КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТЕХНОЛОГІЙ ТРАНСПОРТУ

Кафедра АТЗ і ОТ на залізничному транспорті

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт для студентів
спеціальностей «Залізничні споруди», «Рухомий склад та спеціальна техніка
залізничного транспорту» усіх форм навчання

К и ї в   2 0 0 3

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри (протокол № 8 від 9.04.2003р.), та на засіданні методичної ради університету (протокол № 9 від 15.04.2003р.).

Методичні вказівки містять опис лабораторних робіт, методику їх виконання, а також варіанти індивідуальних завдань.

Призначені для студентів спеціальності «Залізничні споруди»,«Рухомий склад та спеціальна техніка залізничного транспорту» усіх форм навчання і відповідають програмі курсу «Математичні моделі у розрахунках на ЕОМ».

Укладачі: А. Ю. Рисцова, канд. фіз.-мат. наук.
Л. В. Філіпович, канд. техн. наук;
Ю.О.Коваль

Рецензенти: Т.В.Крижановська, канд. фіз.-мат. наук;
А.В.Кузьмін, канд. фіз.-мат. наук.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки розроблені на базі програми курсу “Математичні моделі у розрахунках на ЕОМ”.

Вони містять методичний матеріал та індивідуальні завдання для *виконання* лабораторних *робіт студентами під керівництвом викладача під час аудиторних занять*.

До складу лабораторних робіт внесені основні теми з програми курсу. Підготовка до виконання лабораторних робіт вимагає від студентів знань з курсів “Вища математика”, “Опір матеріалів”, “Комп’ютерна техніка та програмування” в обсязі програм для ВТНЗ.

Теоретичний матеріал подається у скороченій формі. Для детальнішого розгляду теоретичних матеріалів слід використовувати навчальний посібник з списку літератури за №1.

ТЕМА 1. Рішення математичних моделей, що зводяться до лінійних алгебраїчних систем.

Лабораторна робота № 1.

1.МЕТА РОБОТИ.

- Навчитися розв'язувати математичні моделі, що зводяться до лінійних систем.
- Навчитися досліджувати властивості систем, які впливають на накопичення похибки при обчисленнях на ЕОМ.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

2.3. Завантажити Exel та підготувати блок чарунок для обчислення визначника третього степеню з елементами що дорівнюють одиниці.

2.4. Виконати всі необхідні обчислення, щоб математична модель задачі була представлена як система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих K_1, K_2, K_3.

2.5. Внести у визначник замість одиниць свої коефіцієнти при K_1, K_2, K_3.

2.6. Зробити три копії такого визначника та відредагувати копії для обчислення Δ_1, Δ_2, Δ_3.

2.7. Записати у чарунках формули для обчислення коренів системи за методом Крамера та формули для обчислення a_1,a_2,a_3.

2.8. Проаналізувати рішення.

2.9. Обчислити *число обумовленості* матриці задачі. Які можна зробити висновки?

3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

3.1. Що таке число обумовленості матриці.

3.2. Яке число обумовленості матриці говорить про стійкість до похибок численного методу на ЕОМ.

3.2. Метод Крамера для рішення лінійної системи.

4. ЗМІСТ ЗВІТУ.

4.1. Номер роботи, назва теми, номер варіанту.

4.2. Короткі відповіді на контрольні запитання.

4.3. Постановка задачі, малюнок, математична модель, метод розв'язку, результати обчислень на ЕОМ.

4.4. Аналіз числа обумовленості та аналіз результату, висновки.

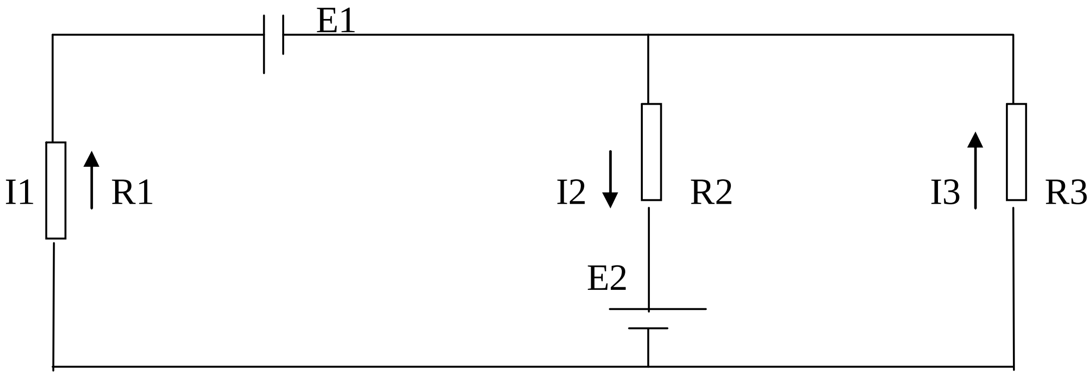
4.5. Файл з обчисленнями має бути збереженим на дискеті.

5. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь виникають у задачах обробки даних, при дискретизації лінійних диференціальних задач методом кінцевих елементів, розрахунку електричних ланцюгів і складних гідравлічних систем, у деяких моделях економічних задач, у механічних системах з декількох твердих тіл (шарнірів, гнучких зв'язків і стрижнів), на які діє просторова система сил і т.п.

Роздивимося на прикладі побудову та розв’язок такої математичної моделі.

Нехай потрібно визначити розподіл токів в електричній схемі без амперметра.



Опір ділянок ланцюга R1,R2,R3 і електрорушійна сила джерел току E1,E2 відомі. Позитивні напрямки токів показані на малюнку стрілками.

Для визначення сили току використовуємо відомі фізичні закономірності і математичні засоби. Нагадаємо перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума токів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Другий закон Кірхгофа стверджує, що в будь-якому замкнутому контурі, алгебраїчна сума добутку сил токів на опори відповідних ділянок цього контуру дорівнює алгебраїчній сумі прикладеної до нього ЕДС:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} E_i, m \le n.$$

Використовуючи ці закони для ланцюга можна записати:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 + E_2 \\ -I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases}$$

Таким чином, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь із невідомими I1,I2,I3.

Якщо матриця системи квадратна і визначник системи відмінний від нуля, то система завжди сумісна і має єдине рішення, що може бути знайдене по *формулах Крамера* . Якщо Δ - визначник системи, $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ визначники, де i-й стовпчик замінений на вектор правих частин, то рішення подається у вигляді

$$I_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \text{i= 1,…,N}$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}$ а Δ_1, Δ_2, Δ_3 обчислюються заміною першого, другого та третього стовпчика на праву частину $\begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix}$ відповідно.

Для аналізу системи що до стійкості до похибок обчислення на ЕОМ треба підрахувати *число обумовленості* матриці системи. Тут знаком $\|*\|$ - позначені норми матриць.
де норма матриці підраховується за формулою

$$condA = \|A^{-1}\|\|A\|$$

$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ і називається така норма євклідова.

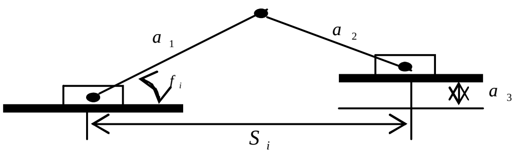
Якщо число обумовленості матриці невелике (порядку одиниці), то матриця системи зветься *добре обумовленою*.

Достовірність отриманого на ЕОМ рішення визначається формулою, що визначає *число обумовленості системи.* Ця формула погоджує

$$m = condA \left[\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right]$$

властивості матриці системи і похибку в завданні вихідних даних.

У реальних задачах є сенс розглядати ті системи, для яких оцінка числа m помітно менша за одиницю, наприклад, m<0.01. Тут $\Delta A = A - \overline{A}, \Delta b = b - \overline{b}$ відбивають похибки в матриці та у правих частинах рівняння системи.



6.ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.

Наведений на малюнку кривошипно-шатунний механізм описується рівняннями

$$K_1 S_i \cos(f_i) + K_2 \sin(f_i) - K_3 = S_i^2,$$ при i=1,2,3.

Значення для a задаються формулами:

$a_1 = K_1 / 2,$ $\quad a_2 = \sqrt{a_1^2 + a_3^2 - K_3}$ $\quad a_3 = \dfrac{K_2}{2 \cdot a_1}$

Спроектувати пристрій, що відповідає наступним умовам:[1]

Вариант	***i***	***Si***	***Fi (в градусах)***
1	1	1,0	20
	2	1,2	45
	3	2,0	60
2	1	0,9	30
	2	1,1	45
	3	1,9	60
3	1	1,1	20
	2	1,3	45
	3	2,1	60
4	1	1,1	30
	2	1,4	45
	3	2,2	60
5	1	1,2	30
	2	1,5	45
	3	2,2	60
6	1	1,0	30
	2	1,2	45
	3	2,0	60
7	1	1,1	30
	2	1,4	45
	3	2,0	60
8	1	1,1	20
	2	1,2	45
	3	2,02	60
9	1	0,9	30
	2	1,15	45
	3	1,9	60
10	1	1,1	20
	2	1,35	45
	3	2,1	60
11	1	1,1	30
	2	1,4	45
	3	2,25	60
12	1	1,25	30
	2	1,5	45
	3	2,2	60
13	1	1,0	30
	2	1,2	45
	3	2,5	60
14	1	1,1	35
	2	1,4	45
	3	2,0	60

[1] *Примітка.* Для побудови математичної моделі записати тричі рівняння, що описує роботу механізму і *знайти K1,K2,*К3

ТЕМА 2. Рішення математичних моделей, що зводяться до нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем.

Лабораторна робота № 2 (частина I)

1.МЕТА РОБОТИ.

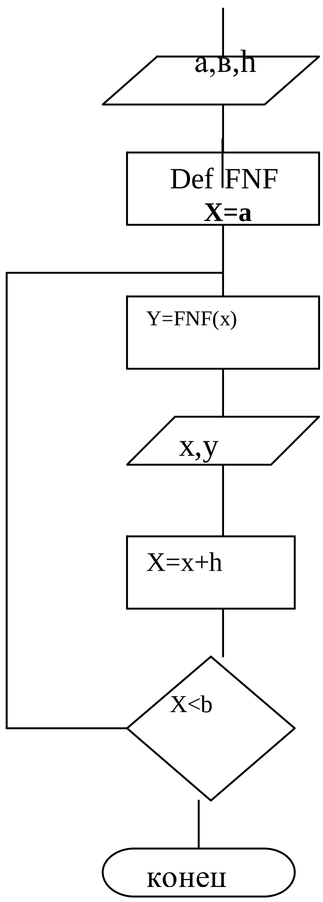
- Підготувати програми чисельного методу розв’язу математичних моделей, що зводяться до нелінійних систем або одного нелінійного рівняння.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

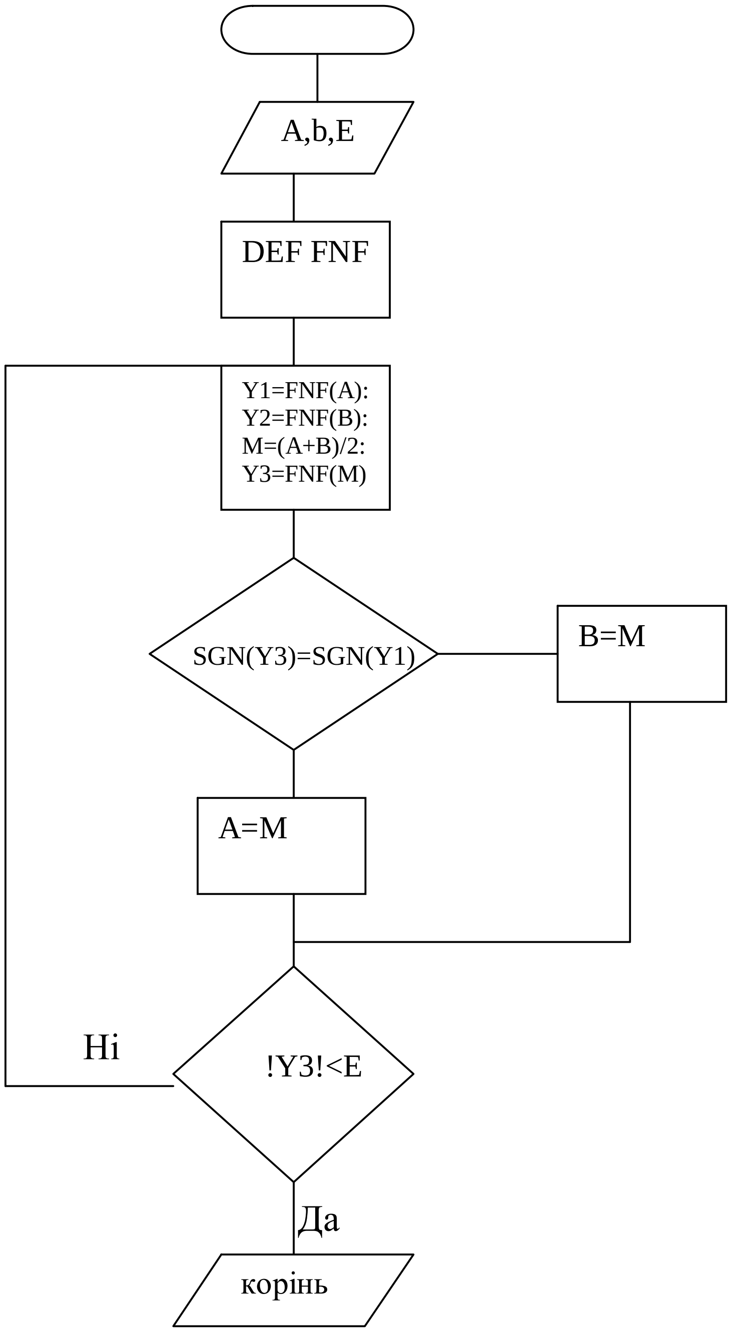
2.1. Вивчити навчальний матеріал і підготувати відповіді на контрольні питання.

2.2. Для довільної нелінійної функції скласти програму на мові BASIC табуляції функції на довільному інтервалі (a,b).

Використати наступний алгоритм:



2.3. Скористатися для пошуку кореня на інтервалі методом ділення відрізку надвоє, блок-схема алгоритму наводиться:



2.4. Зберегти файли для продовження роботи в наступній лабораторній.

3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

3.1. Що таке корінь нелінійного рівняння?

3.2. Що вказує на те, що одновимірна нелінійна функція має корінь на деякому інтервалі (а,в)?

3.3. Метод ділення надвоє для рішення нелінійного рівняння.

4. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ.

Нелінійні рівняння або системи нелінійних алгебраічних рівнянь являються математичними моделями широкого класу розрахункових задач. Так, для тензорів напруг власні значення визначають головні нормальні напруги, а власними векторами задаються напрямки, пов'язані з цими значеннями.

При динамічному аналізі механічних систем власні значення відповідають власним частотам коливань, а власні вектори характеризують моди цих коливань.

При розрахунку конструкцій власні значення дозволяють визначити критичні навантаження, перевищення яких призводить до втрати стійкості.

Рівняння *Ах=лх* має ненульове рішення тоді і тільки тоді, коли визначник матриці (А-лЕ) дорівнює нулю :det(А-лЕ) =0. Цей визначник називають *характеристичним визначником матриці А*, а рівняння називають *характеристичним рівнянням* матриці А. У розгорнутому виді це характеристичне рівняння записується

$$c_1\lambda^n + c_2\lambda^{n-1} + \cdots + c_n\lambda + c_{n+1} = 0$$

де коефіцієнти є цілком конкретні числа.

Наприклад, нехай маємо матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, матриця $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді *det(А-лE)* можна записати як

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)*(5-\lambda) - 4*3 = -2 + \lambda^2 - 7\lambda$$

Одержаний поліном треба прирівняти до нуля і ми отримали характеристичне нелінійне алгебраїчне рівняння.

Корені нелінійних рівнянь і систем.

Звичайно нелінійні рівняння поділяють на *алгебраїчні і трансцендентні рівняння,* хоча вони часто вирішуються тими самими методами.

Алгебраїчним рівнянням з одним невідомим називають рівняння вигляду:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Для алгебраїчних рівняння існує ряд тверджень, що дозволяють визначити число їхніх коренів.

- Алгебраїчне рівняння порядку *n* має *n* коренів, дійсних або комплексних.
- Якщо всі коефіцієнти рівняння дійсні, то комплексні корені утворять комплексно-сполучені пари.
- Число позитивних дійсних коренів дорівнює (або менше на ціле число) числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_i.
- Число негативних дійсних коренів дорівнює (або менше на ціле число) числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_i при заміні x на -x .

- Якщо добуток значень нелінійної функції *f(x)* на кінцях інтервалу менше нуля, то усередині цього інтервалу є непарна кількість коренів.
- Якщо такий добуток більше нуля, то є парне число коренів усередині інтервалу або їх взагалі немає.
- ***Якщо добуток менше нуля, а похідна від функції не змінює знак на аналізованому відрізку, то є один корінь.***

Нелінійні рівняння, що містять тригонометричні функції або інші спеціальні функції, наприклад lg або *exp*, називаються *трансцендентними*.

Методи рішення нелінійних рівнянь такого типу діляться на прямі й ітераційні. Перші дозволяють знайти рішення безпосередньо за допомогою формул і завжди забезпечують одержання точного рішення. Відомим прикладом такого роду є формула коренів квадратного рівняння. У ітераційних методах задається процедура рішення у вигляді багатократного застосування деякого алгоритму. *Отримане рішення завжди є наближенним, хоча може бути як завгодно близьким до точного.* **Ітераційні методи найбільш зручні для реалізації на ЕОМ і тому докладно розглядаються.** Вважається, що розв'язування завдання полягає в пошуку дійсних коренів (нулів) рівняння $f(x) = 0$.

Методи рішення нелінійних рівнянь і систем.

Відомі прямі методи пошуку коренів алгебраїчних рівнянь другого і третього ступеня, проте для рівнянь більш високих ступенів треба використовувати ітераційні методи.

Метод ділення відрізку надвоє складається з наступних операцій. Спочатку обчислюються значення функцій у точках, розташованих через рівні інтервали на осі x. Це робиться доти, поки не будуть знайдені два послідовних значення функції $f(x_n)$ і $f(x_{n+1})$, що мають протилежні знаки. Нагадаємо, якщо функція неперервна, зміна знака вказує на існування кореня в цьому інтервалі.

Потім по формулі $x_{ср}=(x_{n+1}+x_n)/2$ обчислюється середнє значення x в інтервалі (x_{n+1},x_n) і знаходиться значення функції $f(x_{ср})$. Якщо знак його збігається зі знаком $f(x_n)$, те надалі замість $f(x_n)$ використовується $f(x_{ср})$. Якщо знак протилежний знаку $f(x_n)$, то надалі замість $f(x_{n+1})$ використовується $f(x_{ср})$. У результаті інтервал, у якому міститься значення кореня, звужується. Якщо $f(x_n)$ достатньо близько до нуля, то процес закінчується, у протилежному випадку він продовжується. Хоча метод половинного розподілу не має високу обчислювальну ефективність, із збільшенням числа ітерацій він забезпечує одержання усе більш точного наближеного значення до кореня.

ТЕМА 2. Рішення математичних моделей, що зводяться до нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем.

Лабораторна робота № 3 (частина II)

1.МЕТА РОБОТИ.

- По результатам попередньої роботи провести пошук коренів нелінійного рівняння для Вашого варианту.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

2.1. Виписати математичну модель для задачі згідно індивідуального варіанту.

2.2. Побудувати нелінійний поліном, як що в варіанті маєте вирішувати задачу про власні значення.

2.3. Визначити по програмі табуляції для отриманої функції інтервал, де функція перемінює знак, це вказує на наявність у цьому інтервалі кореня.

2.4. Визначити корінь по програмі пошуку кореня.

2.6. Проаналізувати знайдений корінь, чи є досить мале значення нелінійної функції у отриманій точці. Як що це так, то Ви отримали корінь.

2.7. Понизити степінь полінома, для цього розділити його на (*X*-к*орінь*).

2.8. Зробити загальний звіт по роботах №2 та №3.

3. ЗМІСТ ЗВІТУ.

3.1. Номер роботи, назва теми, номер варіанту.

3.2. Короткі відповіді на контрольні запитання.

3.3. Постановка задачі, малюнок, математична модель, метод розв'язку, результати обчислень на ЕОМ.

3.4. Аналіз результатів, висновки.

3.5. Файл з обчисленнями має бути збереженим на дискеті.

4. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.

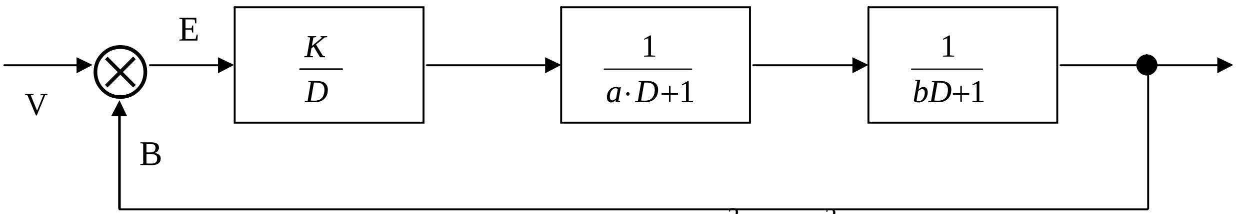
При хімічній реакції $CO + 0{,}5O_2 \rightleftarrows CO_2$ відсотковий уміст диссоціірованного моля CO_2 визначається рівнянням $(P/K - 1) x3 + 3x - 2 = 0$, де P - тиск, K - константа рівноваги, що залежить від температури. Знайти x при

Вариант1. K = 1. 648, P = 1 ат

Вариант2 K = 1. 832, P = 1,1 ат

Примітка: у даному випадку, з огляду на умову задачі, нас цікавлять лише дійсні корені рівняння.

Вариант3. Визначення коренів характеристичного рівняння дозволяє з'ясувати, як впливає збільшення коефіцієнта підсилення на відносну усталеність керуючої системи. Тому що позитивні дійсні частини коренів характеристичного рівняння системи автоматичного регулювання відповідають експоненціальному розвитку перехідних процесів, тому їх варто уникати за будь-яку ціну. Для системи автоматичного регулювання



характеристичне рівняння має вигляд : $5D^3+13D^2+5D+2=0$

Вариант4. Для умови варианту 3 розглянути характеристичне рівняння $4D^3 + 12D^2 + 6D + 1 = 0$

Вариант5. Для умови варианту 3 розглянути характеристичне рівняння $12D^3 - 19D^2 - 5D - 2 = 0$

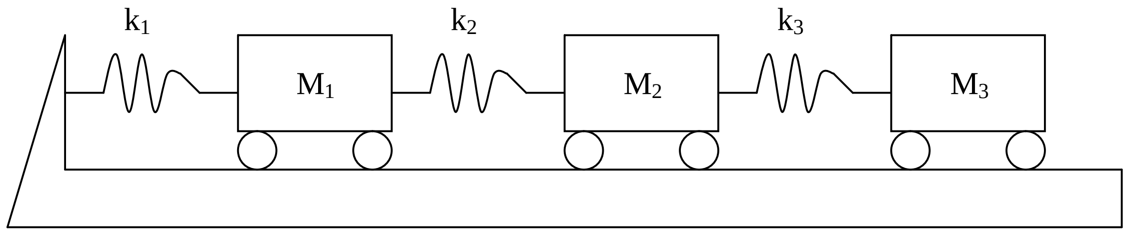
Вариант6. Для умови варианту 3 розглянути характеристичне рівняння $4D^3 + 9D^2 - 2D + 3 = 0$

Вариант7. Для довільного тривимірного твердого тіла можна ввести три моменти інерції щодо трьох взаємно перпендикулярних осей і три змішаних моменти інерції щодо трьох координатних площин. Відомо, що для несиметричного тіла при фіксованому початку координат існує єдина орієнтація координатних осей, при якії змішані моменти інерції обертаються в нуль. Такі осі називаються головними осями інерції, а відповідні моменти інерції - головними моментами інерції, серед яких є найбільший, найменший і маючий проміжне значення. Для матриці моментів інерції

$$\begin{bmatrix} 4{,}3 & 2{,}4 & 1{,}9 \\ 2{,}4 & 3{,}2 & 2{,}7 \\ 1{,}9 & 2{,}7 & 5{,}1 \end{bmatrix}$$

знайти три головни момента інерції.

Вариант8. Баржа призначена для перевозу через морську затоку зчіпки з трьох залізничних вагонів.



Буксир тягне її за носову частину. Значення мас вагонів і коефіцієнтів жорсткості сполучних елементів задані. Існує застереження, що в зчіпці вагонів при хвилюванні на затоці можуть виникнути резонансні подовжні коливання. *Обчислити три власні частоти даної механічної системи і порівняти їх із частотою хвилі, рівною 1 рад/с.* Власні частоти пов'язані з власними значеннями динамічної матриці D співвідношенням $w_{i}= \sqrt{1/л_i}$

По заданим масам вагонів і жорсткостям зчіпок сформована динамічна матриця D.

$$\begin{bmatrix} 40 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Вариант9. За умов варианту 8 розглянути динамічну матрицю

.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Трьохвісний тензор напруг можна уявити у вигляді матриці 3х3. Для визначення власних значень цієї матриці скласти характеристичне рівняння і звести його до кубічному поліному. Знайти головні напруги якщо:

Вариант	**Тензор**		
10	30	6	5
	6	40	7
	5	7	20
11	10	5	6
	5	20	4
	6	4	30
12	4,3	2,4	1,9
	2,4	3,2	2,7
	1,9	2,7	5,1
13	1	2	1
	2	3	2
	1	2	1
14	15	6	7
	6	40	5
	7	5	25

ТЕМА 3. Рішення математичних моделей задач механічного руху твердого тіла, яки формулюються у вигляді задач Коші.

Лабораторна робота №4 (частина І).

1.МЕТА РОБОТИ.

Навчитися розв’язувати звичайні диференційні рівняння з початковими умовами чисельними методами на ЕОМ.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

2.1. Вивчити навчальний матеріал і підготувати відповіді на контрольні питання.

2.2. Виписати математичну модель для задачі згідно індивідуального варіанту.

2.3. Звести діференціальне рівняння другого порядку до системи двох рівнянь першого порядку.

2.4. Виписати схему методу Рунге-Кутта

3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

3.1. Аналіз стійкості диференціального рівняння по Раусу-Гурвицу.

3.2. Необхідна і достатня умова стійкості для рівнянь другого порядку.

5. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ.

Моделі, що зводяться до диференціальних рівнянь.

Інженеру дуже часто припадає зштовхуватися з диференціальними рівняннями при розробці нових виробів або технологічних процесів, тому що велика частина законів фізики формулюється саме у видгляді диференційних рівнянь. По суті, будь-яка задача проектування, пов'язана з розрахунком потоків енергії або прямування тіл, у кінцевому рахунку зводиться до рішення диференціальних рівнянь.

Інтерес з боку математичних моделей викликають механічні системи і системи автоматичного регулювання.

Поступальний механічний рух описується диференціальним рівнянням:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

де $x(t)$ - переміщення центру маси;

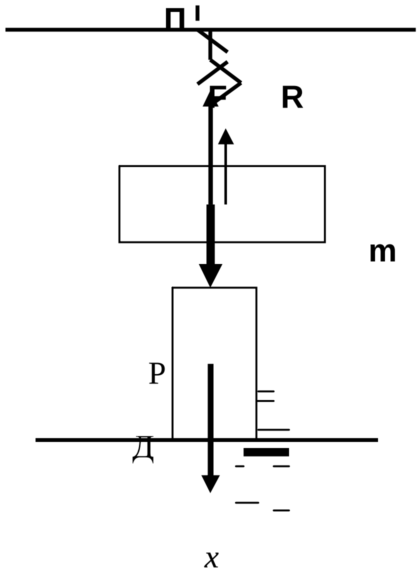
m - маса тіла;

B - коэфіцієнт опору руху;

K - постійний коефіцієнт;

$f(t)$ - зовнішня сила.

Розглянемо на прикладі, як виписати математичну модель для руху твердого тіла.



де вантаж масою *m* підвішений до вільного кінця пружини *П*. Коефіцієнт жорсткості для пружини *q* і пристрій, *що* демпфірує, Д створює *силу* опору руху R, пропорційну швидкості руху вантажу.

$$R = -Bv,$$

де *B* - постійний коефіцієнт, $v = dx/dt$ - швидкість руху вантажу. Знак мінус у рівнянні показує, що сила *R* спрямована убік, протилежну швидкості.
Направимо вісь *x* по вертикалі униз (уздовж осі пружини). Візьмемо початок відліку в точці статичної рівноваги вантажу. За початкові умови руху в цьому випадку приймемо:

$$t = 0,\ x = x_0 = a,\ x' = x'_0 = b.$$

При русі пружина одержує подовження $D = D_{cm} + x$, де D_{cm} - подовження пружини при статичній рівновазі ($x = 0, x' = 0$), а x - переміщення вантажу.

Сила пружини *F* визначається по формулі.

$$F = -q(D_{cm} + x).$$

Знак мінус указує, що сила спрямована вгору по вертикалі.

Сила опори руху *R*, спрямована убік, протилежний напрямку руху .

Вага вантажу визначається по формулі $P = mg$. Тоді диференціальне рівняння руху центру маси вантажу під дією ваги і при існуючому опорі руху запишеться $m\,x'' = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}$, де під знаком суми знаходяться проекції *k-й* сили на вісь *x*. У нашому випадку на центр маси діють сила *F, R, P*. Тоді одержуємо диференціальне рівняння руху вантажу

$$m\,x'' = P + F + R,$$

або у розгорнутому вигляді

$$m\,x'' = mg - qD_{cm} - qx - Bv.$$

З огляду на те, що в статичній рівновазі (x=0) до вантажу прикладені дві сили P і $F = - qD_{ст}$ і повинна виконуватися $mg - qD_{ст} = 0$, та з огляду на те, що $v = x'$ остаточно здобуваємо

$$m\,x'' = -qx - Bx' \quad \text{або}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + qx = 0$$

Якщо на систему діє зовнішня збуджуюча сила *f(t)*, то рівняння приймає вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + qx = f(t)$$

Будь-яке диференціальне рівняння n-го *порядку* можна звести до n диференціальних рівнянь першого порядку.

Наприклад, у диференціальному рівнянні другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{B}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{q}{m}x + \frac{f(t)}{m} = g(t, x, \frac{dx}{dt})$$

можна покласти $z=dx/dt$.

Тоді $dz/dt=d^2x/dt^2$ і одержуємо два рівняння першого порядку

$$\frac{dz}{dt} = g(t,x,z) = -\frac{B}{m}z - \frac{q}{m}x + \frac{f(t)}{m}$$

$$\frac{dx}{dt} = z(t,x,z),$$

Задача Коші в цьому випадку містить дві початкові умови

$$x(t_0) = x_{0,}$$

$$z(t_0) = z_0.$$

Чисельне рішення систем звичайних дифференіальних рівнянь.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядку полягає в тому, що задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку задається рекурентною форулою такого вигляду:

$$x_{n+1} = x_n + K, z_{n+1} = z_n + L\,,$$

де $K = \dfrac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}, L = \dfrac{L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4}{6}$

$K_1=hz(t_n,x_n,z_n)$

$L_1= hg(t_n,x_n,z_n)$

$K_2=hz(t_n+1/2h,x_n+1/2K_1,z_n+1/2L_1),$

$L_2= hg(t_n+1/2h,x_n+1/2K_1,z_n+1/2L_1),$

$K_3= hz(t_n+1/2h,x_n+1/2K_2,z_n+1/2L_2),$

$L_3= hg(t_n+1/2h,x_n+1/2K_2,z_n+1/2L_2),$

$K_4= hz(t_n+h,x_n+K_3,z_n+L_3),$

$L_4= hg(t_n+h,x_n+K_3,z_n+L_3).$

$x_n = x_0 + h*n$, $x_0 = 0$, $n = 0,1,2,\ldots,N-1$, h- крок, із яким проходимо по осі *Ox*.

6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Провести розрахунки по методу Рунге-Кутта четвертого порядку математичної моделі руху маси *m* , що зображена на малюнку при ***початкових умовах:*** ***x(0)=(mg)/(2q)***
та ***x'(0)=0***

Вариант	***m***	***q***	***B***
10	50	20	100
1	100	30	200
2	150	50	300
3	200	100	400
4	250	120	500
5	300	130	600
6	350	150	700
7	400	170	800
8	450	200	900
9	500	230	1000
11	550	200	950
12	550	300	1000
13	600	300	900
14	675	100	900

ТЕМА 3. Рішення математичних моделей задач механічного руху твердого тіла, яки формулюються у вигляді задач Коші.

Лабораторна робота №5 (частина II).

1.МЕТА РОБОТИ.

Навчитися розв’язувати звичайні диференційні рівняння з початковими умовами чисельними методами на ЕОМ.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

2.1. Реалізувати схему методу Рунге-Кутта на ЕОМ.
2.2. Навести графік поведінки рішення.
2.3. Зробити загальний звіт по роботах №4 та №5.

3. ЗМІСТ ЗВІТУ.

3.1. Номери робіт, назва теми, номер варіанту.
3.2. Короткі відповіді на контрольні запитання.
3.3. Постановка задачі, малюнок, математична модель, метод розв’язку, результати обчислень на ЕОМ.
3.4. Аналіз результатів, висновки.
3.5. Файл з обчисленнями має бути збереженим на дискеті.

4. ПРИКЛАД реалізації алгоритму у EXCEL.

Роздивимося на прикладі застосування і програмування обчислювальних схем одношагових методів.

Приклад 1. Знайдемо рішення диференціального рівняння такого вигляду: $dx/dy = y + exp(x) - x$

задовольняючій початковій умові

$$y(0) = 0{,}25.$$

Рішення потрібно знайти на відрізку $(0,T)$, де параметр T може приймати будь-які значення.

Точне рішення цього рівняння має такий вид:

$$y(x) = exp(2x) – exp(x) – x .$$

Нам потрібно знайти чисельне рішення цього рівняння, тобто функцію задану в табличному виді, що приймає значення на відрізку $[0,T]$ з кроком h і порівняти його з точним рішенням у тих же точках.

Визначим крок h по наступній формулі:

$$h = T/N$$

де N - число точок на відрізку $[0,T]$, у яких обчислюється значення функції.

Для рішення поставленої задачі ми застосуємо метод Ейлера і метод Рунге-Кутта 4-го порядку. Перший метод приводиться для ілюстрації, а другий для безпосереднього рішення.

Алгоритм чисельного рішення приклада .

Для рішення скористаємося табличним процесором Excel. У колонці I у нас будуть знаходитися межі відрізка [*0,T*]. На початку розрахунків покладемо I1 = 0 (це значення лівої межі відрізка [0, T]). Укомірці I2 буде розмір T (правої межі відрізка [0,T]). У комірці I3 обчисляємо крок *h* по формулі наступного виду:

= (I1 - I2)/N

У стовпці А буде обчислюваться рішення нашої задачі по формулі Ейлера. У комірку А1 задамо початкове значення y0= 0.25. У комірку А2 уведемо формулу наступного вигляду:

=A1 + $I$3*(2*A1 + EXP(B1) + B1)

У стовпчику В буде знаходитися поточне значення змінної *x*. У комірках В1 і відповідно нижче, знаходяться формули наступного вляиду:

=I1

=B1 + $I$3, тобто в комірку B1 пересилається ліва межа відрізка (0 ,T*(, а* в комірці B2 прибавляеся розмір кроку h із комірки *I3* до значення в попередній комірці B1.

У стовпчику С обчислюєм точне рішення. У комірку С1 занесемо значення *y0* рішення в точці *x=0*, а в комірці С2 формула вигляду:

= EXP(2*B2)-EXP(B2)+B2/2+0,25

Ця формула обчислює значення точного рішення рівняння при значенні *x* із комірки B2.

У стовпчику H обчислюється значення чисельного рішення задачі Коші, отримане по методу Рунге-Кутта 4-го порядку. Значення x_k береться з комірки B2, а значення y_k береться з комірки H1.

У комірці H2 написана формула наступного виду:

=H1+(D2+2*E2+2*F2+G2)*$I$3/6

У комірках D2, E2, F2, G2 записуються формули для коефіцієнтів m1, m2, m3, m4 відповідно. Ці формули мають вид:

=2*H1+EXP(B2)-B2

=2*(H1+D2*$I$3/2)+EXP(B2+ $I$3/2)-B2-$I$3/2

=2*(H1+E2*$I$3/2)+EXP(B2+$I$3/2)-B2-$I$3/2

=2*(H1+F2*$I$3)+EXP(B2+$I$3)-B2-$I$3

Копіюванням формули з 2-го рядка по всіх рядках до значення *x=1*(у комірці відповідного стовпчика B повинне знаходиться число 1 і останній рядок має номер 101), ми одержимо результат по всім точкам інтервалу (*0,T*).

Алгоритм обчислення значень рішення задачі Коші реалізований.

ТЕМА 4. Рішення математичних моделей задач оптимізації.

Лабораторна робота № 6.

1.МЕТА РОБОТИ.

- Навчитися розв'язувати чисельними методами математичні моделі задач оптимізації.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

2.1. Вивчити навчальний матеріал і підготувати відповіді на контрольні питання.

2.2. Виписати математичну модель задачі оптимізації згідно варіанту.

2.3. Визначити проектні параметри, цільову функцію, обмеження та простір проектування у Вашій задачі оптимізації.

2.4. Використати стандартні засоби Excel (*Поиск решения*) для завдання математичної моделі та її розвязку градієнтним методом.

2.5. Обрати початкові умови та обгрунтувати їх вибір.

2.3. Запустити (*Поиск решения*) та проаналізувати результати.

2.6. Зробити звіт по роботі.

3. ЗМІСТ ЗВІТУ.

3.1. Номер роботи, назва теми, номер варіанту.

3.2. Короткі відповіді на контрольні запитання.

3.3. Постановка задачі, математична модель, початкові умови, результати обчислень на ЕОМ, протокол рішення (лист EXCEL про звіт по результатах).

3.4. Аналіз результатів, висновки.

3.5. Файл з обчисленнями має бути збереженим на дискеті.

4. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

4.1. Дати визначення поняттям проектні параметри, цільова функція, обмеження та простір проектування.

4.2. Скількі рівнянь та скількі невідомих проектних параметрів повинна мати задача оптимізації для існування розвязку, обгрунтувати.

5. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ.

Терміном «оптимізація» у літературі позначають процес або послідовність операцій, що дозволяють одержати уточнене рішення.

Розглядають деяку довільну систему, що описується m рівняннями з n невідомими, таку що $m < n$, тобто задача недовизначена і має нескінченно багато рішень. *Проектні параметри* у задачі оптимізації позначують незалежні змінні параметри, що цілком і однозначно визначають розв'язувану задачу проектування. *Цільова функція* - це вираз, значення якого треба зробити максимальним або мінімальним. *Простір проектування* - це область, обумовлена усіма *n* проектними параметрами. Цей простір не великий, він звичайно обмежен кількостю умов, пов'язаних із фізичною сутністю задачі. Обмеження можуть бути настільки сильними, що задача не буде мати жодного задовільного рішення. Обмеження діляться на дві групи: обмеження - рівності й обмеження - нерівності.

Розглянемо на прикладі побудову математичних моделей для задачі оптимізації.

Нехай треба знайти мінімум де-якої нелінійної цільової функції такого вигляду :

*J(x1,x2)=-2*x1-6*x2+x1*x1-2*x1*x2+2*x2*x2* ***з*** обмеженнями:

x1+x2<=2

*-x1+2*x2<=2*

x1>=0, x2 >=0.

Як треба задати ці умови в електронну таблицю?

Нехай наші змінні *x1,x2,x3* будуть зберігатися в комірках з адресами c1,c2,c3.

Тоді в термінах адресів наша цільова функція запишеться у вигляді:

J(c1,c2)=-2*c1-6*c2+c1*c1-2*c1*c2+2*c2*c2, а обмеження запишуться у вигляді таких нерівностей:

c1+c2<=2

-c1+2*c2c<=2

c1>=0. c2 >=0

Тоді:

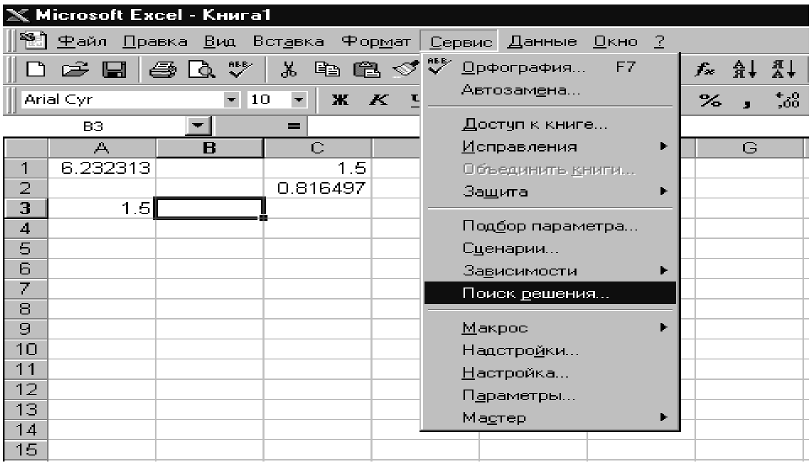
1 Вводиться в комірку A1 значення виразу для цільової функції:
=-2*c1-6*c2+c1*c1-2*c1*c2+2*c2*c2

2 Вводяться обмеження в комірки A3:A4, і які-небудь початкові значення в комірки c1:c2 (можна, наприклад, нульові, якщо цільова функція не містить ділення на ці значення)

3 Виконується команда *Сервіс /Пошук* рішень і заповнюються параметри у вікні діалогу.

Кнопка *Виконати* і *Вивести результат* дозволяє одержати на екрані результати оптимальних параметрів, що містяться в комірках c1 і c2.

Повернемося тепер до відкладеної нами задачі про мінімізацію площі бічної поверхні контейнера (приклад) і заповнимо в таблицю, як показано на малюнку, вхідні дані по задачі.



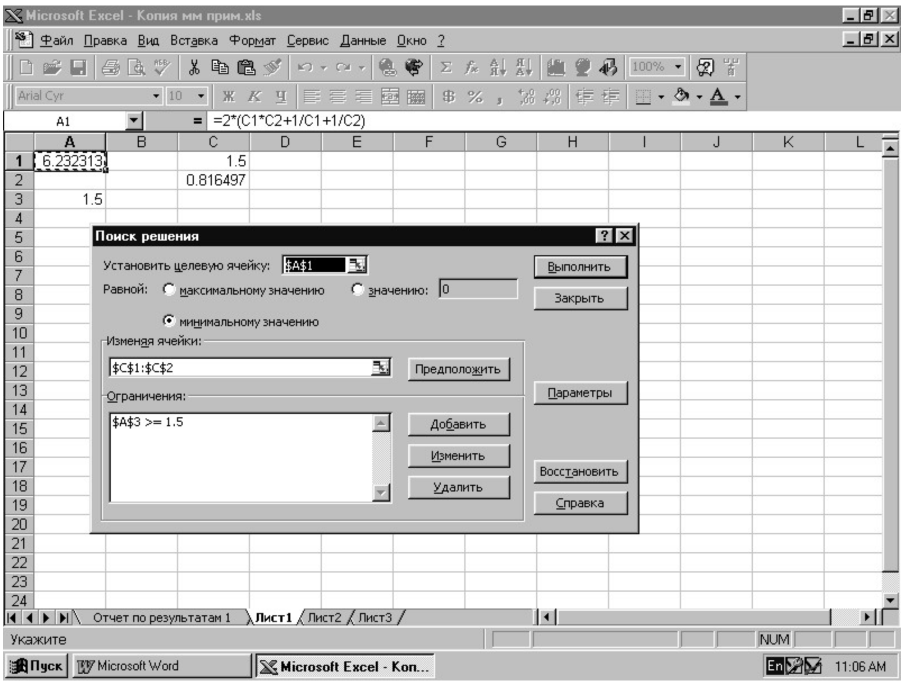
Далі слід заповнити вікно діалогу інструмента Пошук рішення, що з'являється при натисканні на цю клавішу.

У полі введення ВСТАНОВИТИ ЦІЛЬОВУ КОМІРКУ вказується посилання на комірку з цільовою функцією, значення якої буде максимальним, мінімальним або нулем у залежності від обраного вами перемикача.

У полі введення ЗМІНЮЮЧИ КОМІРКИ вказуються комірки, що відведені під змінні цільової функції.

У полі введення ОБМЕЖЕННЯ з'являться обмеження після того, як вони будуть задані по команді ДОДАТИ.

Пункт ПАРАМЕТРИ викликає вікно діалогу, у якому ви можете змінювати параметри алгоритму пошуку рішення.



Протокол рішення нашої задачі оформляється автоматично після натискання кнопки ВИКОНАТИ/РІШЕННЯ/ОК і міститься на окремому листку, що утворить закладку **Звіт за результатами.**

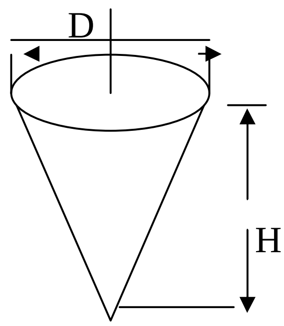
6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

В1. *а)* Одним з ефективних засобів пошуку кореня для полінома загального вигляду є метод мінімізації цільової функції, що прямує до нуля *при х* наближающемуся до значенню шуканого кореня. Перевірити ефективність цього методу на прикладі рівняння

$x^5+21x^4+158x^3+502x^2+609x+245=0$

б) Вирішити задачу з **В4** для випадку, коли *x1=1. 5м.*

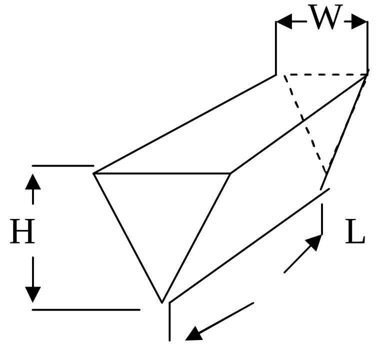
В2. Спроектувати контейнер нового типу у формі кругового конуса без дна обсягом *1 м*^{3}. Які повинні бути геометричні характеристики контейнера, щоб його бічна поверхня була мінімальною.



В3. Вирішити задачу **В2** для випадку, коли контейнер має круглу кришку.

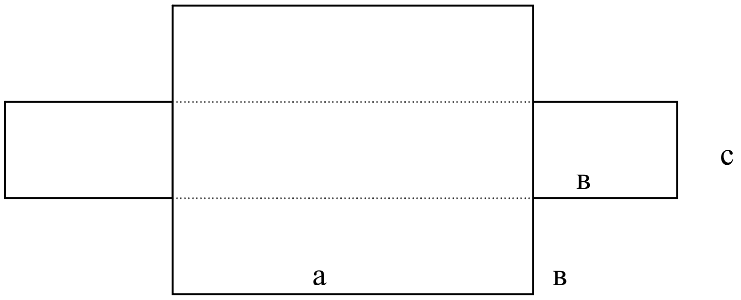
В4. Нехай потрібно спроектувати прямокутний контейнер, що має об’єм *1* м^3, призначений для перевезення незапакованого волокна. Бажано, щоб на виготовлення таких контейнерів використовувалось якнайменше матеріалу (за умови сталості товщини стінок це означає, що площа поверхні повинна бути мінімальною), щоб він був дешевше. Щоб контейнер зручно було брати автонавантажувачем, його ширина повинна бути не менше 1,5 м.

В5. Ємність відстійника для рідких відходів повинна скласти *40000 л.* Виготовляється відстійник із залізобетону товщиною *10 см*. Визначити геометричні параметри відстійника, при яких на його виготовлення піде мінімальна кількість бетону.



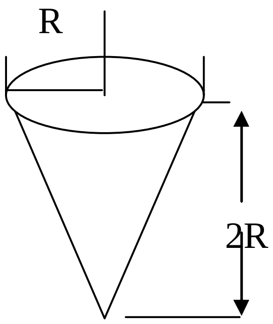
В6. Вирішити задачу **В**5, коли є у відстійника кришка.

B7. Проектується відкритий контейнер з листового матеріалу. Які повинні бути розміри контейнера якнайбільшого обсягу, якщо площа його дна не повинна перевищувати $1м^2$ і жоден із лінійних розмірів *a,b,c не* повинен бути більше другого більш ніж у 3 рази .



B8. Вирішити задачу з **B4** для випадку, коли *x1=1. 5м.* та контейнер не має кришки.

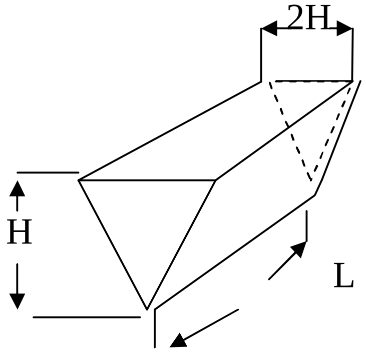
B9. Спроектувати контейнер у формі кругового конуса без дна обсягом $10\ м^3$. Які повинні бути геометричні характеристики контейнера, щоб його бічна поверхня була мінімальною.



B10. Вирішити задачу **B9** для випадку, коли контейнер має круглу кришку.

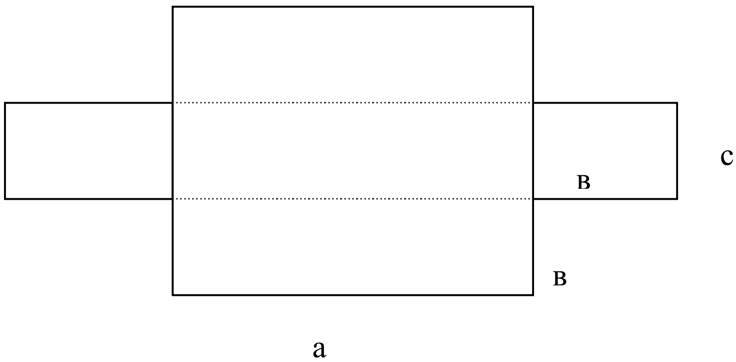
B11. Нехай потрібно спроектувати контейнер у формі циліндра (бочка з кришкою), що має об'єм *15* $м^3$, призначений для перевезення рідини. Бажано, щоб на виготовлення таких контейнерів використовувалось якнайменше матеріалу (за умови сталості товщини стінок це означає, що площа поверхні повинна бути мінімальною), щоб він був дешевше. Щоб контейнер зручно було брати автонавантажувачем, його диаметр повинна бути не менше 1,5 м.

B12. Ємність відстійника для рідких відходів повинна скласти 8*0000 л.* Визначити геометричні параметри відстійника, при яких на його виготовлення піде мінімальна кількість бетону.



B13. Вирішити задачу **B12**, коли є у відстійника кришка.

B14. Проектується відкритий контейнер з листового матеріалу. Які повинні бути розміри контейнера якнайбільшого обсягу, якщо площа його дна не повинна перевищувати *1м*^{2} і лінійни розміри $b/a=1/3$.



ТЕМА 5. Задачі обробки чисельних масивів даних у математичному моделюванні.

Лабораторна робота № 7.

1.МЕТА РОБОТИ.

- Навчитися розв’язувати чисельними методами математичні задачі інтегрування.

2. ЗАВДАННЯ І ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ

2.1. Вивчити навчальний матеріал і підготувати відповіді на контрольні питання.

2.2. Виписати математичну модель задачі чисельного інтегрування згідно варіанту.

2.3. Скласти алгоритм та програму чисельного методу обчислення інтегралу.

2.4. Виконати обчислення, проаналізувати результати.

2.5. Здрібнити крок у програмі чисельгого методу інтегрування та порівняти отриманий результат з попереднім.

2.4. Зробити звіт по роботі.

3. ЗМІСТ ЗВІТУ.

3.1. Номер роботи, назва теми, номер варіанту.

3.2. Короткі відповіді на контрольні запитання.

3.3. Постановка задачі, метод розв’язку, результати обчислень на ЕОМ.

3.4. Аналіз результатів, висновки.

3.5. Файл з обчисленнями має бути збереженим на дискеті.

4. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.

4.1. Які існують засоби для встановлення значень досліджуваної функції у проміжку між двома обчисленнями?

4.2. Чим інтерполяція відрізняється від апроксимації?

4.3. Як веде себе похибка при замірах, якщо заміри чисельно продиференціювати?

4.4. Як веде себе похибка при замірах, якщо заміри чисельно проінтегрувати?

5. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.

Задача опрацювання результатів експериментів часто пов'язані з задачами сгладжування експериментальних залежностей. Нехай проводиться експеримент, ціллю якого є дослідження залежності фізичної величини. Розміри *X, У* пов'язані функціональною залежністю *У = f (X)*, вид якої невідомий та повинен бути визначений із експерименту. Припустимо, що ми маємо результати вимірів і по ним намагаємося побудувати графік. Звичайно експериментальні точки на такому графіку розташовуються не зовсім вірно -

дають деякий «розкид», тобто виявляються випадкові відхилення від заданої закономірності. Як по таких результатах провести найкращим чином залежність? Відповідь на це питання дають методи обробки даних.

Особливе значення в роботі інженера мають такі види опрацювання масивів чисел:

- Інтерполяція.
- Апроксимація кривих.
- Чисельне диференціювання.
- Чисельне інтегрування.

Сутність **інтерполяції** складається в пошуку значення функції в деякій проміжній точці. Найпростішим видом інтерполяції є лінійна інтерполяція. **Апроксимація** може здійснюватися простою функцією, але не обов'язково тією, що проходить через усі точки. Криву намагаються провести так, щоб її відхилення від табличних даних були мінімальними. Звичайно намагаються зводити до мінімуму суму квадратів різниць між значеннями функції і табличних значень. Такий метод зветься *методом найменших квадратів.*

Іноді потрібно визначити наближенне значення похідної функції, заданою таблицею, але ж результати вимірів правдивого сигналу містять шумову компоненту. Якщо такий сигнал продиференціювати, те похибка різко зростає. Навпаки, при інтегруванні сигналу, що містить шум, похибка убуває.

Інженеру часто доводиться обчислювати значення визначеного інтеграла чисельними методами. Це буває в тих випадках, коли підінтегральна функція настільки складна, що простіше скористатися чисельним інтегруванням.

Чисельне інтегрування являє собою стійкий процес. На противагу чисельному диференціюванню воно зменшує вплив похибок у вхідних даних на остаточний результат. У основі чисельного інтегрування лежить наближене обчислення площі під кривою, що описується підінтегральною функцією.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Методи чисельного інтегрування класифікуються в залежності від того, чи задані значення аргументу через рівні інтервали або ні

Найбільше простим методом є *метод прямокутників,* ідея якого полягає в лінійній апроксимації функції. Сусідні точки (x_i, y_i) і (x_{i+1},y_{i+1}), задані таблицею в інтервалі $A \le X \le B$, з'єднуються прямою, паралельною вісі X. Інтеграл у даному випадку буде являти собою суму площ n прямокутників висотою h кожний.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} f(a - \frac{h}{2} + kh) = h\left[f(a + \frac{h}{2}) + f(a + \frac{3h}{2}) + ... + f(b - \frac{h}{2})\right]$$

Інтегрування *методом трапецій* записуються:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{n-1} + y_n].$$

Апроксимуя підінтегральну функцію параболами, одержимо іншу формулу, відому як *формула Сімпсона:*

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 4y_{n-1} + y_n).$$

У цій формулі число інтервалів розбивки повинно бути парне.

6.ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.

В1. У задачах розрахунку нерівностів рельсової колії застосовується спектральний метод, у якому для реалізації випадкової функції нерівностів необхідно отримати автокореляційну функцію, що має вигляд

$$k(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}I, \qquad \text{де,} \quad I=\int_0^T \eta(t)\eta(t+\tau)dt$$

$\eta(t)$-реалізація випадкової функції, τ- зсув випадкового процесу (τ=0.01) по часу, T=1-тривалість реалізації випадкової функції.

Обчислити означений інтеграл I, якщо функція $\eta(x)=x+1$. Крок інтегрування $h=0{,}1$методом прямокутників

В2. Вирішити попередню задачу методом трапецій.

В3. Вирішити задачу В1методом Сімпсона.

В4. Частота вільних коливань кузову у випадку несиметричної упругої характеристики ресор визначається по формулі

$$p^2=\frac{5}{2m_k A_0^5}\int_{-A_0}^{A_0} F(z-\delta)z^3dz \quad ,$$

де m_k-маса кузова (m=30000); A_0- напіврозмах коливань (A_0=5); δ-зміщення центру коливань від початку координат (δ=0.5); F(z)=cz+F_0-характеристика відновлювачої сили (c=2, F_0=50).

Обчислити означений інтеграл, крок інтегрування $h=1$,методом трапецій.

В5. Вирішити задачу попереднього варіанту методом прямокутників.

В6. Вирішити задачу В4 методом Сімпсона.

В7. Обчислити означений інтеграл

$$W=\int_0^{w_{max}} wp(w)dw,$$

де w - випадкове значення трудопотреб, $p(w)=w+1$ -щільність розподілу трудопотреб, w_{max}=1.методом прямокутників з кроком h=0.01.

В8.Вирішити попередню задачу методом трапецій.

В9. Вирішити попередню задачу В7 методом Сімпсона.

В10. Обчислити означений інтеграл

$$W=\int_0^{w_{max}} wp(w)dw,$$

де w - випадкове значення трудопотреб, $p(w)=4w^4-1$ -щільність розподілу трудопотреб, $w_{max}=0.55$ методом прямокутників з кроком h=0.01.

В11. Вирішити попередню задачу методом трапецій.

В12. Вирішити попередню задачу В10 методом Сімпсона.

В13. Вирішити попередню задачу В7 методом трапецій та h=0.2.

В14. Вирішити попередню задачу В7 методом Сімпсона та h=0.0001.

Література:

1. Математичні моделі у розрахунках на ЕОМ, учбовий посібник, Видавництво КУЕТТ, 2000.-98с.
2. Т.Щуп. Решение инженерных задач на ЭВМ.-М.:Мир,1982.-125с.

Навчально-методичне видання

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт
для студентів спеціальності
«Залізничні споруди», «Рухомий склад та спеціальна техніка залізничного транспорту»
усіх форм навчання

Укладачі: *Рисцова Алла Юріївна*
Філіпович Людмила Всеволодівна
Коваль Юрій Олександрович

Відповідальний за випуск *А.Ю.Рисцова*

Редактор *О. В. Васькевич*

Підписано до друку 09.01.03. Формат 60?84/16. Папір офс.
Спосіб друку – ризографія. Тираж 75 прим. Зам. № 010.

Видавництво КУЕТТ
03049, Київ-49, вул. Миколи Лукашевича, 19.