

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ТРАНСПОРТУ**

Кафедра вищої математики



**Т. В. КРИЖАНОВСЬКА
Т. С. КЛЕЦЬКА
Т. М. СЕМЕНЕНКО**

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

**Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 2
для студентів денної форми навчання за напрямками підготовки
6.030509 «Облік і аудит», 6.030508 «Фінанси і кредит»,
6.030504 «Економіка підприємства»**

Київ 2014

Крижановська Т. В., Клецька Т. С., Семененко Т. М.

Математика для економістів: Методичні вказівки для виконання розрахункової роботи № 2 для студентів денної форми навчання за напрямками підготовки 6.030509 «Облік і аудит», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030504 «Економіка підприємства». – К.: ДЕДУТ, 2014. – 36 с.

Методичні вказівки призначені для індивідуальної роботи студентів з математики для економістів. В них наводяться основні типи задач з математики для економістів для студентів I курсу II семестру економічних спеціальностей. На простих прикладах вивчаються найхарактерніші методи розв'язання математичних задач.

Методичні вказівки призначені для студентів всіх форм навчання за напрямками підготовки 6.030509 «Облік і аудит», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030504 «Економіка підприємства».

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 3 від 30.10.2012) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол № 2 від 08.11.2012).

Укладачі: *Т. В. Крижановська*, к. ф.-м. н., професор;
Т. С. Клецька, к. і. н., доцент;
Т. М. Семененко, старший викладач.

Рецензенти: *А. Ю. Андрейцев*, к. ф.-м. н., доцент;
І. К. Сахацька, к. ф.-м. н., доцент

ЗМІСТ

<i>Вступ</i>	4
Методичні рекомендації щодо виконання розрахункової роботи	5
Завдання для самостійної роботи студентів	15
Контрольні питання з дисципліни.....	34
<i>Список рекомендованої літератури</i>	35
<i>Додаток</i>	36

ВСТУП

Методичні вказівки охоплюють основні розділи курсу математики для економістів – студентів денної форми навчання за напрямками підготовки 6.030509 «Облік і аудит», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030504 «Економіка підприємства» за II семестр I курсу. Це – інтегральне числення (невизначений інтеграл, визначений інтеграл та його застосування, подвійний інтеграл), основи теорії рядів та диференціальні рівняння. До цих розділів належать задачі розрахункової роботи № 2. Послідовність номерів задач відповідає послідовності лекцій курсу математики для економістів. Це забезпечує рівномірне завантаження студентів і виконання ними розрахункової роботи протягом семестру, починаючи з першої лекції. Для полегшення орієнтації студентів у курсі математики для економістів та глибшого засвоєння навчального матеріалу перед переліком умов завдань для самостійної роботи студентів наведено методичні рекомендації для розв'язання відповідних задач, а в кінці методичних вказівок – список контрольних питань з теорії, додаток (таблиця інтегралів), а також наведено список рекомендованої літератури.

Розрахункова робота повинна виконуватись на аркушах паперу білого кольору формату А4 на одному боці аркуша відповідно до чинних правил оформлення розрахункових і контрольних робіт. Зворотній бік аркуша використовується для виправлення помилок, а також для можливих допоміжних зауважень, вказівок і пояснень викладача. На титульній сторінці обов'язково має бути вказано назву університету, назву предмета (математика для економістів), номер розрахункової роботи, прізвище та ініціали студента, групу, в якій він навчається, а також прізвище викладача, який перевіряє роботу.

Методичні вказівки містять 30 варіантів розрахункової роботи. Номер варіанта визначається порядковим номером прізвища студента в журналі викладача.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Задача 1. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{(x+2)^2}{x} dx$.

Розв'язання:

Перетворимо спочатку підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x+2)^2}{x} dx = \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{4}{x} \right) dx = \int \left(x + 4 + \frac{4}{x} \right) dx = \int x dx +$$
$$+ \int 4 dx + \int \frac{4}{x} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \ln|x| + C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} + 4x + 4 \ln|x| + C$.

Задача 2. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

Розв'язання:

Скористаємося методом заміни змінних:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} = \int (\cos x)^{-\frac{2}{3}} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int t^{-\frac{2}{3}} dt = -3t^{\frac{1}{3}} + C =$$
$$= -3(\cos x)^{\frac{1}{3}} + C = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$$

Відповідь: $-3\sqrt[3]{\cos x} + C$.

Задача 3. Обчислити невизначений інтеграл $\int x 3^x dx$.

Розв'язання:

Скористаємося формулою інтегрування по частинах $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int x 3^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = 3^x dx & v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right| = \frac{x 3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} dx = \frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx = \frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$$

Відповідь: $\frac{x 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$.

Задача 4. Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx = \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} dx$$

Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} &= \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \frac{C}{x+1} = \frac{(Ax + B)(x+1) + C(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x+1)} = \\ &= \frac{x^2(A+C) + x(A+B-C) + (B+C)}{(x^2 - x + 1)(x+1)} \end{aligned}$$

Отже, $x^2(A+C) + x(A+B-C) + (B+C) = 2x^2 - 3x + 1$.

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ A + B - C = -3 \\ B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

Таким чином, підінтегральний дріб розкладається на суму таких елементарних дробів:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = -\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{x+1}$$

Знайдемо тепер інтеграл від суми дробів:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx &= -\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int \frac{2dx}{x+1} = -\int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + 2\int \frac{d(x+1)}{x+1} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + 2\ln(x+1) + C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + 2\ln(x+1) + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + 2\ln(x+1) + C$.

Задача 5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x=0 \\ t=0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x=4 \\ t=2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} \right) = \\ &= 2(t - \ln|t+1|) \Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3 \end{aligned}$$

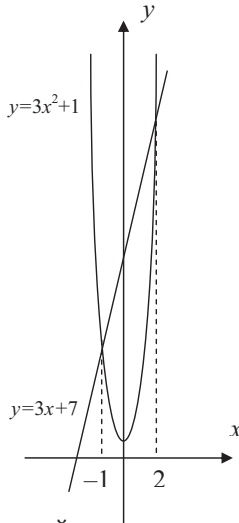
Відповідь: $4 - 2\ln 3$.

Задача 6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 7$ за допомогою визначеного інтеграла.

Розв'язання:

Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 1 \\ y = 3x + 7 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 1 = 3x + 7 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Площу заданої області можна знайти за допомогою визначеного інтеграла.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_{-1}^2 (3x + 7 - 3x^2 - 1) dx = \int_{-1}^2 (3x - 3x^2 + 6) dx = \\ &= \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 + 6x \right) \Big|_{-1}^2 = 13\frac{1}{2} (\text{кв.од}) \end{aligned}$$

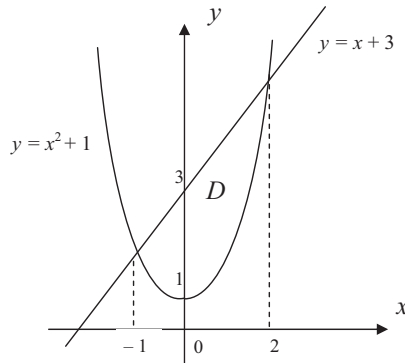
Відповідь: $S = 13\frac{1}{2} (\text{кв.од})$.

Задача 7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 12xy \, dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2 + 1$; $y = x + 3$ і $x = 0$ ($x \geq 0$).

Розв'язання:

Побудуємо область D :

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Нас цікавить права частина отриманої області ($x \geq 0$).

Подвійний інтеграл буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \iint_D 12xy \, dx dy &= 12 \int_0^2 x dx \int_{x^2+1}^{x+3} y dy = 6 \int_0^2 x \left(y^2 \Big|_{x^2+1}^{x+3} \right) dx = 6 \int_0^2 x \left((x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right) dx = \\ &= 6 \int_0^2 \left(-x^5 - x^3 + 6x^2 + 8x \right) dx = \left(-x^6 - \frac{3x^4}{2} + 12x^3 + 24x^2 \right) \Big|_0^2 = 104 \end{aligned}$$

Відповідь: 104.

Задача 8. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+2)^4}$.

Розв'язання:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+2)^4} - \text{це додатний числовий ряд з } n\text{-м членом } u_n = \frac{2n^2}{(n+2)^4}.$$

Порівняємо його зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $v_n = \frac{1}{n^2}$.

За граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+2)^4} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+2)^4} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4}{n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{8}{n} + \frac{24}{n^2} + \frac{32}{n^3} + \frac{16}{n^4}} = 4 \neq 0 \end{aligned}$$

Отже, ряди поведуть себе однаково, тобто обидва збігаються.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 9. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{3^n}$.

Розв'язання:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{3^n}$ – це додатній числовий ряд з n -м членом $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{3^n}$.

Для дослідження даного ряду використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2-1/n}{1+1/n}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47 < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 10. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n-1)!}$.

Розв'язання:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n-1)!}$ – це додатній числовий ряд з n -м членом $u_n = \frac{5^n}{(2n-1)!}$.

Тоді $(n+1)$ -й член ряду має вигляд $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(2n+1)!}$.

Для дослідження даного ряду використаємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(2n+1)!} : \frac{5^n}{(2n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \frac{1}{2n(2n+1)} = 5 \cdot 0 = 0 < 1$$

Отже, ряд збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n$.

Розв'язання:

Це степеневий ряд з n -м членом $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$.

Знайдемо його радіус збіжності:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} : \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Отже ряд збігається в інтервалі $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Дослідимо збіжність ряду в кінцевих точках:

1) Нехай $x = \frac{1}{2}$. Тоді ряд матиме вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Порівняємо його з узагальненим гармонічним рядом (збіжним): $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$.

За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ менше збіжного ряду, отже він збігається

і точка $x = \frac{1}{2}$ належить області збіжності.

2) Нехай $x = -\frac{1}{2}$. Тоді ряд матиме вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Це знакзмінний ряд, тому розглянемо ряд, складений з модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Цей ряд збіжний, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ збігається абсолютно і точка $x = -\frac{1}{2}$ належить області збіжності.

Остаточно, область збіжності заданого ряду $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Відповідь: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Задача 12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$.

Розв'язання:

Використаємо розвинення в ряд Маклорена функції $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Замінюючи в ньому x на $\frac{x^2}{2}$ отримаємо розклад в ряд підінтегральної функції:

$$\operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{x^{14}}{896} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-2}}{2^{2n-1}(2n-1)} + \dots, \quad (-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{x^{14}}{896} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-2}}{2^{2n-1}(2n-1)} + \dots$

Задача 13. Розв'язати задачу Коші: $y' - 2\sqrt{y} \ln x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

Розв'язання:

$y' - 2\sqrt{y} \ln x = 0$ – це рівняння з відокремлюваними змінними.

$\frac{dy}{dx} - 2\sqrt{y} \ln x = 0$, помножимо все рівняння на dx :

$$dy - 2\sqrt{y} \ln x dx = 0$$

$dy = 2\sqrt{y} \ln x dx$, поділимо все рівняння на $2\sqrt{y}$ і проінтегруємо:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \ln x dx$$

$$\sqrt{y} = \int \ln x dx$$

Обчислимо окремо другий інтеграл:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x -$$

$$- \int dx = x \ln x - x + c$$

Повернемося до рівняння:

$$\sqrt{y} = x \ln x - x + c$$

$y = (x \ln x - x + c)^2$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє умові $y(1) = 9$:

$$\sqrt{9} = 1 \cdot \ln 1 - 1 + c$$

$$3 = -1 + c \Rightarrow c = 4.$$

Таким чином, розв'язок задачі Коші буде:

$$y = (x \ln x - x + 4)^2$$

Відповідь: $y = (x \ln x - x + 4)^2$.

Задача 14. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального

$$\text{рівняння } xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Розв'язання:

Скоротимо дане рівняння на x :

$$y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Це однорідне рівняння, отже розв'язок будемо шукати у вигляді $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u - \frac{ux}{x} = \operatorname{tg} \frac{ux}{x}$$

$\frac{du}{dx} x = \operatorname{tg} u$, множимо його на dx , ділимо на $x \operatorname{tg} u$ та інтегруємо

$$\int \operatorname{ctg} u \, du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\sin u| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln |\sin u| = \ln|cx|$$

$$\sin u = cx$$

$$u = \arcsin cx.$$

Тепер повернемося до заміни $y = ux$ і отримаємо $y = x \arcsin cx$.

Відповідь: $y = x \arcsin cx$.

Задача 15. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального

$$\text{рівняння } y' = -2xy + xe^{-x^2}.$$

Розв'язання:

Це лінійне диференціальне рівняння I порядку, отже розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ (метод Бернуллі).

$$y' = -2xy + xe^{-x^2}$$

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$$

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$$

Підберемо функцію v таким чином, що

$$v' + 2xv = 0, \quad \text{тоді рівняння прийме вигляд} \quad u'v = xe^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2x \, dx$$

$$u'v = xe^{-x^2}$$

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$$v = e^{-x^2}$$

$$\int du = \int x dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

Повернемось до заміни $y = uv = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$.

Отже, $y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$ – загальний розв’язок даного рівняння.

Відповідь: $y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$.

Задача 16. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння $y'' = xy'''$.

Розв’язання:

Оскільки в рівнянні відсутня не тільки функція y , але і похідна y' , то використаємо заміну $y'' = z(x)$, $y''' = z'(x)$.

Тоді задане рівняння запишеться так:

$$z = xz'$$

$z = x \frac{dz}{dx}$, домножимо на dx і поділимо на xz :

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Повернемось до заміни $y'' = z(x)$:

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3.$$

Відповідь: $\frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3$.

Задача 17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' + y' = 4 \sin x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$, а корені $k_1 = 0$; $k_2 = -1$.

Корені дійсні і прості ($k_1 \neq k_2$), тому загальний розв'язок матиме вигляд:

$$Y = c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2 \cdot e^{k_2 x} \quad \Rightarrow \quad Y = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 4 \sin x = P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$, тобто відповідає випадку 3 спеціальної правої частини, де $n = 0$ і $\beta = 1$.

Число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не співпадає з жодним з коренів характеристичного рівняння.

Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$z = A \sin x + B \cos x.$$

Для знаходження коефіцієнтів A , B знайдемо похідні:

$$z' = A \cos x - B \sin x \qquad z'' = -A \sin x - B \cos x$$

Підставимо отримані значення z , z' і z'' в початкове рівняння $y'' + y' = 4 \sin x$:

$$\begin{aligned} -A \sin x - B \cos x + A \cos x - B \sin x &= 4 \sin x \\ (-A - B) \sin x + (A - B) \cos x &= 4 \sin x \end{aligned}$$

Знайдемо A , B методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \sin x: \quad -A - B &= 4 & \Rightarrow & \quad A = -2 & \Rightarrow & \quad z = -2 \sin x - 2 \cos x. \\ \cos x: \quad A - B &= 0 & \Rightarrow & \quad B = -2 \end{aligned}$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $y = Y + z$, отже

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} - 2 \sin x - 2 \cos x.$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші знайдемо похідну y' :

$$y' = -c_2 e^{-x} - 2 \cos x + 2 \sin x$$

і підставимо y і y' в початкові умови $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$:

$$\begin{aligned} y(0) = c_1 + c_2 - 2 \sin 0 - 2 \cos 0 &= -1 & \Rightarrow & \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_2 = 5 \end{cases} & \Rightarrow & \quad \begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = -5 \end{cases} \\ y'(0) = -c_2 - 2 \cos 0 + 2 \sin 0 &= 3 \end{aligned}$$

Розв'язок задачі Коші буде мати вигляд: $y = 6 - 5e^{-x} - 2\sin x - 2\cos x$.

Відповідь: $y = 6 - 5e^{-x} - 2\sin x - 2\cos x$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ВАРІАНТ 1

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} dx$ 2. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$ 3. $\int x \sin 2x dx$ 4. $\int \frac{x dx}{x^2 + 7x + 12}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 1 - x$ і $y = x^2 - 1$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 12xy dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$$y = x^3, \quad y = 2 - x \quad \text{і} \quad x = -1.$$

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^4 + 5}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2n!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \ln \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' \sin^2 x + y = 0$, $y \left(\frac{\pi}{2} \right) = e$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; 15. $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$; 16. $yy'' + y' - (y')^2 = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y = 2\sin 2x - \cos 2x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ВАРІАНТ 2

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int x^2 \cos x^3 dx$; 3. $\int x e^{-x} dx$; 4. $\int \frac{2x dx}{x^2 - 8x + 12}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$, $y = -2x$ і $x = 1$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - 2y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n-1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}5^n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^n}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \cdot e^{-x^2}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $xy' + y^2 = 0$, $y(1) = 1$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$; 15. $y' - \frac{y}{x} = x^2$; 16. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ВАРІАНТ 3

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx$ 2. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$; 3. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ 4. $\int \frac{4x^2+3x-3}{x^3-x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - x^2$ і $y = x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$ і $y = x + 2$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^5+3}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n n!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \sin 2x$.

13. Розв'язати задачу Коші: $(1+x^2)y' - y = 0$, $y(0) = e$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' - y = x$; 15. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$; 16. $y'' - (y')^2 = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 4xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

ВАРІАНТ 4

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x + x^2 e^x + 1}{x^2} dx$; 2. $\int \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$; 3. $\int x \cos 3x dx$; 4. $\int \frac{4 dx}{x^2 - 4x}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{2}$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (6x - 2y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ ($x \geq 0$).

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{n^3 - 1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n+1}}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \cos \sqrt{x}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' = (y+1)\operatorname{tg}x$, $y(0) = 4$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = \frac{y}{x} + e^x$

15. $2xy' - 6y = x^2$

16. $(y+5)y'' = (y')^2$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 5y' = \sin 5x, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 5

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^3 + 8}{x} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx$; 3. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 4. $\int \frac{x+3}{x^2+x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos x dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 1$ і $y = x + 1$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^2 + 5}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)2^n}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $xy' - 2y = 0, \quad y(1) = 3$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' = x + 2y$

15. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

16. $x^3 y'' - y' = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 4 \sin x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

ВАРІАНТ 6

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^2 - 9}{x + 3} dx$; 2. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; 3. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; 4. $\int \frac{x dx}{x^2 - 9x + 20}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 9} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 1 - x^2$ і $y = (x - 1)^2$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 6x dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = 1 - x^3$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$ ($x \geq 0$).

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{1}{5^n}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x^2$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' + y \operatorname{tg} x = 0, \quad y(0) = 5$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x}{y}$

15. $2xy' - 6y = x^5$.

16. $(1 + y^2)y'' = 2y(y')^2$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 7

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$; 2. $\int (1 + e^x)^5 e^x dx$; 3. $\int \ln x dx$; 4. $\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (y-x) dx dy$, якщо область D обмежена ліні-

ями $y = x^3$, $y = x^2$ та $x = 2$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5 + 7}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^{n+1}}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \ln(1 - 2x)$.

13. Розв'язати задачу Коші: $(1 + x^2)y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' = y - x e^x$;

15. $xy' - y = x^2 e^x$;

16. $yy'' = (y')^2$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 2y = 3e^x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

ВАРІАНТ 8

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$

2. $\int \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^3}{\cos^2 x} dx$

3. $\int x \sin 5x dx$

4. $\int \frac{x+7}{x^2-x-6} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = (x-2)^2$ і $y = x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 4y dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$y = 1 - x^2$, $y = x + 1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+8}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{(n+2)^{n+1}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = xe^{x^3}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $x \sin y \cdot y' = \cos y$, $y(2) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ 15. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}$ 16. $(1+x)y'' - y' = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + y = 2e^x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 9

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x-2)(x+2)}{x} dx$

2. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

3. $\int x^3 \ln x dx$

4. $\int \frac{3x+7}{x^2+3x+2} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 24xy dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$$y = x^3, \quad y = 4x \quad \text{і} \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$$

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \sin \frac{x}{2}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' \sqrt{1-x^2} = y$, $y(0) = e$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $2y' = \frac{2y}{x} - \frac{y^3}{x^3}$ 15. $y' + 3x^2y = e^{-x^3}$ 16. $y'' = \frac{2}{y-1} (y')^2$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y = 2 \sin x + 2 \cos x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

ВАРІАНТ 10

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^3 2^x + x^2 - 2}{x^3} dx$ 2. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ 3. $\int x e^{2x} dx$ 4. $\int \frac{dx}{x^2 + x}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - 2y) dx dy$, якщо область D обмежена лі-

ніями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 2}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n \cdot 5^n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^3 + 2n}{8n^3 + 1} \right)^{\frac{n}{5}}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\cos 3x}{x}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $x y' + \sqrt{1 - y^2} = 0$, $y(2) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = 4 \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{y}{x}$ 15. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$ 16. $x^2 y'' + xy' = 1$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 9y' - 10y = 11e^x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 12$$

ВАРІАНТ 11

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$; 2. $\int \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$ 3. $\int x \ln x dx$ 4. $\int \frac{x dx}{x^2 - 5x + 6}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 5 - x^2$ і $y = 2 - 2x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x + y) dx dy$, якщо область D обмежена ліні-

ями $y = 1 - x^3$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$ ($x \geq 0$).

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{5n - 1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \right)^n$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^{n+1}}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1) \cdot 7^n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{x}{1+x^3}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' = 2xy + 2x$, $y(1) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' = x + y$; 15. $y' - 2xy = e^{x^2}$; 16. $y'' = 2yy' = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 2y'' + y' = 6x^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -7, \quad y''(0) = 11$$

ВАРІАНТ 12

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(5x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{2\ln x - 1}}{x} dx$; 3. $\int \arcsin x dx$; 4. $\int \frac{2 dx}{x^2 - 9x + 20}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (12x - 6y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = x^2$ та $x = 2$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{(n+2)!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n^2 + 3n + 2)^n}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1)^2}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' = e^{x-y}$, $y(0) = \ln 3$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y}{x}$; 15. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$; 16. $2yy'' + (y')^2 = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = 2 \cos x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

ВАРІАНТ 13

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^2+6}{x^2+1} dx$; 2. $\int \frac{\arcsin x + 4}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 3. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$; 4. $\int \frac{4 dx}{x^2-2x-3}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 2 - x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x-y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$ і $y = x + 2$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{n^4-3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2n}{2n^2+1} \right)^{\frac{n}{2}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+8)!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln(1-x)}{x}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $2yy' \operatorname{ctg} x + 1 = 0$, $y(0) = 2$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy'(y-x) = y^2$;

15. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{5}{x^4}$;

16. $(y-1)y'' - 2(y')^2 = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' - 6y = e^x(2x^2 - 2x - 7) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 14

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x} dx$; 2. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$; 3. $\int x^2 e^x dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^3+x}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^5 \frac{dx}{x^2-8x+17}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 3 - x^2$ і $y = 1 - x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 4x dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$$y = x^3, \quad y = 4x \quad \text{і} \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$$

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+6}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(2n+2)!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{n^2}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = xe^{-2x}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' \operatorname{ctg} x = y + 1$, $y(0) = 2$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $yy' - xy' = \frac{y^2}{x}$; 15. $y' - \frac{1}{x^2+1}y = (3x+4)e^{\arctg x}$; 16. $xy'' + y' = x^2 + 1$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' - 3y = 4\cos 2x - 7\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 15

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int (e^x - 5)^3 e^x dx$; 3. $\int \arccos x dx$; 4. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - x^2} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^7 \frac{dx}{x^2 - 8x + 25}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = (x+1)^2$ і $y = 4$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (y-x) dx dy$, якщо область D обмежена ліні-

ями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 2}{n^4}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

11. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+3) \cdot 3^n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x^2 \sin 3x$.

13. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{4+x^2} y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' - \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$; 15. $xy' - y = x^2 \sin x$; 16. $xy'' = y'$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y = x^3 + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 16

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x-9}{\sqrt{x-3}} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{\tg x - 2}}{\cos^2 x} dx$; 3. $\int x 2^{3x} dx$; 4. $\int \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - x^2$ і $y = x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 6y dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$y = x^3 + 1$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^3+4}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-10} \right)^n$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = (1+5x)^{\frac{1}{4}}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' \cos^2 x - y = 0$, $y(0) = e$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' = x + y$; 15. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$; 16. $xy'' - y' \ln \frac{y'}{x} = 0$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y = 4 \sin x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 17

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int (x^2+4)\sqrt[3]{x} dx$; 2. $\int \frac{(2-\arctg x)^2}{1+x^2} dx$; 3. $\int x^4 \ln x dx$; 4. $\int \frac{3 dx}{x^2-5x+6}$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 3 - x^2$ і $y = x + 1$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 12xy dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$$y = x^3, \quad y = x^2 \quad \text{та} \quad x = 2.$$

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n-1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{7^n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \arctg 2x$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' - 2xy = 0$, $y(2) = 1$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $x^2 y' + y^2 = xy$; 15. $xy' - y = x^2 \cos x$; 16. $y'' - y' = xe^x$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - y' - 2y = (x+2)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 18

Обчислити невизначені інтеграли:

$$1. \int \sqrt[3]{x^2 - 2} dx; \quad 2. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad 3. \int \ln 3x dx; \quad 4. \int \frac{dx}{x^2 - 9x + 20}$$

$$5. \text{Обчислити визначений інтеграл } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$$

$$6. \text{Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій } y = \cos x, \quad y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2}, \quad x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$7. \text{Обчислити подвійний інтеграл } \iint_D (x+2y) dx dy, \text{ якщо область } D \text{ обмежена ліні-} \\ \text{ями } y = x^2 \text{ і } y = x + 2.$$

Дослідити на збіжність числові ряди:

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+9}{n^4-1}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36^n}{(3n-1)!}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n-10} \right)^n$$

$$11. \text{Знайти область збіжності степеневого ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1} x^n.$$

$$12. \text{Розкласти в ряд Маклорена функцію } y = \frac{1}{x^2} \ln(1-x^2).$$

$$13. \text{Розв'язати задачу Коші: } y' = (y-1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$$

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

$$14. y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad 15. y' - \frac{y}{x} = -\frac{6}{x}; \quad 16. xy'' + y' = \frac{1}{x^2}$$

$$17. \text{Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рів-} \\ \text{няння зі сталими коефіцієнтами:}$$

$$y'' - y' - 6y = xe^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ВАРІАНТ 19

Обчислити невизначені інтеграли:

$$1. \int 2^{x+1} \cdot 3^x dx; \quad 2. \int \frac{x^2}{2x^3-3} dx; \quad 3. \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad 4. \int \frac{8x-8}{x^3-4x} dx$$

$$5. \text{Обчислити визначений інтеграл } \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

$$6. \text{Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій } y = x^2 - 2 \text{ і } y = -x^2.$$

$$7. \text{Обчислити подвійний інтеграл } \iint_D (x+y) dx dy, \text{ якщо область } D \text{ обмежена ліні-} \\ \text{ями } y = x^3, \quad y = 4x \text{ і } x = 0 \quad (x \geq 0).$$

Дослідити на збіжність числові ряди:

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n^4+3}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{\sqrt{n} \cdot 5^n}$$

$$11. \text{Знайти область збіжності степеневого ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n.$$

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = xe^{\frac{x}{3}}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $xy' + 3y = 0$, $y(1) = 2$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$; 15. $y' - \cos x \cdot y = (3x + 2)e^{\sin x}$; 16. $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' = x^3 + x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ВАРІАНТ 20

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^2 - 25}{x + 5} dx$; 2. $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$; 3. $\int x \cos 6x dx$; 4. $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x^3 + x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (6x - 2y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2 - x$ і $x = -1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{5n}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3n!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = x \sin(x^2)$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' - y \operatorname{ctg} x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = 1 + \frac{2y}{x}$; 15. $y' + \frac{y}{x} = 21x$; 16. $xy'' - y' = x^2 e^{2x}$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y' - 5y = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ВАРІАНТ 21

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; 3. $\int x^2 \ln x dx$; 4. $\int \frac{5x^2 + 6x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 1$ і $y = 1 - x$.
7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x - y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3 + 1$, $y = x^2 - 1$ і $x = 0$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{n^4 + 2}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1)^2}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

13. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{1-x^2} y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xyy' = y^2 + 2x^2$; 15. $y' + y = (x^2 + 4x - 7)e^{-x}$; 16. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos^2 x$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + y' = x^2 - x + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

ВАРІАНТ 22

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x^2 + 2)^3}{x} dx$; 2. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; 3. $\int \arcsin 2x dx$; 4. $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = (x - 1)^2$ і $y = 1 - x^2$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 2x dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = x^2$ та $x = 2$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2 - 1}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n^2}{n \cdot 8^n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^n$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{\frac{1}{3}} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = (1 + 3x)^{\frac{1}{6}}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $x \cos y \cdot y' = \sin y$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' + e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$; 15. $y' - \frac{1}{\cos^2 x} y = (2x+3) \cdot e^{6x}$; 16. $xy'' + y' = \ln x + 1$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 16y = 5 \sin 2x, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 5.$$

ВАРІАНТ 23

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int (9-x)^2 \sqrt{x} dx$; 2. $\int \frac{x}{3x^2+4} dx$; 3. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 4. $\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-4x+8}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (y-x) dx dy$, якщо область D обмежена ліні-

ями $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n-2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n+3)}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2-2) \cdot 3^n}$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{x^2}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $xy' - \sqrt{1-y^2} = 0$, $y(3) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$; 15. $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = -\sin x \cdot e^{\arcsin x}$; 16. $y'' = \frac{y'}{x \ln x}$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 25y = 5 \cos 3x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3.$$

ВАРІАНТ 24

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$; 2. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; 3. $\int \arccos 4x dx$; 4. $\int \frac{4x^2-4}{x^3+2x^2} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2-2x+17}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 8y \, dx \, dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ ($x \geq 0$).
Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{5n+6}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n n!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+2} \right)^n$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)2^n} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln(1+3x)}{x}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' + 4xy = 0$, $y(1) = 1$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' \left(\frac{y}{x} - 1 \right) = \frac{y^2}{x^2}$; 15. $y' + \frac{1}{\sin^2 x} y = 2 \cos x \cdot e^{\cot x}$; 16. $(1-x^2)y'' = xy'$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$3y'' - 4y = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

ВАРІАНТ 25

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin^2 x} dx$; 2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$; 3. $\int x e^{-5x} dx$; 4. $\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x$ і $y = (x-2)^2$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (2x-1) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2-x$ і $x = -1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3 + 9}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{7n+1} \right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{1}{x} \cos 2x$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' = xy^2 + x$, $y(1) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $x^2 y' = 4(x^2 + y^2) + xy$; 15. $y' + 2xy = -2x^3$; 16. $xy'' - y' = x^4$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 2y' + 10y = 74 \sin 3x, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3.$$

ВАРІАНТ 26

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int (\sqrt{x} - 1)(x - \sqrt{x}) dx$; 2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 + \sin^2 x}}$; 3. $\int (x + 2) \sin x dx$; 4. $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 5x + 6} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-4}^1 \frac{dx}{x^2 + 8x + 41}$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^3$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D 24xy dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$y = x^3$, $y = x^2 - 2$ і $x = 0$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 - 2}{3n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{\sqrt{n} 3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^n}$

11. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{x}{1+x^2}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $2yy' \operatorname{tg} x - 1 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $2x^3 y' + y^3 = 2x^2 y$; 15. $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \operatorname{tg} x$; 16. $(y-1)y'' = 2(y')^2$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 9y = 15 \sin 2x, \quad y(0) = -7, \quad y'(0) = 0.$$

ВАРІАНТ 27

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$; 2. $\int \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx$; 3. $\int \operatorname{arccot} 2x dx$; 4. $\int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^{e^{e/2}} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = 3x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x+2y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$y = x^3$, $y = x^2$ та $x = 2$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+9}{n^4-1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n(3n+2)}$

11. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n-1} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{1}{x} \arctg 3x$.

13. Розв'язати задачу Коші: $\sqrt{9+x^2} y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y'(y-x) = \frac{y^2}{x}$; 15. $y' - \frac{1}{x+5} y = e^{2x}(x+5)$; 16. $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin 2x$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 4y = (6x+5)e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{3}{4}.$$

ВАРІАНТ 28

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{x} dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{\arctg x + 5}}{1+x^2} dx$; 3. $\int x^2 \sin x dx$; 4. $\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 - x} dx$

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^9 \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$.

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - 2x$ і $y = 5 - x^2$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$, $y = x + 6$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{n^5 + 2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{5^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{2^n}$

11. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5} x^n$.

12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = \frac{\ln(1+x^3)}{x}$.

13. Розв'язати задачу Коші: $y' \operatorname{tg} x = y + 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $xy' - y = (x+y) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)$; 15. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$; 16. $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin^2 x$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' - 4y'' + 5y' = 12e^{3x} \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 8, \quad y''(0) = 31.$$

ВАРІАНТ 29

Обчислити невизначені інтеграли:

$$1. \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx; \quad 2. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx; \quad 3. \int (2x-1)2^x dx; \quad 4. \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$$

$$5. \text{Обчислити визначений інтеграл } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx.$$

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ і $y = x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (6x-2y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 4x$ і $x = 0$ ($x \geq 0$).

Дослідити на збіжність числові ряди:

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+4}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{2}{5}\right)^{n^2}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(5n+2)}{(n+3)!}$$

$$11. \text{Знайти область збіжності степеневого ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} x^n.$$

$$12. \text{Розкласти в ряд Маклорена функцію } y = x^2 \cos \sqrt{x}.$$

$$13. \text{Розв'язати задачу Коші: } y' e^x = (e^x - 1) \operatorname{tg} x, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

$$14. xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad 15. y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}; \quad 16. (y-1)y'' = 2(y')^2$$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2 \cos 2x, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{3}{2}.$$

ВАРІАНТ 30

Обчислити невизначені інтеграли:

$$1. \int \frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 2. \int \sqrt{\sin x - 1} \cos x dx; \quad 3. \int x^2 \cos x dx; \quad 4. \int \frac{3x+17}{x^2+2x-3} dx$$

$$5. \text{Обчислити визначений інтеграл } \int_{-1}^{\sqrt[3]{e}-2} \frac{3x^2}{x^3+2} dx.$$

6. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^3$ і $y = x$.

7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x-y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^3$, $y = 2-x$ і $x = -1$.

Дослідити на збіжність числові ряди:

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n+3} \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$$

$$11. \text{Знайти область збіжності степеневого ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

$$12. \text{Розкласти в ряд Маклорена функцію } y = \frac{x}{1+2x}.$$

13. Розв'язати задачу Коші: $xy' - y \ln y = 0$, $y(2) = e^6$.

Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

14. $y' = \frac{y^2 + 2x^2}{xy}$; 15. $y' - 12x^{11}y = (x + 4)e^{x^{12}}$; 16. $xy'' - y' = x^3 \sin x$

17. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Метод безпосереднього (табличного) інтегрування.
5. Методи інтегрування: заміна змінних, внесення під диференціал та інтегрування частинами.
6. Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
7. Інтегрування раціональних дробів. Розкладання на елементарні дроби, виділення цілої частини.
8. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.
9. Інтегрування тригонометричних виразів. Універсальна тригонометрична заміна.
10. Інтегрування ірраціональних виразів.
11. Визначений інтеграл. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
12. Властивості визначеного інтеграла.
13. Формула Ньютона-Лейбніца.
14. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
15. Використання визначеного інтегралу для обчислення площі плоскої фігури.
16. Невласні інтеграли I і II роду. Дослідження їх збіжності.
17. Подвійний інтеграл та його обчислення.
18. Застосування подвійного інтеграла.
19. Числові ряди. Основні поняття. Збіжність і сума ряду. Необхідна і додатня умови збіжності.
20. Ознаки збіжності додатних числових рядів. Ознака порівняння, гранична ознака порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші.
21. Знакомінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Ознака Лейбніца.
22. Степеневі ряди. Інтервал, область та радіус збіжності степеневих рядів.
23. Розкладання функцій в степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена.

24. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
25. Диференціальні рівняння: означення, порядок рівняння, загальний розв'язок, частинний розв'язок, задача Коші.
26. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Приклад.
27. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Приклад.
28. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Приклад.
29. Інтегрування диференціального рівняння n -го порядку вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
30. Інтегрування диференціального рівняння n -го порядку вигляду $F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.
31. Інтегрування диференціального рівняння n -го порядку $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.
32. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Різні випадки коренів характеристичного рівняння.
33. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку $L[y] = f(x)$ зі спеціальною правою частиною $f(x)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.
2. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 334 с.
3. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 335 с.
4. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 623 с.
6. Васильченко І. П. Математика для економістів. – К.: Кондор, 2006.
7. Грисенко М. В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
8. Ляшенко О., Черняк О., Кравець Т. та ін. Вища математика для економістів: Підручник. – Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 547 с.
9. Рудницький О. Г. Математика для економістів.: Конспект лекцій для студентів денної та заочної форми навчання. – К.: ДЕТУТ, 2010. – 265

ДОДАТОК

Таблиця інтегралів основних елементарних функцій:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C.$
15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$