МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ТАНСПОРТУ

Кафедра вищої математики

Т.В. КРИЖАНОВСЬКА
Т.С. КЛЕЦЬКА
А.Ю. АНДРЕЙЦЕВ
О.О. КІЛЬЧИНСЬКИЙ
Т.М. СЕМЕНЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
для виконання вхідного контролю
для студентів денної форми навчання за спеціальностями
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і 275
«Транспортні технології»

Київ 2016

УДК 51:517

Вища математика: Методичні вказівки для виконання вхідного контролю для студентів денної форми навчання за спеціальностями 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і 275 «Транспортні технології» / Крижановська Т.В., Клецька Т.С., Андрейцев А.Ю., Кільчинський О.О., Семененко Т.М. – К.: ДЕТУТ, 2016. – 64 с.

Методичні вказівки призначені для перевірки залишкових знань студентів з елементарної математики. В них наводяться деякі основні типи задач з курсу елементарної математики, необхідні для навчання студентів I курсу технічних спеціальностей. На простих прикладах вивчаються найбільш характерні методи розв'язання математичних задач.

Методичні вказівки розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики (протокол № 4 від 17.11.2016) та на засіданні методичної комісії факультету (протокол № 3 від 29.11.2016).

Методичні вказівки призначені для студентів денної форми навчання за спеціальностями 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і 275 «Транспортні технології».

Укладачі: Т.В. Крижановська, к.ф.-м.н., доцент
Т.С. Клецька, к.і.н., доцент
А.Ю. Андрейцев, к.ф.-м.н., доцент
О.О. Кільчинський, к.ф.-м.н., доцент
Т.М. Семененко, старший викладач

Рецензенти: Ю.І.Іванова, к.ф.-м. н., доцент
В.М.Семененко, д.т.н, провідний науковий співробітник

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки охоплюють деякі основні розділи курсу елементарної математики і призначені для перевірки шкільних залишкових знань студентів І курсу денної форми навчання за напрямками підготовки 6.070105 «Рухомий склад залізниць», 6.050701 «Залізничні споруди і колійне господарство», 6.050702 «Електромеханіка». Контрольна робота проводиться на першому практичному занятті І семестру І курсу. Задачі охоплюють теми: дії зі звичайними та десятковими дробами, степінь з натуральним показником, лінійні, квадратні, дробово-раціональні, показникові, ірраціональні та логарифмічні рівняння та нерівності, функції, числові послідовності, тригонометрія, похідна та її використання. До цих розділів належать задачі вхідної контрольної роботи. Рівень складності задач відповідає програмі курсу елементарної математики, а об’єм розрахований на одну пару (80 хв). Це забезпечує рівномірне завантаження студентів і виконання ними завдань контрольної роботи, дає змогу з’ясувати, які теми необхідно розглянути додатково перед вивченням відповідних розділів вищої математики. Для полегшення орієнтації студентів в курсі математики та глибшого засвоєння навчального матеріалу перед переліком умов завдань для самостійної роботи студентів наведено методичні рекомендації для розв’язання відповідних задач, а в кінці методичних вказівок – список контрольних питань з теорії, додатки, а також наведено список рекомендованої літератури.

Контрольна робота повинна виконуватись відповідно до чинних правил оформлення контрольних робіт. Зворотній бік аркуша використовується для виправлення помилок, а також для можливих допоміжних зауважень, вказівок і пояснень викладача. На першій сторінці обов’язково має бути вказано назву університету, назву предмета (математика), прізвище та ініціали студента, групу, в якій він навчається, а також прізвище викладача, який перевіряє роботу.

Методичні вказівки містять 30 варіантів контрольної роботи.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Дійсні числа та дії над ними

$\frac{a}{b} = a : b$ – звичайний дріб $(a, b \in Z, b \neq 0)$.

$A\frac{a}{b} = A + \frac{a}{b}$ – мішаний дріб.

Перехід від мішаного до звичайного дробу: $A\frac{a}{b} = \frac{A \cdot b + a}{b}$

Основна властивість дробу: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$.

Перехід від десяткового дроба до звичайного: $a, \underbrace{bc...d}_{n\ знаків} = a\frac{bc...d}{10^n}$

Дії зі звичайними дробами

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$;

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;

4. $\frac{a}{b} \cdot m = m \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b}$;

5. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$, $(m \neq 0)$;

6. $m : \frac{a}{b} = \frac{m \cdot b}{a}$;

7. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;

8. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$;

9. $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c} = \dfrac{a \cdot c}{b}$;

10. $A \pm \dfrac{a}{b} = \dfrac{A \cdot b \pm a}{b}$;

11. $A\dfrac{a}{b} \cdot C\dfrac{d}{e} = \dfrac{(A \cdot b + a) \cdot (C \cdot e + d)}{b \cdot e}$

12. $A\dfrac{a}{b} : C\dfrac{d}{e} = \dfrac{(A \cdot b + a) \cdot e}{(C \cdot e + d) \cdot b}$.

Приклад 1. Обчислити $\left(\dfrac{3}{4} - 2\dfrac{1}{5} : 1\dfrac{1}{10}\right) : \dfrac{5}{2}$.

$$\left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{5} : 1\frac{1}{10}\right) : \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{11}{5} : \frac{11}{10}\right) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{4} - \frac{11}{5} \cdot \frac{10}{11}\right) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{4} - 2\right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{3-8}{4} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

Лінійні та квадратні рівняння

За характером дій, що виконуються над невідомими, рівняння поділяються на алгебраїчні, дробові, ірраціональні та трансцендентні.

Позначимо ліву і праву частини рівняння буквами A і B. Тоді рівняння A = B називається:

1) *алгебраїчним*, якщо A та B – многочлени;

2) *дробовим* (раціональним), якщо A та B – раціональні вирази, причому хоча б один з них дробовий;

3) *ірраціональним*, якщо A та B – алгебраїчні вирази, причому хоча б один з них ірраціональний;

4) *трансцендентним*, якщо хоча б один з виразів A чи B містить трансцендентні дії над невідомими.

Трансцендентними називають неалгебраїчні дії, наприклад, піднесення до степеня з ірраціональним показником, логарифмування, обчислення значень тригонометричних функцій тощо.

Алгебраїчні рівняння можуть бути першого, другого, третього і т.д. степеня залежно від степеня многочленів А та В. Степінь рівняння визначається як найвища степінь одного з невідомих, що входить у рівняння, або як сума показників при невідомих (максимальна).

Лінійним називається рівняння виду $ax + b = 0$. Лінійне рівняння має єдиний корінь $x = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$.

Квадратним називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – невідоме, а коефіцієнти a, b, c – дійсні числа.

Загальна формула для знаходження коренів повного квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{де} \quad D = b^2 - 4ac$$

1) якщо $D = b^2 - 4ac > 0$, то $x_{1,2} \in R$;

2) якщо $D = b^2 - 4ac = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

3) якщо $D = b^2 - 4ac < 0$, то $x_{1,2} \notin R$.

Приклад 2. Знайти найбільший корінь рівняння $x^2 - 9x + 20 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \left[\begin{array}{l} 5 \\ 4 \end{array} \right.$ Найбільшим з коренів буде 5.

Відповідь: 5.

Степінь числа

Для будь-якого дійсного числа $a \in R$, $a > 0$, $n \in N$ n-им *степенем* числа a називається вираз

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ... \cdot a}_{n \quad \text{множників}}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ де}$$

a – основа, n – показник степеня.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$;

4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

$(a > 0; b > 0; c > 0; m, n \in R; a, b, c \in R)$.

Корені

Корінь n-го степеня з числа a – це таке число x, що $x^n = a$ $(x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}})$.

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;

2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

3. $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$;

4. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$;

5. $\sqrt[n]{a^{n \cdot m} = a^m}$;

6. $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$;

7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

8. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot k}}$;

9. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$;

10. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ ($\sqrt[n]{a}$ - арифметичне значення кореня при $a \geq 0$),

(a, b, c) $\in R$, $a \geq 0, b > 0, c \geq 0, (n, k) \in N, n > 1, m \in Z$.

Приклад 3. Спростити степеневий вираз $\frac{a^7\left(b^2\right)^5}{\left(a^2\right)^3 b^{10}}$.

$$\frac{a^7\left(b^2\right)^5}{\left(a^2\right)^3 b^{10}} = \frac{a^7 b^{2\cdot 5}}{a^{2\cdot 3} b^{10}} = \frac{a^7 b^{10}}{a^6 b^{10}} = a^{7-6} = a.$$

Відповідь: a.

Показникові та ірраціональні рівняння

Показниковим називається рівняння, в якому невідоме стоїть у показнику степеня.

Розв'язування показникових рівнянь:

1) $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)$ – метод зведення до спільної основи. $(a > 0,\ a \neq 1)$.

2) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \log_a b,\ b > 0,\ a \neq 1, a > 0 \\ x \in \varnothing,\ b \leq 0, \\ x \in \varnothing,\ a = 1,\ b \neq 1, \\ x \in D(f),\ a = b = 1, \end{cases}$ – метод логарифмування.

де $D(f)$ - область визначення $f(x)$.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння $16 \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{4}$.

$$16 \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{4}$$

$$2^4 \cdot 2^{x-3} = 2^{-2}$$

$$2^{x+1} = 2^{-2}$$

$$x + 1 = -2$$

$$x = -3.$$

Відповідь: –3.

Ірраціональним називається рівняння, в якому невідоме стоїть під знаком кореня.

Областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння $f(x) = g(x)$ називають спільну частину (перетин) областей визначення (існування) функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$.

Ірраціональні рівняння розв'язуються найчастіше зведенням до раціонального рівняння за допомогою заміни або піднесення до степеня з відповідним показником:

1) $f(x) = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^n(x) = \varphi^n(x), \quad n \in N.$

2) $f^{2n}(x) = \varphi^{2n}(x) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| = |\varphi(x)|, \quad n \in N.$

3) $\sqrt[2n+1]{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \varphi^{2n+1}(x), \quad n \in N.$

4) $\sqrt[2n]{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \varphi^{2n}(x) \\ f(x) \ge 0 \\ \varphi(x) \ge 0 \end{cases}, \quad n \in N.$

5) $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{\varphi(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases}, \quad n \in N.$

6) $\sqrt[2n]{f(x)}\varphi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(\varphi) \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right., \quad n \in N.$

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x-2} = 4 - x$.

$$\sqrt{3x-2} = 4 - x \qquad \text{\textit{ОДЗ}: } \begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = (4-x)^2$$

$$3x - 2 = 16 - 8x + x^2 \qquad \begin{cases} x > 2/3 \\ x < 4 \end{cases} \quad x \in (2/3; 4)$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 9 \end{array} \right.$ $\quad x_2 = 9$ – не є коренем рівняння, оскільки не належить *ОДЗ*.

Відповідь: 2.

Логарифмічні рівняння та нерівності

Розв'язок логарифмічних рівнянь зводиться до наступного:

1) $\log_a\{f(x)\} = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^{b,} \\ f(x) > 0. \end{cases} \qquad \left(a > 0, \quad a \neq 1 \right).$

2) $\log_a\{f(x)\} = \log_a\{\varphi(x)\} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \\ (\varphi(x) > 0). \end{cases} \qquad \left(a > 0, \quad a \neq 1 \right).$

Розв'язування логарифмічних нерівностей:

1) $\log_a\{f(x)\} > b \Leftrightarrow \left[\begin{cases} f(x) > a^b, a > 1, або \\ 0 < f(x) < a^b, 0 < a < 1. \end{cases} \right.$

2) $\log_a\{f(x)\} < b \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 0 < f(x) < a^b, a > 1, або \\ f(x) > a^b, 0 < a < 1. \end{cases} \right.$

3) $\log_{f(x)}\{g(x)\} > \log_{f(x)}\{h(x)\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 1, f(x) > 0, \\ 0 < g(x) < h(x), \end{cases} \end{array} \right.$

або

4) $\log_{f(x)}\{g\} > \log_{f(x)}\{h(x)\} \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g(x) - h(x)) > 0, \\ f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0. \end{cases}$

Приклад 5. Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_2(x-3) \le 2$.

$\log_2(x-3) \le 4$ *ОДЗ*: $x - 3 > 0$

$\log_2(x-3) \le 4\log_2 2$ $x > 3$

$\log_2(x-3) \le \log_2 2^4$, основа логарифма більше 1, тому

$x - 3 \le 16$

$x \le 19$.

Враховуючи ОДЗ: $x \in (3;19]$

Відповідь: $(3;19]$.

Дробово-раціональні нерівності

Дробово-раціональною називається нерівність вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ або $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени. Такі нерівності розв’язуються методом інтервалів. На практиці нерівність іноді потрібно спочатку звести до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$.

Приклад 6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

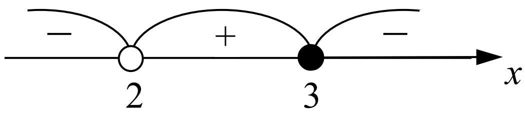
$$\frac{x-1}{2x-4} \ge 1.$$

$$\frac{x-1}{2x-4} \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{2x-4} - 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{2x-4} - \frac{2x-4}{2x-4} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+3}{2x-4} \ge 0.$$

Знайдемо нулі та область визначення функції $y = \frac{-x+3}{2x-4}$.

$$\frac{-x+3}{2x-4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+3=0 \\ 2x-4 \ne 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ x \ne 2 \end{cases}$$

Нанесемо на числову пряму нулі та виколоті точки функції. Визначимо знак виразу $\frac{-x+3}{2x-4}$ на кожному з отриманих інтервалів:



Дріб $\frac{-x+3}{2x-4}$ буде більше або рівним 0 на проміжку $(2;3]$.

Відповідь: $(2;3]$.

Тригонометрія

Зв’язок між тригонометричними функціями одного аргументу

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\quad \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$;

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha;$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\alpha;$$

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{|\mathrm{tg}\alpha|}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}};$$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{|\mathrm{ctg}\alpha|}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}};$$

$$|\mathrm{tg}\alpha|=\frac{|\sin\alpha|}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|}=\frac{1}{|\mathrm{ctg}\alpha|};$$

$$|\mathrm{ctg}\alpha|=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{|\sin\alpha|}=\frac{|\cos\alpha|}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1}{|\mathrm{tg}\alpha|}.$$

Тригонометричні функції суми і різниці кутів

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};\qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta};\quad \mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}.$$

Тригонометричні функції подвійного, половинного та потрійного аргументів

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}{2};$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad \left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha\ \text{-}\ \mathrm{tg}^3\alpha}{1\ \text{-}\ 3\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}; \qquad \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

Приклад 7. Спростити тригонометричний вираз $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha$.

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha}{2\sin\alpha} =$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{4\sin\alpha}=\frac{2\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{8\sin\alpha}=\frac{2\sin 8\alpha\cos 8\alpha}{16\sin\alpha}=\frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$.

Арифметична та геометрична прогресії

Послідовність, у якої задано перший член a_1, а кожен наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, збільшеному на одне й те саме число d, зветься *арифметичною прогресією*:

$$a_{n+1}=a_n+d\,;\quad d\neq 0$$

a_n – n-й член прогресії, d – різниця прогресії. Формула загального члена арифметичної прогресії:

$$a_n=a_1+d\cdot(n-1)$$

Сума n членів прогресії S_n обчислюється за формулою:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$$

Послідовність, у якої задано перший член b_1, а кожен наступний, починаючи з другого, утворюється множенням попереднього на одне й те саме число q, називається *геометричною прогресією*:

$$b_n=b_{n-1}\cdot q$$

b_n – n-й член прогресії, q – знаменник прогресії. Формула загального члену геометричної прогресії:

$$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$$

Сума n членів геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$$

Якщо $|q|<1$, то прогресію називають нескінченно спадною. Границя суми її членів: $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – називається сумою нескінченно спадної геометричної прогресії. Вона обчислюється за формулою:

$$S=\frac{b_1}{1-q}\ .$$

Приклад 8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо п'ятий її член дорівнює 8, а сьомий 14.

За формулою загального члену арифметичної прогресії:

$$a_5=a_1+4d=8,\ \text{а}\ \ a_7=a_1+6d=14\,.$$

Віднімемо їх: $a_7-a_5=a_1+6d-(a_1+4d)=2d=14-8=6.$

Отже $d=3$.

$a_5=a_1+4\cdot 3=8 \quad \Rightarrow \quad a_1=8-12=-4$.

Відповідь: –4.

Похідна та її застосування

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a;b)$, то *похідною* функції $f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ до приросту аргументу Δx при Δx, прямуючому до нуля:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція $f(x)$ має похідну у точці x_0 або, що $f(x)$ *диференційована* у точці x_0.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$c'=0$

$\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1}.$

$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a,\ \ a>0;$

$\left(e^x\right)'=e^x.$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1;$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x.$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x.$$

$$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Правила диференціювання

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – диференційовані функції, тоді:

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left[f(x) - g(x)\right]' = f'(x) - g'(x)$$

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Теорема про диференціювання складної функції

Нехай $y = f(x)$ має похідну у точці x_0, а функція $g(y)$ має похідну у точці $y_0 = f(x_0)$, тоді і складна функція $F(x) = g\left[f(x)\right]$ має похідну у точці x_0, рівну

$$F'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

Приклад 9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4$ на відрізку $[-2; 0]$.

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$y' = \left(3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4\right)' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x(x+1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \ \in [-2; 0] \\ x_2 = -1 \in [-2; 0] \\ x_3 = 2 \ \notin [-2; 0] \end{cases}$$

Два кореня $x_1 = 0$ і $x_2 = -1$ належать заданому відрізку $[-2; 0]$.

Знайдемо значення функції в цих точках і на кінцях відрізку:

$$y(0) = 3 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$y(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 4 = -1$$

$$y(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 + 4 = 36$$

Отримаємо найбільше значення $y(-2) = 36$ і найменше значення $y(-1) = -1$.

Відповідь: $y_{найб.} = y(-2) = 36; \quad y_{найм.} = y(-1) = -1$.

Текстові задачі

Розв’язок *задач на рух* ґрунтується на формулі $S = V \cdot t$.

Якщо тіло рухається за течією ріки, то його швидкість W (відносно берега) складається зі швидкості тіла у стоячій воді U (власної швидкості тіла) та швидкості течії ріки V: $W=U+V$, а якщо тіло рухається проти течії ріки, то його швидкість (відносно берега) $W=U–V$. Якщо в умові задачі справа йде про рух плотів, то вважають, що пліт рухається зі швидкістю течії ріки.

У задачах на рівномірний рух інколи зустрічаються умови, що полягають у наступному: два тіла рухаються назустріч одне одному, або одне тіло наздоганяє інше. Якщо при цьому початкова швидкість тіл рівні V_1, V_2, відповідно, то:

1) при русі тіл назустріч одне одному час, через який вони зустрінуться, дорівнює $\dfrac{S}{V_1 + V_2}$.

2) При русі тіл у одну сторону $(V_1 > V_2)$ час, через котрий перше тіло наздоганяє друге, дорівнює $\dfrac{S}{V_1 - V_2}$.

Розв'язок *задач на роботу* ґрунтується на формулі $A = N \cdot t$, де t – час, за який виконується робота, N – продуктивність праці – робота, яка виконується за одиницю часу, і A – власне робота, що виконується за час t.

Іноді, якщо робота виконується одна й та сама, її можна позначити за 1.

Розв'язок *задач на концентрацію та процентний вміст* заснований на використанні наступних понять та формул.

Нехай дані три різних речовини *A, B* і *C* з масами M_A, M_B, M_C. Маси суміші, створеної з цих речовин, дорівнює $M_A + M_B + M_C$.

Масовою концентрацією речовини A у суміші називається величина C_A, яка обчислюється за формулою:

$$C_A = \frac{M_A}{M_A + M_B + M_C}.$$

Відповідно масові концентрації речовин B і C у цій суміші обчислюються за формулами:

$$C_B = \frac{M_B}{M_A + M_B + M_C}, \quad C_C = \frac{M_C}{M_A + M_B + M_C}$$

Масові концентрації C_A, C_B, C_C зв'язані між собою рівністю:

$$C_A + C_B + C_C = 1.$$

Процентними вмістами речовин *A, B, C* у даній суміші називаються величини $p_A\%, p_B\%, p_C\%$ відповідно, які обчислюються за формулами:

$$p_A\%, = C_A \cdot 100\%, \quad p_B\% = C_B \cdot 100\%, \quad p_C\% = C_C \cdot 100\%.$$

За аналогічними формулами обчислюють концентрації речовин у суміші і для випадку, коли число різних речовин, що змішуються (компонент) дорівнює двом, чотирьом, п'яти і т.д.

Приклад 10. У резервуар налили 4 л 70%-го розчину сірчаної кислоти. У інший резервуар налили 3 л 90%-го розчину сірчаної кислоти. Скільки літрів розчину треба перелити із другого резервуару у перший, щоб у ньому утворився 75%-ий розчин сірчаної кислоти?

	%	Об'єм розчину	Об'єм кислоти
I розчин	70%	4 л	$4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$ л
II розчин	90%	3 л	$3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7$ л
Суміш	75%	$4 + x \quad (x < 3)$л	$(4 + x) \cdot 0{,}75$л

Нехай в перший резервуар з другого було перелито x л. Тоді об'єм отриманого розчину $4 + x$ л. Об'єм кислоти в ньому буде $(4 + x) \cdot 0{,}75$ л. Але з іншого боку, об'єм кислоти складається з 2,8 л кислоти першого розчину та $0{,}9x$ л кислоти з доданого II розчину. Отримали рівняння:

$$2{,}8 + 0{,}9x = 0{,}75(4 + x)$$

$$2{,}8 + 0{,}9x = 3 + 0{,}75x$$

$$0{,}15x = 0{,}2$$

$$0{,}15x = 0{,}2$$

$$x = 4/3$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$ *л.*

ВАРІАНТ № 1

1. Обчислити:

$$\left(-\frac{3}{8}-2\frac{1}{7}\cdot 1\frac{1}{20}\right):\frac{3}{16}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+3x-4=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^5\left(b^4\right)^2}{\left(a^2\right)^3 b^8}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $4\cdot 2^{x-1}=\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{x-1}=3-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(x-3)\le 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{2x-1}{x-3}\le 1.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)\cdot\sin 2\alpha.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо п'ятий її член дорівнює 9, а шостий 13.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-3x^2-45x+15$ на відрізку $[0;10]$.

10. Катер пройшов 28 км за течією річки на 2 години швидше, ніж 96 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

ВАРІАНТ № 2

1. Обчислити:

$$1\frac{7}{8}\cdot\left(\frac{5}{6}+1{,}3\right)-\frac{5}{3}:\frac{1}{6}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+2x-15=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^{14}\left(b^4\right)^6}{\left(a^2\right)^7 b^{20}}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $9\cdot 3^{x+2}=\dfrac{1}{27}$; б) $\sqrt{5-x}=x+1$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(x-2)\geq 3.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x-5}{x-2}\leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$(\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\,\sin 2\alpha)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1=2$, а четвертий $b_4=-54$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+3x^2-24x+5$ на відрізку $[1;4]$.

10. Скільки грамів 25-відсоткового і скільки грамів 40-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 50 кг 34-відсоткового розчину?

ВАРІАНТ № 3

1. Обчислити:

$$\left(9-2\frac{2}{15}\cdot 3\frac{1}{8}\right):\frac{7}{9}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+x-6=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^4 b^6}{a^{14}\left(b^2\right)^2}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $8\cdot 2^{2x-1}=\frac{1}{4}$; б) $\sqrt{x-2}=x-4$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_5(x+1)<1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-9}{x-5}\le 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\operatorname{tg}\alpha\,(\sin 2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos 2\alpha+1.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо шостий і сьомий члени дорівнюють 29 і 35 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+6x^2+9x-7$ на відрізку $[-2;2]$.

10. Відстань від А до В залізницею дорівнює 105 км, а річкою – 150км. Поїзд з пункту А виходить на 2 години пізніше від пароплава і прибуває до В на 15 хв раніше. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 30 км/год більша за швидкість пароплава.

ВАРІАНТ № 4

1. Обчислити:

$$2\frac{1}{8}-\left(2{,}5-2\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{3}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+2x-3=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^5\left(b^4\right)^7}{\left(b^6\right)^5 a}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $27\cdot 3^{x-1}=\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{14-x}=x-2$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_4(x+3)<2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x-2}{x-4}\le 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{2+\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}\right)\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_1=2$ і $b_4=54$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+6x^2-15x+1$ на відрізку $[-2;3]$.

10. Два маляри, працюючи разом, можуть пофарбувати фасад будинку за 16 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожен з них, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 24 години менше, ніж другому?

ВАРІАНТ № 5

1. Обчислити:

$$\left(8-3\frac{4}{7}:\frac{1}{2}\right):\frac{3}{7}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+6x+8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^4\right)^2 b^5}{\left(a^2\right)^3\left(b^3\right)^2}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $4\cdot 2^{3x-3}=\frac{1}{16}$; б) $\sqrt{3-x}=x-1$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\lg\left(3x+4\right)\geq 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{5x-2}{x-3}\leq 4.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

8. Знайти перший член арифметичної прогресії, якщо шостий її член дорівнює 22, а другий 6.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=4x^3-27x^2+24x-6$ на відрізку $[0;2]$.

10. Катер пройшов 18 км за течією річки на 2 години швидше, ніж 26 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 5 км/год.

ВАРІАНТ № 6

1. Обчислити:

$$\left(\frac{5}{6}+1{,}3\right)\cdot 1\frac{7}{8}-3\cdot\frac{5}{3}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+3x-10=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^2\right)^5 b^4}{a^{13}\left(b^2\right)^2}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $9\cdot 3^{1-2x}=\dfrac{1}{3}$;   б) $\sqrt{x+1}=1-x$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(5-x)\le 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x+4}{x+2}\le 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\cdot\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1=3$, а п’ятий $b_5=48$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-6x^2+9x+2$ на відрізку $[-1;2]$.

10. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен з них, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому?

ВАРІАНТ № 7

1. Обчислити:

$$\left(1\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}-1\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{12}:3\frac{1}{2}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2-2x-15=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^7\left(b^2\right)^2}{\left(a^4\right)^3 b^3}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $3\cdot 6^{x+3}=108$; б) $\sqrt{2x+9}=3-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_8\left(3x-10\right)\le\frac{1}{3}.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{5x-9}{x-4}\le 4.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}-\cos^2 2\alpha.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо шостий і сьомий члени дорівнюють 8 і 11 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+3x^2-45x+7$ на відрізку $[-1;4]$.

10. Відстань від пункту А до В по шосе дорівнює 180 км, а залізницею – 210км. Автомобіль з пункту А виїхав на 30 хв пізніше від поїзда і прибув до В на 45 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша за швидкість поїзда.

ВАРІАНТ № 8

1. Обчислити:

$$\left(1\frac{3}{5}-2{,}5\right)\cdot\frac{5}{3}+\frac{5}{3}:\frac{2}{3}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+2x-8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^2\left(b^5\right)^6}{\left(b^3\right)^9a^7}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $27\cdot 3^{3x+1}=\frac{1}{9}$;   б) $\sqrt{x+3}=x+1$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(x-4)\geq 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x+5}{x+1}\leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\cdot\mathrm{tg}\alpha.$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_1=8$ і $b_4=1$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+3x^2-9x+5$ на відрізку $[-1;2]$.

10. Скільки грамів 4-відсоткового і скільки грамів 10-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 180 г 6-відсоткового розчину?

ВАРІАНТ № 9

1. Обчислити:

$$\left(\frac{27}{5}:1\frac{2}{7}-1\frac{1}{5}\right)\cdot 1\frac{1}{3}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+8x+15=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^3\left(b^3\right)^2}{\left(a^2\right)^0 b^8}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $25\cdot 5^{2x+1}=\frac{1}{25}$; б) $\sqrt{x-1}=x-3$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(x-4)\le 3.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-3}{x-2}\le 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

8. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо другий її член дорівнює $a_2=-12$, а четвертий $a_4=-6$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=4x^3-15x^2+12x+7$ на відрізку $[1;3]$.

10. Човен, власна швидкість якого становить 8 км/год, пройшов 15 км за течією річки і таку саму відстань проти течії, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки.

ВАРІАНТ № 10

1. Обчислити:

$$\left(-1\frac{3}{4}:\frac{3}{2}+2\frac{1}{3}\right):\frac{7}{12}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+5x+4=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^{10}\left(b^3\right)^2}{\left(a^3\right)^3b^4}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $\frac{1}{8}\cdot 2^{2-x}=4$; б) $\sqrt{5+x}=1-x$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_9(2x+1)\geq\frac{1}{2}.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-2}{x-4}\leq 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-1}+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha\right)\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$$

8. Знайти знаменник q зростаючої геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1=2$, а третій $b_3=18$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3-9^2-72x+3$ на відрізку $[-2;1]$.

10. Після того, як змішали 60-відсотковий і 30-відсотковий розчини кислоти, отримали 600г 40-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

ВАРІАНТ № 11

1. Обчислити:

$$2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2-2x-8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^2\right)^3 b^{12}}{a^5\left(b^2\right)^5}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{1}{16}\cdot 2^{2-x}=8$; б) $\sqrt{x-2}=4-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(4-x)\le 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-7}{x-3}\le 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\operatorname{ctg}\alpha\,(\sin 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha)+\cos 2\alpha.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо п'ятий і шостий члени дорівнюють 8 і 5 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3-6x+3$ на відрізку $[0;3]$.

10. З міста А в місто В, відстань між якими дорівнює 300 км, виїхали одночасно дві машини. Одна з них рухалась зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж друга, а тому прибула до пункту призначення на 1 год раніше за другу. Знайдіть швидкість кожної з машин.

ВАРІАНТ № 12

1. Обчислити:

$$1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right).$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+7x+12=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^3\left(b^2\right)^4}{\left(b^3\right)^2 a^{10}}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $9\cdot 3^{1-x}=\frac{1}{3}$; б) $2\sqrt{x+2}=x-1$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(x+1)\ge 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{2x-9}{x-4}\le 1.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\cdot\sin 2\alpha.$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_2=4$ і $b_5=32$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-3x^2-9x+2$ на відрізку $[-2;2]$.

10. Двоє робітників, працюючи разом виконали виробниче завдання за 12 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожен з них, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 7 години менше, ніж другому?

ВАРІАНТ № 13

1. Обчислити:

$$3\left(2-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+6x+8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^{12}\left(b^0\right)^3}{\left(a^5\right)^2 b^3}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $2\cdot 3^{x+2}=54$; б) $\sqrt{14-x}=2-x$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_6(3-x)\le 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{2x-5}{x+2}\ge 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha\right)\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

8. Знайти різницю *d* арифметичної прогресії, якщо перший її член $a_1=-4$, а восьмий $a_8=10$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3-3x^2-12x+4$ на відрізку $[1;4]$.

10. Турист проплив на моторному човні 25 км і повернувся назад на плоту. Знайдіть швидкість течії річки, якщо на плоту турист плив на 10 год довше, ніж човном, а власна швидкість човна становить 12 км/год.

ВАРІАНТ № 14

1. Обчислити:

$$\left(4{,}5 \cdot 1\frac{2}{3} - 6\frac{3}{4}\right) : \frac{3}{8}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^5\left(b^4\right)^2}{\left(a^6\right)^2 b^8}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $4 \cdot 2^{2-x} = \dfrac{1}{4}$; б) $\sqrt{15 - x} = x - 3$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2 (2x + 4) \geq 3.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x - 8}{x + 1} \leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}\right) \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

8. Знайти суму перших трьох членів геометричної прогресії, якщо перший її член дорівнює 2, а знаменник 3.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 1 - 3x^2 - x^3$ на відрізку $[-1;1]$.

10. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо другій бригаді на це потрібно на 12 години більше ніж другій?

ВАРІАНТ № 15

1. Обчислити:

$$\left(17\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}+1\frac{1}{12}\right):3.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+5x+6=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^4\left(b^2\right)^3}{\left(a^4\right)^2 b^7}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $16\cdot 2^{x-6}=\frac{1}{8}$; б) $\sqrt{x+8}=x-4$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_5(x+1)\geq 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x+5}{x+3}\leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

8. Знайти різницю d арифметичної прогресії, якщо перший і сьомий члени дорівнюють 8 і 14 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на відрізку $[-4;0]$.

10. На шлях із села до міста, що дорівнює 90 км, один мотоцикліст витрачає на 18 хв більше, ніж другий, оскільки його швидкість на 10 км/год менша від швидкості другого. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.

ВАРІАНТ № 16

1. Обчислити:

$$\left(2\frac{3}{10}-1\frac{5}{16}\cdot 2\frac{2}{3}\right):\frac{3}{5}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2-3x-4=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^3\left(b^4\right)^2}{\left(b^2\right)^3 a^{12}}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $4\cdot 2^{1-x}=\frac{1}{4}$; б) $\sqrt{x+3}=9-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_5(x-2)\le 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{6x-9}{x-2}\le 5.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha\right).$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_1=20$ і $b_4=\frac{5}{2}$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-3x^2+4$ на відрізку $[2;4]$.

10. Скільки кілограмів 40-відсоткового і скільки кілограмів 50-відсоткового сплавів цинку треба взяти, щоб отримати 50 кг 46-відсоткового сплаву?

ВАРІАНТ № 17

1. Обчислити:

$$\left(\frac{3}{8}+2\frac{1}{7}\cdot 1\frac{1}{20}\right):\left(-\frac{3}{16}\right).$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+3x-4=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^5\left(b^2\right)^4}{\left(a^3\right)^2 b^8}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $4\cdot 2^{x-1}=\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{x-1}=3-x$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(x-3)\le 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{2x-1}{x-3}\le 1.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)\cdot\sin 2\alpha.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо п'ятий її член дорівнює 9, а шостий 13.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-3x^2-45x+15$ на відрізку $[0;10]$.

10. Катер пройшов 28 км за течією річки на 2 години швидше, ніж 96 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

ВАРІАНТ № 18

1. Обчислити:

$$\frac{15}{8}\cdot\left(\frac{5}{6}+1{,}3\right)-\frac{5}{3}:\frac{1}{6}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+2x-15=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^4\right)^3\left(b^4\right)^6}{\left(a^2\right)^7 b^{20}}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $9\cdot 3^{x+2}=\frac{1}{27}$; б) $\sqrt{5-x}=x+1$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(x-2)\geq 3.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x-5}{x-2}\leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$(\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\,\sin 2\alpha)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1=2$, а четвертий $b_4=-54$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+3x^2-24x+5$ на відрізку $[1;4]$.

10. Скільки грамів 25-відсоткового і скільки грамів 40-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 50 кг 34-відсоткового розчину?

ВАРІАНТ № 19

1. Обчислити:

$$\left(8-2\frac{2}{15}\cdot 3\frac{1}{8}+1\right):\frac{7}{9}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+x-6=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^4 b^6}{\left(a^7\right)^2\left(b^2\right)^2}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $8\cdot 2^{2x-1}=\frac{1}{4}$; б) $\sqrt{x-2}=x-4$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_5(x+1)<1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-9}{x-5}\le 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\operatorname{tg}\alpha\,(\sin 2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos 2\alpha+1.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо шостий і сьомий члени дорівнюють 29 і 35 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+6x^2+9x-7$ на відрізку $[-2;2]$.

10. Відстань від А до В залізницею дорівнює 105 км, а річкою – 150км. Поїзд з пункту А виходить на 2 години пізніше від пароплава і прибуває до В на 15 хв раніше. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 30 км/год більша за швидкість пароплава.

ВАРІАНТ № 20

1. Обчислити:

$$\frac{17}{8} - \left(2{,}5 - 2\frac{1}{3}\right) : 1\frac{1}{3}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^5\left(b^4\right)^7}{a\left(b^6\right)^5}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $27 \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{3}$; б) $\sqrt{14 - x} = x - 2$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_4 (x+3) < 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x-2}{x-4} \le 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}\right) \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_1 = 2$ і $b_4 = 54$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$ на відрізку $[-2; 3]$.

10. Два маляри, працюючи разом, можуть пофарбувати фасад будинку за 16 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожен з них, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 24 години менше, ніж другому?

ВАРІАНТ № 21

1. Обчислити:

$$\left(8-3\frac{4}{7}:\frac{1}{2}\right):\frac{3}{7}+2.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+6x+8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^4\right)^2 b^5}{a^6\left(b^3\right)^2}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $4\cdot 2^{3x-3}=\frac{1}{16}$; б) $\sqrt{3-x}=x-1$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\lg\left(3x+4\right)\geq 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{5x-2}{x-3}\leq 4.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

8. Знайти перший член арифметичної прогресії, якщо шостий її член дорівнює 22, а другий 6.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=4x^3-27x^2+24x-6$ на відрізку $[0;2]$.

10. Катер пройшов 18 км за течією річки на 2 години швидше, ніж 26 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 5 км/год.

ВАРІАНТ № 22

1. Обчислити:

$$-3\cdot\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{6}+1{,}3\right)\cdot 1\frac{7}{8}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+3x-10=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^5\right)^2 b^4}{\left(b^2\right)^2 a^{13}}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $9\cdot 3^{1-2x}=\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{x+1}=1-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(5-x)\le 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x+4}{x+2}\le 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\cdot\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1=3$, а п'ятий $b_5=48$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-6x^2+9x+2$ на відрізку $[-1;2]$.

10. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен з них, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому?

ВАРІАНТ № 23

1. Обчислити:

$$\frac{7}{12}:3\frac{1}{2}+\left(1\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}-1\frac{4}{3}\right).$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2-2x-15=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^7\left(b^2\right)^2}{\left(a^4\right)^3 b^3}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $3\cdot 6^{x+3}=108$; б) $\sqrt{2x+9}=3-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_8(3x-10)\le\frac{1}{3}.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{5x-9}{x-4}\le 4.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}-\cos^2 2\alpha.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо шостий і сьомий члени дорівнюють 8 і 11 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+3x^2-45x+7$ на відрізку $[-1;4]$.

10. Відстань від пункту А до В по шосе дорівнює 180 км, а залізницею – 210км. Автомобіль з пункту А виїхав на 30 хв пізніше від поїзда і прибув до В на 45 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша за швидкість поїзда.

ВАРІАНТ № 24

1. Обчислити:

$$\frac{5}{3}:\frac{2}{3}+\left(1\frac{3}{5}-2{,}5\right)\cdot\frac{5}{3}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+2x-8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^2\right)^3\left(b^5\right)^6}{a^7\left(b^9\right)^3}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $27\cdot 3^{3x+1}=\frac{1}{9}$; б) $\sqrt{x+3}=x+1$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(x-4)\geq 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x+5}{x+1}\leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_1=8$ і $b_4=1$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3+3x^2-9x+5$ на відрізку $[-1;2]$.

10. Скільки грамів 4-відсоткового і скільки грамів 10-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 180 г 6-відсоткового розчину?

ВАРІАНТ № 25

1. Обчислити:

$$1\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{27}{5}:1\frac{2}{7}-1\frac{1}{5}\right).$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+8x+15=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^3\left(b^3\right)^2}{\left(a^0\right)^5 b^8}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $25\cdot 5^{2x+1}=\frac{1}{25}$; б) $\sqrt{x-1}=x-3$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(x-4)\le 3.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-3}{x-2}\le 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

8. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо другий її член дорівнює $a_2=-12$, а четвертий $a_4=-6$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=4x^3-15x^2+12x+7$ на відрізку $[1;3]$.

10. Човен, власна швидкість якого становить 8 км/год, пройшов 15 км за течією річки і таку саму відстань проти течії, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки.

ВАРІАНТ № 26

1. Обчислити:

$$\frac{12}{7}\cdot\left(-1\frac{3}{4}:\frac{3}{2}+2\frac{1}{3}\right).$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+5x+4=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^5\right)^2\left(b^3\right)^2}{\left(a^3\right)^3 b^4}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $\frac{1}{8}\cdot 2^{2-x}=4$; б) $\sqrt{5+x}=1-x$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_9\left(2x+1\right)\geq\frac{1}{2}.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-2}{x-4}\leq 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-1}+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha\right)\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$$

8. Знайти знаменник q зростаючої геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1=2$, а третій $b_3=18$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3-9^2-72x+3$ на відрізку $[-2;1]$.

10. Після того, як змішали 60-відсотковий і 30-відсотковий розчини кислоти, отримали 600г 40-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

ВАРІАНТ № 27

1. Обчислити:

$$3+2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2-2x-8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^2\right)^3 b^{12}}{a^5\left(b^2\right)^5}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{1}{16}\cdot 2^{2-x}=8$; б) $\sqrt{x-2}=4-x$.

5. Розв'язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(4-x)\le 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{4x-7}{x-3}\le 3.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\operatorname{ctg}\alpha\,(\sin 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha)+\cos 2\alpha.$$

8. Знайти перший член a_1 арифметичної прогресії, якщо п'ятий і шостий члени дорівнюють 8 і 5 відповідно.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3-6x+3$ на відрізку $[0;3]$.

10. З міста А в місто В, відстань між якими дорівнює 300 км, виїхали одночасно дві машини. Одна з них рухалась зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж друга, а тому прибула до пункту призначення на 1 год раніше за другу. Знайдіть швидкість кожної з машин.

ВАРІАНТ № 28

1. Обчислити:

$$-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)+1\frac{7}{8}\cdot 8.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+7x+12=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^3\left(b^2\right)^4}{a^{10}\left(b^2\right)^3}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $9\cdot 3^{1-x}=\frac{1}{3}$; б) $2\sqrt{x+2}=x-1$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_3(x+1)\geq 2.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{2x-9}{x-4}\leq 1.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\cdot\sin 2\alpha.$$

8. Знайти знаменник q геометричної прогресії $\{b_n\}$, якщо відомо, що $b_2=4$ і $b_5=32$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-3x^2-9x+2$ на відрізку $[-2;2]$.

10. Двоє робітників, працюючи разом виконали виробниче завдання за 12 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожен з них, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 7 години менше, ніж другому?

ВАРІАНТ № 29

1. Обчислити:

$$-5:2\frac{1}{2}+3\left(2-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right).$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2+6x+8=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{a^{12}\left(b^0\right)^7}{\left(a^2\right)^5 b^3}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $2\cdot 3^{x+2}=54$; б) $\sqrt{14-x}=2-x$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_6(3-x)\le 1.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{2x-5}{x+2}\ge 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot \operatorname{tg}\alpha)\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

8. Знайти різницю d арифметичної прогресії, якщо перший її член $a_1=-4$, а восьмий $a_8=10$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=2x^3-3x^2-12x+4$ на відрізку $[1;4]$.

10. Турист проплив на моторному човні 25 км і повернувся назад на плоту. Знайдіть швидкість течії річки, якщо на плоту турист плив на 10 год довше, ніж човном, а власна швидкість човна становить 12 км/год.

ВАРІАНТ № 30

1. Обчислити:

$$\left(-6\frac{3}{4}+4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}\right):\frac{3}{8}.$$

2. Знайти найбільший корінь рівняння:

$$x^2-4x-5=0.$$

3. Спростити степеневий вираз:

$$\frac{\left(a^3\right)^5\left(b^4\right)^2}{\left(a^6\right)^2 b^8}.$$

4. Розв’язати рівняння:

а) $4\cdot 2^{2-x}=\frac{1}{4}$; б) $\sqrt{15-x}=x-3$.

5. Розв’язати логарифмічну нерівність:

$$\log_2(2x+4)\geq 3.$$

6. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівності:

$$\frac{3x-8}{x+1}\leq 2.$$

7. Спростити тригонометричний вираз:

$$\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

8. Знайти суму перших трьох членів геометричної прогресії, якщо перший її член дорівнює 2, а знаменник 3.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=1-3x^2-x^3$ на відрізку $[-1;1]$.

10. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо другій бригаді на це потрібно на 12 години більше ніж другій?

ПРОГРАМА КУРСУ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1. Дійсні числа, порівняння чисел та дії з ними. Числові множини та співвідношення між ними.

2. Відношення та пропорції. Відсотки. Основні задачі на відсотки. Текстові задачі.

3. Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їх перетворення.

4. Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи. Застосування рівнянь, нерівностей та їх систем до розв’язування текстових задач.

5. Числові послідовності.

6. Функціональна залежність. Лінійні, квадратичні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції; їх основні влвстивості.

7. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання.

8. Дослідження функцій за допомогою похідної. Побудова графіку функції.

9. Первісна та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтегралу до обчислення площ плоских фігур.

10. Перестановки, комбінації, розміщення. Комбінаторні правила суми та добутку. Ймовірність випадкової події. Вибіркові характеристики.

11. Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості.

12. Коло та круг.

13. Трикутники.

14. Чотирикутники.

15. Многокутники.

16. Геометричні величини та їх вимірювання.

17. Координати та вектори на площині.

18. Геометричні перетворення.

19. Прямі та площини у просторі.

20. Многогранники, тіла й поверхні обертання.

21. Координати та вектори у просторі.

ДОДАТКИ

Символи та позначення

1. $a \in A$ – а належить множині А.
2. $a \overline{\in} A$ - а не належить множині А.
3. $A \subset B$ – А підмножина В.
4. $\varnothing$ - пуста множина.
5. $A \cup B$ – об'єднання множин А та В.
6. $A \cap B$ – перетин множин А та В.
7. $\exists$ - існує.
8. $\overline{\exists}$ - не існує.
9. $\forall\ a \in A$ – для довільного а з множини А.
10. ∞ - „нескінченість”.
11. А $\Rightarrow$ В – з А випливає В.
12. А $\Leftrightarrow$ В – А еквівалентне В.
13. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$.
14. $\mathop{\Pi}\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$.
15. e = $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}^n$ = 2,718281828... – основа натурального логарифму.
16. Факторіал $\begin{cases} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathop{\Pi}\limits_{k=1}^{n} k \quad (n \in N), \\ 0! = 1. \end{cases}$
17. N, Q, R, C – множини, відповідно, натуральних, раціональних, дійсних та комплексних чисел. Z – множина цілих чисел.

Числові множини

N – множина натуральних чисел 1,2,3,..., n,… .

Z – множина цілих чисел 0, ± 1, ± 2,..., $\pm$n,... .

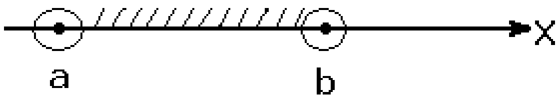
Q – множина раціональних чисел (виду p/q, (p,q) $\in$ Z, q $\neq 0$). Найбільший спільний дільник p і q дорівнює 1.

I – множина ірраціональних чисел ... $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{5}$, e, π, ...

R – множина дійсних чисел, R = Q $\cup$ I.

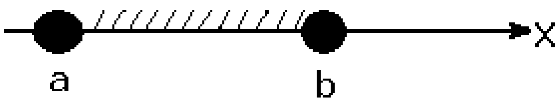
Числові проміжки

Інтервал: $a < x < b$



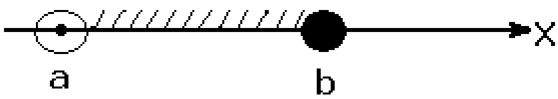
$x \in]a, b[$.

Відрізок: $a \le x \le b$



$x \in [a, b]$.

Напівінтервал: $a < x \le b$

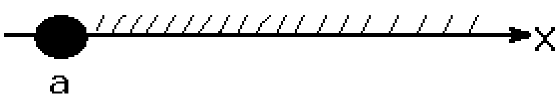


$x \in]a, b]$.

$a \le x < b$

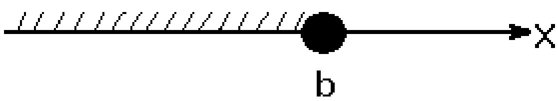
$x \in [a, b[$ (або $[a, b)$).

Промінь: $a \le x < +\infty$



$x \in [a, +\infty[$; $(x \ge a)$.

$-\infty < x \le b$



$x \in [-\infty, b[$; $(x \le b)$.

Дроби

$\frac{a}{b} = a : b$ - звичайний дріб $(a, b \in Z, b \neq 0)$.

Основна властивість дробу: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$;

Пропорція: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, якщо $a \cdot d = b \cdot c$.

Властивості дробів:

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$;

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;

4. $\frac{a}{b} \cdot m = m \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b}$;

5. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \cdot m}$, $(m \neq 0)$;

6. $m : \frac{a}{b} = \frac{m \cdot b}{a}$;

7. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;

8. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$;

9. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$;

10. $A \pm \frac{a}{b} = \frac{A \cdot b \pm a}{b}$;

Степені

Для будь-якого дійсного числа $a \in R$, $a > 0$, $n \in N$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ... \cdot a}_{n-множників}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

a – основа, n – показник степеня.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
3. $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$;
4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

$(a > 0; b > 0; c > 0; m, n \in R; a, b, c \in R)$.

Корені

Корінь n-го степеня з числа a – це таке число x, що $x^n = a$ $(x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}})$.

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;
3. $\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$;
4. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$;
5. $\sqrt[n]{a^{n \cdot m} = a^m}$;
6. $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$;

7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

8. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot k}}$;

9. $\sqrt[n]{a^{m}} = (\sqrt[n]{a})^{m}$;

10. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ ($\sqrt[n]{a}$ - арифметичне значення кореня при $a \geq 0$),

(a, b, c) $\in R,\ a \geq 0, b > 0, c \geq 0, (n, k) \in N, n > 1, m \in Z$.

Логарифми

$x = \log_a b$ – логарифм числа $b > 0$ за основою $a > 0$ ($a \neq 1$), якщо $a^x = b$.

Основна логарифмічна тотожність $a^{\log_a b} \equiv b$.

1. $\log_a 1 = 0$;

2. $\log_a a = 1$;

3. $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$, $(b \cdot c > 0)$;

4. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|$, $(b \cdot c > 0)$;

5. $\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$;

6. $\log_{a^m} (b^n) = \dfrac{n}{m} \cdot \log_a b$;

7. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$;

8. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

10. $\log_{10} b = \lg b$;

11. $\log_e b = \ln b$.

Модуль (абсолютна величина)

$$|a| = \begin{cases} a, & якщо \quad a \geq 0, \\ -a, & якщо \quad a < 0, \end{cases} \quad (a \in R).$$

1. $|a| \geq 0$;

2. $|a| = |-a|$;

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;

5. $|a|^2 = a^2 = |a^2|$;

6. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

7. $||a| - |b|| \leq |a - b|$;

8. $|a - b| \leq |a| + |b|$;

9. $||a| - |b|| \leq |a + b|$;

10. $|a| \leq A$ й $|b| \leq B \Rightarrow |a + b| \leq A + B, |a \cdot b| \leq A \cdot B$.

Формули скороченого множення

1. $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$;

3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$;

4. $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$;

5. $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$;

6. $(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab \cdot (a+b)$;

7. $(a-b)^3 = (a-b) \cdot (a-b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab \cdot (a-b)$;

8. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$;

9. $a^2 + b^2 = (a + b + \sqrt{2ab})(a + b - \sqrt{2ab})$.

Ірраціональні вирази

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a-2\sqrt{ab}+b$;

2. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+2\sqrt{ab}+b$;

3. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$;

4. $(a-b\sqrt{c})(a+b\sqrt{c}) = a^2-b^2\cdot c$;

5. $\sqrt{a\pm b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2\cdot c}}{2}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2\cdot c}}{2}}}$;

6. $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$;

7. $\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$;

8. $\frac{a}{1\pm\sqrt{b}} = \frac{a\cdot(1\mp\sqrt{b})}{1-b}$;

9. $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{a\cdot(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$;

10. $\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{c}}} = \frac{a\cdot\sqrt{(b^2-c)(b-\sqrt{c})}}{b^2-c}$;

11. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) = a\pm b$;

12. $\frac{a}{1\pm\sqrt[3]{b}} = \frac{a\cdot(1\mp\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{1\pm b}$;

13. $\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}} = \frac{a\cdot(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b\pm c}$;

14. $a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2b}, & \text{якщо} \quad a<0, \\ \sqrt{a^2b}, & \text{якщо} \quad a\ge 0. \end{cases}$

Основна теорема арифметики: Довільне складене число m можна розкласти на прості множники, тобто представити його у канонічному вигляді: $m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - прості числа; $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ – натуральні числа.

Середнє арифметичне чисел: $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Середнє геометричне чисел: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Задачі на відсотки («проценти»):

1. Знаходження відсотка від числа A:

   $A = 100\ \%,$

   $x = p\ \%,$ $\qquad x = \dfrac{A \cdot p}{100}$.

2. Знаходження числа за його відсотком: нехай $p\ \%$ деякого числа x дорівнюють числу a, тоді $x = \dfrac{a \cdot 100}{p}$.

3. Знаходження відсоткового відношення двох чисел a і b: $\dfrac{a}{b} \cdot 100\%$.

Властивості числових нерівностей:

1. Якщо $a>b$, то $b<a$.
2. Якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$ (властивість транзитивності).
3. Якщо $a>b$ і $c>0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.
4. Якщо $a>b$ і $c<0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.
5. Якщо $a>b$ і $c>d$, то $a + c > b + d$.
6. Якщо $a>b$ і $c>d$, де $a>0, b>0, c>0, d>0$, то $ac>bd$.
7. Якщо $a>b$ і $c<d$, то $a - c > b - d$.
8. Якщо $a > b \geq 0$, $n \in N$, то $a^n > b^n$
9. Якщо $a > b$, причому a і b одного знаку, то $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
10. Якщо $a > b > 0$ і $0 < c < d$, то $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$.

Властивості нерівностей з модулями:

1. $|a+b| \le |a| + |b|$, знак рівності – при $ab \ge 0$.

2. $|a-b| \ge |a| - |b|$, знак рівності – при $(a-b)\cdot b \ge 0$.

3. $|a-b| \le |a| + |b|$, знак рівності – при $ab \le 0$.

4. $|a+b| \ge |a| - |b|$,знак рівності – при $(a+b)\cdot b < 0$ або $ab = 0$, якщо $|a| \ge |b|$.

5. $|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$.

6. $|a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$.

7. $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \ge \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$, знак рівності при $a_1 = ... = a_n$.

Суми чисел:

При $n \in N$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n\cdot(n+1);$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6};$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n\cdot(4n^2-1)}{3};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left\{\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right\}^2;$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1);$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(3n^2+3n-1)}{30};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1};$$

Комплексні числа:

$Z = a + b \cdot i$, де a, b – дійсні числа, які називаються відповідно дійсною ($\operatorname{Re} Z = a$) і уявною ($\operatorname{Im} Z = b$) частинами комплексного числа *Z,* яке представлене у алгебраїчній формі комплексного числа; символ $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця:

$i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1, \ldots$

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	a^x	$a^x \ln a$
6	e^x	e^x
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
9	$\sin x$	$\cos x$
10	$\cos x$	$-\sin x$
11	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Таблиця невизначених інтегралів:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \neq 0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 1. – К.: КУЕТТ, 2006. – 337 с.
2. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Курс вищої математики. – Т. 2. – К.: КУЕТТ, 2006. – 334 с.
3. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 1. – К.: КУЕТТ, 2007. – 335 с.
4. Крюков М. М., Крижановська Т. В. Математичний практикум. – Ч. 2. – К.: КУЕТТ, 2007. – 396 с.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 623 с.
6. Васильченко І. П. Математика для економістів. – К.: Кондор, 2006.
7. Грисенко М. В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.
8. Ляшенко О., Черняк О., Кравець Т. та ін. Вища математика для економістів: Підручник. – Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 547 с.
9. Рудницький О. Г. Математика для економістів. Конспект лекцій для студентів денної та заочної форми навчання. – ДЕТУТ, 2010. – 265 с.

Навчально-методичне видання

КРИЖАНОВСЬКА ТЕТЯНА ВАСИЛІВНА
КЛЕЦЬКА ТЕТЯНА СЕРГІЇВНА
АНДРЕЙЦЕВ АНДРІЙ ЮРІЙОВИЧ
КІЛЬЧИНСЬКИ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСАНДРОВИЧ
СЕМЕНЕНКО ТЕТЯНА МИКОЛАЇВНА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
для виконання вхідного контролю
для студентів денної форми навчання за спеціальностями
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» і
275 «Транспортні технології»

Відповідальна за випуск – Клецька Т.С.
Редакція авторська

Підписано до друку 05.12.2016. Формат 60×84/16. Папір – офсетний. Спосіб друку – ризографія. Замовлення № 173/16 . Наклад 30 примірників.

Надруковано в Редакційно-видавничому центрі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію: Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р.
03049, м. Київ-049, вул. Миколи Лукашевича, 19