}{x\sqrt{9-x^2}}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\sqrt{x^2-5y^2}$.

5. Знайти похідну функції $z=\ln(e^{2x}+e^{2y})$ в точці A(0; 0) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=5x^2y-3xy^3+y^4$ в точці A(0; 2).

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{x^3-2\sqrt[3]{x}-7}{x^3}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+x\cdot\ln^2 x}$;

3) $\displaystyle\int x^2\cdot 2^x\,dx$;  4) $\displaystyle\int\cos 3x\cdot\cos 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^1 x\cdot 5^x\,dx$;  2) $\displaystyle\int_1^e\frac{3+5\ln x^2}{x}dx$;  3) $\displaystyle\int_1^2(5x-9)^4\,dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-6x-3y+9=0\ ,\ \ 2x-y-6=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

## Варіант 14

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-4^x)}{tg2x}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5}{e^{3x}+3}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{x^4}{4}-2x^2,\quad [-1;4].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\sqrt[3]{9-x^2}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{\cos 5y}{5}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^2+y^2$ в точці A(–3; –2) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=x^2-2xy+3y-1$ в точці A(–1; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{7x^4-3\sqrt[5]{x^2}+5}{x^3}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{arctg2x}}{1+4x^2}dx$;

3) $\displaystyle\int(1+x)^2\cdot\sin x dx$;  4) $\displaystyle\int\sin^2 3xdx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{10}}x^2\cdot\sin 5xdx$;  2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{20}}\frac{tg^3 5x}{\cos^2 5x}dx$;  3) $\displaystyle\int_{-2.5}^{-2}\frac{8dx}{(2x+3)^3}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-6x+y-1=0,\quad x-y+1=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}.$$

## Варіант 15

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{arctg(x+1)}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{5x+8}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = 9\sin x - \sin 3x + 3, \quad [0;\pi].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = 3y + \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z = arctg(xy)$ в точці A(1; 1) за напрямом $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z = x^3y + xy^2$ в точці A(–1; 2) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{5x^9 - \sqrt[3]{x^2} - 24}{x^5}dx$;   2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{ctg 2x}}{\sin^2 x}dx$;

3) $\displaystyle\int (x^2+1)\cdot\cos x dx$;   4) $\displaystyle\int \cos^2 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$;   2) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\cdot\sqrt{2x^3+8}dx$;   3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4x+5}}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 - 2x + y - 8 = 0, \quad x + y - 4 = 0.$$

10.Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^6}.$$

## Варіант 16

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-1}{2x^2}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{1-e^{\sqrt{x}}}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=x^3+27x^2-24x-6,\quad [0;2].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{x^2}{7y}+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z=2x^2+xy$ в точці A(–1; 2) за напрямом $\vec{l}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=x^3+y^3-3xy$ в точці A(2; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{4x^2-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

3) $\displaystyle\int 2^x\cdot\sin x dx$;  4) $\displaystyle\int\sin 4x\cdot\sin 6x dx$..

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{5^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$;  2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(x^2-3)dx$;  3) $\displaystyle\int_0^6\frac{dx}{\sqrt{4-\frac{x}{2}}}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-8x-4y+16=0,\quad x-2y+8=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{\sqrt{x}}.$$

## Варіант 17

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sin(x+1)}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(e^x+5)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{6x}{x^2-1},\quad [-2;4].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{2x-1}{x-5}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

$$z=5x-y+2\left(x^2-3y^2-3\right).$$

5. Знайти похідну функції $z=arctg\dfrac{x}{y}$ в точці A(–1; 1) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\sqrt{x^2-y^2}$ в точці A(5; 3) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{3\sqrt[3]{x^2}-5x}{\sqrt[3]{x}}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{e^{arctg\,2x}}{1+4x^2}dx$;

3) $\displaystyle\int\ln x\cdot\sqrt[5]{x^3}\,dx$;  4) $\displaystyle\int\sin 6x\cdot\cos 4x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_1^8\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln x}}$;  2) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}x\cdot 5^{-x}xdx$;  3) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x}dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-12x-3y+36=0\ ,\ \ 2x-y-12=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$$

## Варіант 18

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{5^{\sqrt{x}}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 10x)}{\ln(\sin 2x)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{x^2-4x}{x+1},\quad [0;2].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції: $z=7x^2-5y^2-\dfrac{6}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^3y+xy^2$ в точці A(1; 3) за напрямом $\vec{l}=-5\vec{i}+12\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці A(1; 2) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{4x^6+5\sqrt[5]{x^2}-14}{x^3}dx$; 2) $\int\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}}dx$;

3) $\int\dfrac{\ln x}{x^5}dx$; 4) $\int\cos 6x\cdot\cos 4x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{x^8+1}dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}3^x\cdot\cos x dx$; 3) $\int\limits_0^{1.5}\sqrt[3]{6x-1}dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-6x-y-2=0\ ,\quad x+y+2=0 .$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}.$$

## Варіант 19

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(2\pi x^3\right)}{\sin(2\pi x)}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-5}{e^{\sqrt{x}}-4}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{5+3x}\,,\quad [-1;1].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{2x}{(x-3)^2}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{2x+y}{x-y}+e^{2x}$.

5. Знайти похідну функції $z=\ln(2x+3y)$ в точці A(2; 2) за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=tgx-x+3\sin y$ в точці A$(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3})$.

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{3-6x^7+\sqrt[6]{x^2}}{x^2}dx$;  2) $\int\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)}dx$;

3) $\int x^2\cdot\sin 4x dx$;  4) $\int\sin^2 10x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^2\dfrac{e^x+3x^2}{\sqrt{x^3+e^x}}dx$;  2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2^x\cdot\sin x dx$;  3) $\int\limits_1^{14}\dfrac{6}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}}dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-8x-3y+16=0\,,\quad 2x-y-8=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx.$$

## Варіант 20

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4arctg(6x-6)}{4^{x-1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = x^4 + 5x^2 - 6,\quad [-2;2].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{1}{2x}-2x^2$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = e^{xy} + \dfrac{x-1}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z = 5x^2y + 3xy^2$ в точці A(–1; 0) за напрямом $\vec{l} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точці A(2; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли :

1) $\int \dfrac{8\sqrt[4]{x^3}-3x^3}{x}dx$; 2) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

3) $\int 3^x \cdot \cos dx$; 4) $\int \cos^2 6x dx.$

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 x^2 \cdot \ln x dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x \cdot \cos^2 x dx$; 3) $\int\limits_0^4 (x^2 - \sqrt{x})^2 dx$ .

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 - 6x + y - 1 = 0,\quad x + y - 7 = 0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^5}.$$

## Варіант 21

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg2x\cdot\ln tgx)$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+7}{e^{\sqrt{x}}-5}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{144-x^2}\ ,\quad [-6;8].$$

3. Для заданої функції $F(x)=(x+5)\sqrt{x}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Знайти похідну функції $z=\dfrac{3x}{y^2}$ в точці A(3; 4) за напрямом $\vec{l}=-3\vec{i}-4\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=arctg(xy)$ в точці A(1; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{7x^3-2\sqrt[5]{x^3}-1}{x^3}dx$;  2) $\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

3) $\int x\cdot 5^{-x}\,dx$;  4) $\int\sin 8x\cdot\sin 2x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{x+x\cdot\ln^2 x}$;  2) $\int\limits_0^1 x^2\cdot arctgx dx$;  3) $\int\limits_{-5}^{-1}(x+2)^2\,dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-3x-y+3=0\ ,\quad 5x+y-6=0\ .$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}\ .$$

## Варіант 22

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{x}\right)$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\sqrt{x}-1)}{2x+3}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{(x+2)(10-x)},\quad [0;7].$$

3. Для заданої функції $F(x)=x+5-2\sqrt{x+5}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\sqrt{x^2y+\dfrac{x}{y}}$.

5. Знайти похідну функції $z=arctg(xy)$ в точці A(2; 3) за напрямом $\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точці A(2; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{9x^7-3\sqrt[5]{x^2}+5}{x^2}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

3) $\displaystyle\int(x^2-3)\cdot\sin x dx$;  4) $\displaystyle\int\sin 8x\cdot\cos 2x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$;  2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\cdot 2^x dx$;  3) $\displaystyle\int_{-1..5}^{-1}(6x+4)^5 dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-4x-4y+4=0\ ,\quad x-2y+10=0\,.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+4}.$$

## Варіант 23

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-7}{e^{3x}+1}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = 1-2x^3+3x^2,\quad [-1;1].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{6}{x\sqrt{9-x^2}}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\sqrt{5x^2-6y^2}$.

5. Знайти похідну функції $z=\ln(3x^2+2xy^3)$ в точці A(1; 2) за напрямом $\vec{l}=3\vec{i}-4\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=5x^2y-3xy^3+y^4$ в точці A(2; 2) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{3x^3+\sqrt[3]{x}-7}{x^3}dx$;  2) $\displaystyle\int\frac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}}dx$;

3) $\displaystyle\int x^2\cdot\cos 5x dx$;  4) $\displaystyle\int\cos 8x\cdot\cos 2x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{ctg 2x}}{\sin^2 2x}dx$;  2) $\displaystyle\int\limits_{-\ln 2}^{0}x\cdot e^{-2x}dx$;  3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{0.5}\frac{12xdx}{(4x-3)^4}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-2x+y+2=0\ ,\quad x-y-4=0\,.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}.$$

## Варіант 24

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-4^x)}{tg4x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^2-5}{e^{4x}-3}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = x + 3\sqrt[3]{x^2}\ ,\quad [-1{,}5;8].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\sqrt[3]{4-x^2}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}$.

5. Знайти похідну функції $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ в точці A(1; –2) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=x^2-2xy+3y-1$ в точці A(1; 2) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{2x^4+7\sqrt[5]{x^2}-6}{x^3}dx$;   2) $\displaystyle\int\cos 6x\cdot\sqrt{\sin 6x}dx$;

3) $\displaystyle\int x^2\cdot\sin 3xdx$;   4) $\displaystyle\int\sin^2 8xdx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^{\ln 0.5}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;   2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+1)\cdot\cos xdx$;   3) $\displaystyle\int_4^{49}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2+6x+y-3=0\ ,\quad x-y+9=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}.$$

## Варіант 25

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+3}{arctg(x+1)}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{2x})}{5x+8}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y = 9\sin x - \sin 3x + 3,\quad [-\pi;0].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x^3}{x^2-16}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = y^3 + \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{x}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z = 5x^2 - 2xy + y^2$ в точці A(1; 1) за напрямом $\vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z = x^3y + xy^2$ в точці A(1; 3) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{10x^9 + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x^5}dx$;   2) $\int \dfrac{\sqrt[3]{5+\ln x}}{x}dx$;

3) $\int x^2 \cdot arctgx dx$;   4) $\int \cos^2 10x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^{\pi} \dfrac{3x^2+\cos x}{\sqrt{x^3+\sin x}}dx$;   2) $\int\limits_1^3 x^4 \cdot \log_3 x dx$;   3) $\int\limits_1^{13} \dfrac{dx}{\sqrt{6x+3}}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 - 8x - y + 16 = 0,\quad 2x - y + 16 = 0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^3+1}.$$

## Варіант 26

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=4x^3-27x^2+24x-6,\quad [0;2].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^3+3xy-y^2$ в точці A(1; 1) за напрямом $\vec{l}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=x^3+y^3-3xy$ в точці A(2; 1) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{x^8+\sqrt[3]{x^2}+4}{x^2}dx$; 2) $\int\dfrac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$;

3) $\int x^2\cdot e^{-2x}dx$; 4) $\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 x^2\cdot\ln x dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi}\sin x\cdot\cos^2 x dx$; 3) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}(3x-1)^3 dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-2x-4y+1=0\ ,\quad x-2y+11=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_0^{+\infty}x\cdot e^{-x^2}dx.$$

## Варіант 27

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sin(x+1)}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(e^x+5)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{4x}{x^2+1},\quad [-2;4].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

$$z=x+2y+5(x^2+y^2-3).$$

5. Знайти похідну функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці A(3; 4) за напрямом $\vec{l}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\sqrt{x^2-y^2}$ в точці A(5; 3) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{5x^7+\sqrt[5]{x^2}-4}{x^2}dx$;  2) $\int\dfrac{e^x+3x^2}{\sqrt{e^x+x^3}}dx$;

3) $\int x\cdot e^{2x}dx$;  4) $\int\sin 3x\cdot\cos 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}x^2\cdot\sin 3x dx$;  2) $\int\limits_0^{\sqrt[7]{\frac{63}{64}}}\dfrac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}}dx$;  3) $\int\limits_{-3}^{2}(x-4)^2dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-4x+y-5=0,\quad x+y-5=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}.$$

## Варіант 28

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2^{\sqrt{x}}}$;  б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin x)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\frac{x^2-3x}{x+1}, \quad [0;2].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\frac{1}{x^2+4x}$ знайти:
   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=3x^2+4y^2+\frac{6}{y}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^3-xy+y^2$ в точці A(1; 1) за напрямом $\vec{l}=3\vec{i}+5\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці A(1; 2) .

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\frac{x^3-2\sqrt[3]{x}-7}{x^3}dx$;  2) $\int\frac{dx}{x+x\cdot\ln^2 x}$;

3) $\int x^2\cdot 2^x\,dx$;  4) $\int\cos 3x\cdot\cos 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 x\cdot 5^x\,dx$;  2) $\int\limits_1^e\frac{3+5\ln x^2}{x}dx$;  3) $\int\limits_1^2(5x-9)^4\,dx$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-6x-3y+9=0\ ,\quad 2x-y-6=0\,.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

## Варіант 29

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\pi x^3\right)}{\sin(\pi x^2)}$;  б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{e^{\sqrt{x}}+4}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=\sqrt{5-4x}\,,\quad [-1;1].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ знайти:

1) область визначення;
2) екстремуми та інтервали монотонності;
3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z=\sqrt{x^2-4y}$.

5. Знайти похідну функції $z=x^2-xy+y^4$ в точці A(1; 1) за напрямом $\vec{l}=6\vec{i}+8\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=tgx-x+3\sin y$ в точці A$(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3})$.

7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int\dfrac{7x^4-3\sqrt[5]{x^2}+5}{x^3}dx$;  2) $\int\dfrac{\sqrt{arctg2x}}{1+4x^2}dx$;

3) $\int(1+x)^2\cdot\sin xdx$;  4) $\int\sin^2 3xdx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{10}}x^2\cdot\sin 5xdx$;  2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{20}}\dfrac{tg^3 5x}{\cos^2 5x}dx$;  3) $\int\limits_{-2.5}^{-2}\dfrac{8dx}{(2x+3)^3}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-6x+y-1=0\ ,\quad x-y+1=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}.$$

## Варіант 30

1.Застосовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4arctg(5x-5)}{3^{x-1}-1}$;     б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$.

2.Знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку:

$$y=4x^4-2x^2+5,\quad [-2;2].$$

3. Для заданої функції $F(x)=\dfrac{1}{x}-4x^2$ знайти:

   1) область визначення;
   2) екстремуми та інтервали монотонності;
   3) точки перегину та інтервали опуклості, вгнутості.

4. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції: $z=x^2y-x+y+5$.
5. Знайти похідну функції $z=x^4-xy+y^2$ в точці A(1; 2) за напрямом $\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$.
6. Знайти градієнт функції $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ в точці A(2; 1) .
7. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{5x^9-\sqrt[3]{x^2}-24}{x^5}dx$;     2) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{ctg2x}}{\sin^2 x}dx$;

3) $\displaystyle\int(x^2+1)\cdot\cos x dx$;     4) $\displaystyle\int\cos^2 5x dx$.

8.Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$;     2) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2\cdot\sqrt{2x^3+8}dx$;     3) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{4x+5}}$.

9.Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2-2x+y-8=0,\quad x+y-4=0.$$

10.Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^6}.$$

## ЛІТЕРАТУРА

### Основна література


1. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики: У 2-х т.; Т.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 338 с.
2. Крюков М.М., Крижановська Т.В. Курс вищої математики: У 2-х т.; Т.2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
3. Математичний практикум/ Під ред.. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч.; Ч.1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 335 с.
4. Математичний практикум / Під ред.. проф. Крюкова М.М.: У 2-х ч.; Ч.2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – К.: Вища школа, 2001. – 480 с.


### Додаткова література


1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970–1985, т. 1, 2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965–1980.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под ред. Б.П.Демидовича. – М.: Наука, 1964–1978.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.–383 с.
6. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: ч.1, 2. – М.: Высш.шк., 1986.

*Навчально-методичне видання*

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи №2**
**Для студентів денної форми навчання**
**за напрямом підготовки 6.050202**
**«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»**

Укладачі: Кільчинський О.О.,
Крижановська Т.В.,
Клецька Т.М.,
Семененко Т.М.

Відповідальний за випуск – Кільчинський О.О.
Редакція авторська

Підписано до друку 23.11.2012. Формат 60x84/16.
Папір – офсетний. Спосіб друку – ризографія.
Замовлення № 237-2/12 . Наклад 100 примірників.

Надруковано в Редакційно-видавничому центрі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
03049, м. Київ-049, вул. М. Лукашевича, 19