

Міністерство освіти і науки України
Державний економіко - технологічний університет
транспорту

Кафедра фізики та електротехніки

Завдання та методичні вказівки
до самостійної роботи
з фізичної механіки

Для студентів технічних спеціальностей

Київ - 2017

УДК 53
ВВК 22.3

Навчальний посібник "Завдання та методичні вказівки до самостійної роботи з фізичної механіки" розглянуто та затверджено на засіданні кафедри фізики та електротехніки (Протокол №1 від 28.08.2016 року) та на засіданні методичної комісії факультету "Інфраструктура та рухомий склад залізниць" (Протокол №2 від 31.10.2016 року)

Укладачі: доцент Поліщук С.І.

Рецензенти: професор Завісляк І.В. та професор Чепілко М.М.

Зміст

1	Організація вивчення курсу загальної фізики в університеті	4
1.1	Вказівки по виконанню та оформленню розрахунково - графічних та контрольних робіт з фізики	6
1.2	Вказівки до розв'язку та оформлення задачі з фізики	7
1.3	Приклад розв'язку задачі з фізичної механіки	8
2	Питання для теоретичної підготовки з фізичної механіки. Варіанти завдань для самостійної роботи	11
3	Основні формули і співвідношення курсу фізичної механіки	22
4	Приклади розв'язування задач з фізичної механіки	27
5	Рекомендована література	43

1. Організація вивчення курсу загальної фізики в університеті

В університеті загальний курс фізики вивчається протягом одного, двох чи трьох семестрів, у залежності від профілю факультету та форми навчання.

При вивченні кожного розділу фізики передбачаються такі види навантажень:

1. Теоретичне вивчення курсу.
2. Виконання лабораторних робіт та комп'ютерного моделювання фізичних явищ.
3. Виконання розрахунково - графічних або контрольних робіт.
4. Консультації.
5. Екзамени або заліки.

Теоретичне вивчення загального курсу фізики відбувається на лекціях та практичних заняттях згідно розкладу, складеного навчальною частиною університету, у відповідності з навчальним планом підготовки спеціалістів певного профілю. Відвідування студентами лекцій та практичних занять є обов'язковим.

Лабораторні роботи та комп'ютерне моделювання фізичних явищ проводяться у навчальних лабораторіях та комп'ютерних класах кафедри фізики та електротехніки згідно розкладу складеному навчальною частиною університету, у відповідності з навчальним планом підготовки спеціалістів певного профілю. Виконані практично, повністю оформлені та захищені лабораторні та комп'ютеризовані роботи відмічаються підписом викладача, який проводить заняття, і реєструються у спеціальному журналі, що зберігається в лабораторії. У кінці семестру, за умови успішного виконання циклу лабораторних та комп'ютеризованих робіт, студенту виставляється залік.

Розрахунково - графічні роботи з кожного розділу загальної фізики виконуються студентами стаціонарної форми навчання. Виконання розрахунково - графічної роботи вимагає від студента активного володіння матеріалом відповідного розділу фізики та математичним апаратом на "фізичному" рівні строгості. Рецензування розрахунково - графічних робіт виконується викладачем, який проводить практичні заняття.

Контрольні роботи з кожного розділу фізики, що складаються з восьми задач, виконуються студентами заочної форми навчання. Задачі, які входять до складу контрольної роботи, вимагають від студента для успішного виконання контрольної роботи активного володіння матеріалом відповідного розділу

фізики та математичним апаратом на "фізичному" рівні строгості. Рецензування контрольних робіт, як правило, виконується викладачем, який проводить практичні заняття. У випадку незаліку контрольної роботи студент повинен виправити помилки або ж розв'язати задачі знову і здати роботу на повторне рецензування.

Консультації проводяться ведучим лектором згідно з розкладом, узгодженим з навчальною частиною університету.

Заліки та екзамени з кожного розділу фізики студенти здають у період сесії, згідно з розкладом, складеним навчальною частиною університету. Студенти допускаються до заліків та екзаменів за умови повного виконання відповідної навчальної програми. У випадку неявки студента на екзамен з поважної причини чи отриманні незадовільної оцінки, заліки та екзамени можуть бути здані у дні перездач згідно з розкладом, складеним навчальною частиною університету, або ж по направленню, підписаному деканом факультету.

Критерії оцінки знань студентів при здачі іспитів з фізики

1. Оцінка **відмінно** ставиться у тому випадку, коли студент при відповіді на питання екзаменаційного білету виявляє:
 - правильне розуміння суті розглядуваних фізичних явищ і закономірностей їх протікання, змісту фізичних законів і теорій;
 - вміння використовувати математичний апарат для аналітичного доведення справедливості фізичних законів та співвідношень між певними фізичними величинами, визначити межу застосування математичної моделі певних фізичних явищ;
 - будує відповідь за власним планом, супроводжує відповідь прикладами, вміє застосовувати знання у нестандартних ситуаціях та інших природничих науках;
 - правильно розв'язав задачу у загальному вигляді та виконав наближені обчислення з наперед заданою точністю.
2. Оцінка **добре** ставиться в тому випадку, якщо відповідь задовільняє основним вимогам до відповіді на оцінку **відмінно**, але у ній переважають прості відтворення означень та формулювань, здійснюється вона без чіткого власного плану. Не виявляється узагальнюючий погляд на дане явище або закон, не визначається межа застосування його математичної моделі.
3. Оцінка **задовільно** ставиться в тому випадку, якщо більша частина відповіді задовільняє основним вимогам до відповіді на оцінку **добре**, але у ній є окремі прогалини, що не спотворюють зміст відповіді, яка у цілому має формальний репродуктивний характер, є помилки у розв'язку задач, який при цьому має правильний напрямок.

4. Оцінка **незадовільно** ставиться в тому випадку, коли студент:
 - відмовляється відповідати після ознайомлення із змістом отриманого завдання;
 - не володіє знаннями і навичками відповідно до вимог навчальної програми;
 - дав відповідь менше чим на два з трьох питань екзаменаційного білету, або хід його розв'язків задач був неправильним.

1.1. Вказівки по виконанню та оформленню розрахунково - графічних та контрольних робіт з фізики

До виконання контрольних робіт з курсу загальної фізики слід приступати лише після вивчення матеріалу, що відповідає даному розділу навчальної програми, уважного ознайомлення з правилами оформлення та розв'язку задач, приведеними у цьому посібнику.

1. За час навчання у університеті студенти денної форми навчання повинні виконати чотири розрахунково - графічні роботи. Що стосується студентів заочної форми навчання, то вони повинні виконати шість контрольних робіт.
2. У кожній контрольній роботі студент-заочник повинен розв'язати вісім задач того варіанту, який співпадає з останньою цифрою його шифру. Нумери задач, що входять до складу контрольної роботи, визначаються за таблицями варіантів для відповідної частини курсу загальної фізики, які має у своєму розпорядженні викладач, що веде практичні заняття.
3. Розрахунково - графічні та контрольні роботи виконуються на папері формату А4 чорнилом або ж набираються на комп'ютері, використовуючи текстовий редактор, спряжений з редактором математичних формул. Титульна сторінка роботи повинна бути оформлена у відповідності до стандарту оформлення науково - технічних документів (див.зразок 1).
4. Розрахунково - графічні та контрольні роботи здаються, як правило, на рецензію викладачу, який веде практичні заняття з академічною групою. На рецензію слід здавати одночасно не більше однією роботи. Для виключення помилок, що повторюються, чергову роботу слід здавати на рецензію тільки після заліку попередньої розрахунково - графічної чи контрольної роботи.
5. Якщо розрахунково - графічна чи контрольна робота при перевірці була не зарахована, то необхідно виправити всі помилки, що містяться в розв'язках задач, дати відповіді на всі зауваження рецензента в письмовій

формі у вигляді додатку до основного тексту розрахунково - графічної чи контрольної роботи, та подати їх на повторну перевірку.

6. Зараховані розрахунково - графічні чи контрольні роботи здаються екзаменатору. Студент повинен бути готовим під час здачі заліку чи екзамену дати пояснення по змісту розв'язаних задач, що входять до виконаної розрахунково - графічної чи контрольної роботи.

1.2. Вказівки до розв'язку та оформлення задачі з фізики

Розрахунково - графічні та контрольні роботи перевіряються викладачем університету коли студент, який виконав роботу, відсутній. Тому кожна задача повинна бути оформлена акуратно і включати всі необхідні пояснення, що демонструють глибину розуміння студентом відповідного розділу фізики.

При розв'язку задачі слід дотримуватися наступного плану:

1. Розв'язок кожної задачі слід починати з нової сторінки. Для зауважень викладача після розв'язку задачі необхідно залишити вільну сторінку.
2. Умови задач вносяться у текст розрахунково - графічної чи контрольної роботи без скорочень .
3. У тексті розрахунково - графічної чи контрольної роботи, у випадку необхідності, приводяться пояснюючі рисунки, виконані з використанням графічного приладдя або ж комп'ютерного графічного редактора.
4. Виписуються основні закони фізики і формули, на яких базується розв'язок задачі, та даються словесні пояснення змісту символів і позначень у формулах. Повністю приводяться фізичні аргументи та математичні викладки, які становлять зміст розв'язку задачі.
5. Розв'язок задачі отримується у загальному вигляді, який виражає шукану величину через символи фізичних величин, заданих у умові задачі.
6. Виконати перевірку розмірності отриманої формули, яка є символьним розв'язком задачі. Для цього потрібно підставити у символьний розв'язок задачі замість символів відповідні їм позначення одиниць у системі СІ. Після всіх необхідних скорочень впевнитись у відповідності отриманого результату розмірності шуканої величини (див. приклад розв'язку задачі).
7. Підставити у отриману формулу замість символів їхні числові значення, виражені у одиницях системи СІ. Виконати наближені обчислення, записати у відповіді числове значення і скорочену назву одиниці величини, що розраховується. При підстановці чисел в формулу та при записі відповіді

числові величини треба виражати в вигляді добутку десяткового дробу з однією значущою цифрою перед точкою на відповідну степінь десяти. Наприклад, замість 4578 потрібно записати $4.578 \cdot 10^3$, а замість 0.0002347 записати $2.347 \cdot 10^{-4}$ тощо.

8. Зробити оцінку, де це можливо, правдоподібності отриманого результату. Наприклад, швидкість тіла не може бути більшою за швидкість тіла в вакуумі, коефіцієнт корисної дії не може бути більшим одиниці і тощо.
9. У кінці кожної задачі потрібно написати *Відповідь*, привести символічне та розраховане числове значення шуканої фізичної величини з вказанням розмірності. Наприклад:

Відповідь: $a = 12 \frac{M}{c^2}$.

1.3. Приклад розв'язку задачі з фізичної механіки

Умова задачі. До кінців шнура, перекинутого через блок, підвішені вантажі з масами $m_1 = 100\text{г}$ і $m_2 = 150\text{г}$. Знайти прискорення вантажів, силу натягу шнура T та показання F динамомента, на якому висить блок. **Розв'язок задачі.** Геометрія задачі показана на рис. 1.1.

$m_1 = 100\text{г}$	$m_1 = 1.0 \cdot 10^{-1}\text{кг}$
$m_2 = 150\text{г}$	$m_2 = 1.5 \cdot 10^{-1}\text{кг}$
	$a = ?$
	$T = ?$
	$F = ?$

Для розв'язку задачі слід використати закони Ньютона, які описують рух тіл під дією зовнішніх сил. Спочатку виберемо осі координат так, як це показано на рис. 1.1.

Внаслідок нерозтяжимості шнура переміщення обох вантажів мають однакові модулі. Отже і їх прискорення будуть мати однакові модулі $a = a_1 = a_2$. Нехтуючи масами шнура і блоку, а також тертям у блоці, можна вважати силу натягу шнура T скрізь однаковою. На рис. 1.1 показані сили, що діють на вантажі.

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного вантажу в проекції на вісь y

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 g + T, \\ -m_2 a &= -m_2 g + T. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g = 2.0 \frac{\text{М}}{\text{сек}^2},$$

$$T = 2 \frac{m_2 m_1}{m_2 + m_1}g = 1.2 \text{Н}.$$

Щоб знайти силу F пружності пружини динамометра, слід розглянути сили, які діють на блок. З умови рівноваги блоку будемо мати

$$F = 2T = 2.4 \text{Н}.$$

Перевіримо правильність отриманих результатів.

1. Очевидно, що якщо вантажі поміняти місцями, то їхні прискорення і сила натягу шнура не зміняться, а це значить, що отримані вирази для a і T задовільняють умові задачі.

2. Очевидно, що при $m_1 = m_2 = m$ повинно бути $a = 0$, а $T = mg$. Отриманий розв'язок задовільняє і цій умові.

3. При $m_1 \rightarrow 0$ знайдемо, що $a \rightarrow g$, $T \rightarrow 0$ (вантаж m_2 вільно падає і тому перебуває у невагомості), як і повинно бути.

Оскільки отриманий розв'язок задачі не має внутрішніх протиріч, то його можна вважати правильним.

Відповідь: $a = 2.0 \frac{\text{М}}{\text{сек}^2}$, $T = 1.2 \text{Н}$, $F = 2.4 \text{Н}$.

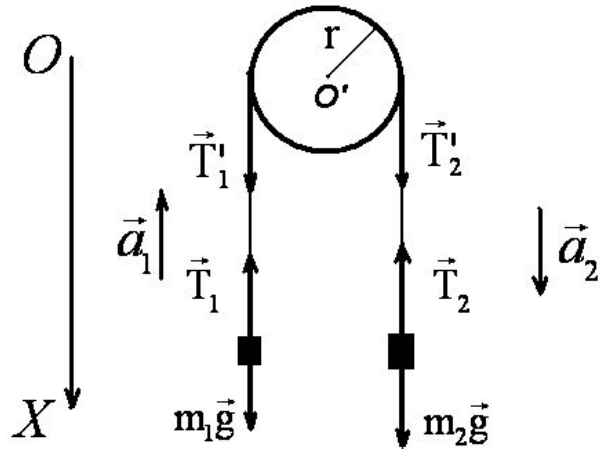


Рис. 1.1.

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНФРАСТРУКТУРИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра фізики та електротехніки

Розрахунково - графічна робота

або

Контрольна робота
з фізичної механіки

Виконав:

15 листопада 2017 року

студент Прізвище І.Б.

шифр 2016-КІКС-0345

Перевірив:

20 листопада 2017 року

доцент Прізвище І.Б.

2. Питання для теоретичної підготовки з фізичної механіки. Варіанти завдань для самостійної роботи

Кінематика матеріальної точки. Механічний рух. Системи відліку. Матеріальна точка. Траєкторія. Переміщення та шлях. Швидкість та прискорення. Тангенційне та нормальне прискорення. Закон складання швидкостей. Кінематичне рівняння гармонічного коливального руху матеріальної точки. Рух матеріальної точки по колу. Зв'язок між лінійними та кутовими характеристиками руху.

Динаміка матеріальної точки. Робота та енергія. Інерційні системи відліку. Перший закон Ньютона. Взаємодія тіл. Сила та інертна маса. Рівнодійна сила. Другий та третій закони Ньютона. Ізольована система матеріальних тіл. Імпульс. Закон збереження імпульсу. Центр маси системи та його рух. Сили в природі. Консервативні та неконсервативні сили. Силове поле. Гравітаційні сили та принцип еквівалентності гравітаційної і інертної маси. Сила тяжіння і вага тіла. Сили тертя. Робота. Робота змінної сили. Потужність. Потенціальна енергія. Зв'язок між силою і потенціальною енергією. Кінетична енергія. Закон збереження енергії в механіці. Співудари двох тіл. Абсолютно пружний та абсолютно непружний удар.

Механічні коливання. Періодичні рухи. Математичний і фізичний маятники. Квазіпружні сили. Гармонічні коливання. Рівняння гармонічних коливань. Основні характеристики коливального руху: амплітуда, фаза, частота, період. Складання коливань. Кінетична, потенціальна та повна енергія гармонічного коливання. Затухаючі коливання. Вимушені коливання. Резонанс.

Динаміка твердого тіла. Поняття абсолютно твердого тіла. Поступальний та обертальний рух тіла. Момент імпульсу. Момент інерції. Момент сили. Основний закон динаміки обертального руху. Закон збереження моменту імпульсу. Обчислення моменту інерції простих тіл (куля, диск, стержень). Теорема Штейнера. Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Умови рівноваги тіл.

Елементи спеціальної теорії відносності. Межа застосування класичної механіки. Принцип відносності Галілея. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца. Релятивістська зміна довжини та проміжку часу. Релятивістський закон складання швидкостей. Релятивістська динаміка. Зв'язок маси та енергії.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 0.

1. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = Bt + Ct^2$, де $B=3$ м/с; $C=2$ м/с². Знайти середню шляхову швидкість і середнє прискорення тіла в інтервалі часу від 1 с до 4 с.

2. Куля масою $m_1=2$ кг зіткнулася з кулею, що знаходиться в спокої і має більшу масу. При цьому перша куля втрачає 40% кінетичної енергії. Визначити масу m_2 більшої кулі, якщо зіткнення було абсолютно пружним, прямим, центральним.

3. Хлопчик масою 50 кг, що скочується на санях з гірки, проїхав по горизонтальній дорозі до зупинки шлях 20 м за 10 с. Визначити силу тертя і коефіцієнт тертя на горизонтальній ділянці шляху.

4. На похилій площині довжиною 5 м і висотою 3 м знаходиться тягар масою 50 кг. Яку силу потрібно прикласти вздовж площини, щоб утримати цей тягар? Щоб тягти тягар вгору з прискоренням 1 м/с²? Коефіцієнт тертя 0.2.

5. Через блок, виконаний у вигляді колеса, перекинута нитка, до кінців якої прив'язані тягарі масами $m_1=100$ г і $m_2=300$ г. Маса колеса $m=200$ г вважати рівномірно розподіленою по ободу, масою спиць нехтувати. Визначити прискорення, з яким будуть рухатися тягарі, і сили натягу нитки по обидві сторони блока.

6. Пружина жорсткістю $k=500$ Н/м стиснена силою $F=100$ Н. Визначити роботу A зовнішньої сили, що додатково стискає цю пружину ще на $\Delta l=2$ см.

7. Платформа у вигляді однорідного диска діаметром $D=3$ м і масою $m_1=180$ кг може обертатися навколо вертикальної осі. Визначити, з якою кутовою швидкістю ω_1 буде обертатися ця платформа, якщо вздовж краю платформи буде йти людина масою $m_2=70$ кг, із швидкістю $v=1.8$ м/с відносно платформи.

8. На дисковому конвейері, що обертається у горизонтальній площині на відстані 1 м від осі обертання, лежать деталі вагою 20 кг. Коефіцієнт тертя між деталями і поверхнею конвейера дорівнює 0.2. При якій найменшій кутовій швидкості деталі сповзатимуть з конвейера?

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 1.

1. По прямій лінії рухаються дві матеріальні точки згідно рівняння: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ і $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$ $A_1=10$ м, $B_1=1$ м/с, $C_1=2$ м/с², $A_2=3$ м, $B_2=2$ м/с, $C_2=0,2$ м/с². В який момент часу швидкості цих точок будуть однакові? Знайти прискорення a_1 і a_2 цих точок у момент часу $t=3$ с.

2. Гармата, що жорстко закріплена на залізничній платформі, робить постріл вздовж залізничної колії під кутом $\alpha = 30^\circ$ до лінії горизонту. Визначити швидкість u_2 , з якою відкочується платформа, якщо снаряд вилітає маючи, швидкість $u_1=480$ м/с. Маса платформи з гарматою і снарядом $m=18$ т, маса снаряда $m_1=60$ кг.

3. Шайба, яку пустили по поверхні льоду з початковою швидкістю $v_0=20$ м/с, зупинилась через $t=40$ с. Визначити коефіцієнт тертя шайби об лід.

4. Кулька масою $m=30$ г прив'язана до нитки завдовжки $l=30$ см, рівномірно обертається у вертикальній площині зі швидкістю $v=180$ см/с. Визначити силу натягу нитки у верхньому і нижньому положеннях кульки.

5. Тонкостінний циліндр з діаметром основи $D=30$ см і масою $m=12$ кг обертається згідно рівняння $\varphi = At + Bt + Ct^3$ де $A=4$ рад; $B= -2$ рад/с; $C=0.2$ рад/с³. Визначити діючий момент сил M у момент часу $t=3$ с.

6. Із дула автоматичного пістолета вилетіла куля масою $m_1=10$ г, маючи швидкість $v=300$ м/с. Затвор пістолета масою $m_2=200$ г притискається до дула пружиною, жорсткість якої $k=25$ кН/м. Визначити, на яку відстань відійде затвор після пострілу. Вважати, що пістолет жорстко закріплений.

7. На лаві Жуковського стоїть людина і тримає стержень $m=6$ кг і довжиною $l=1.8$ м вертикально вздовж осі обертання лави. Момент інерції лави і людини $J=5$ кг·м². Лава обертається з кутовою швидкістю $\omega_1=4$ рад/с. Визначити, з якою швидкістю ω_2 буде обертатися лава, коли людина поверне стержень горизонтально.

8. Автомобіль рухається по заокругленню радіусом R із швидкістю $v=60$ км/год. Коефіцієнт тертя ковзання між шинами автомобіля і асфальтом $k=0.45$. Визначити мінімальне значення R , коли ще можливе проходження автомобілем даного заокруглення з такою швидкістю.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 2.

1. Три чверті свого шляху автомобіль пройшов, маючи швидкість $v_1=60$ км/год, а решту шляху - зі швидкістю $v_2=80$ км/год. Визначити середню швидкість автомобіля.

2. Визначити імпульс \vec{p} , що отримає стінка при ударі кульки масою $m=300$ г, якщо кулька рухається, маючи швидкість $v=8$ м/с під кутом 60° до площини стінки (удар пружний).

3. Канат лежить на столі так, що частина його звисає зі столу, і починає ковзати тоді, коли довжина частини, що звисає, дорівнює 25% усієї його довжини. Чому дорівнює коефіцієнт тертя каната об стіл?

4. Тонкостінний циліндр з діаметром основи $D=30$ см і масою $m=12$ кг обертається згідно рівняння $\varphi = At + Bt + Ct^3$ де $A=4$ рад; $B= -2$ рад/с; $C=0.2$ рад/с³. Визначити діючий момент сил M у момент часу $t=3$ с.

5. Тонкий стержень довжиною 50 см і масою 400 г обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon=3$ рад/с² навколо осі, що проходить через середину стержня перпендикулярно до його довжини. Визначити обертальний момент.

6. Гиря, покладена на верхній кінець пружини, стискає її на $x=10$ мм. На скільки стисне пружину ця гиря, якщо її кинути вертикально вниз з висоти $h=0.2$ м зі швидкістю $v=1$ м/с?

7. Горизонтальна платформа масою 100 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, роблячи 10 об/хв. Людина вагою 600 Н стоїть на краю платформи. Визначити, з якою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи у її центр. При розрахунках вважати платформу круглим однорідним диском, а людину - матеріальною точкою.

8. Знайти роботу, яку потрібно виконати, щоб збільшити швидкість руху тіла від 2 м/с до 6 м/с на шляху 10 м. На всьому шляху діє постійна сила тертя, до дорівнює 2 Н. Маса тіла дорівнює 1 кг.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 3.

1. Швидкість руху теплохода по річці за течією 21 км/год, а проти течії - 17 км/год. Визначити швидкість течії води у річці і власну швидкість теплохода.

2. У дерев'яну кулю, що висить на нитці довжиною $l=1.8$ м і масою $m_1=8$ кг влучає куля, що летить горизонтально. Маса кулі $m_2=4$ г. Визначити, з якою швидкістю летіла куля, якщо нитка відхилилась на кут 3° .

3. Тіло масою 0.2 кг вільно падає з висоти 1 м. Знайти зміну модуля імпульсу цього тіла за час падіння.

4. Визначити силу тяги, що розвивається мотором автомобіля, який рухається у гору з прискоренням 1 м/с^2 . Ухил гори становить 1 м на кожні 25 м шляху. Вага автомобіля $9.8 \cdot 10^3 \text{ Н}$. Коефіцієнт тертя дорівнює 0.1.

5. Стержень обертається навколо осі, що проходить через його середину згідно рівняння $\varphi = At + Bt^3$, де $A=2$ рад/с, $B=0.2$ рад/с³. Визначити обертальний момент M , що діє на стержень у момент часу $t=2$ с, якщо момент інерції стержня $J=0.048$ кг·м².

6. Знайти роботу, яку потрібно виконати, щоб стиснути пружину на 20 см, якщо відомо, що сила пропорційна деформації і під дією сили у 29.4 Н пружина стискається на 1 см.

7. Кругла платформа радіусом $R=1$ м, момент інерції якої $J = 130$ кг · м², обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $\nu_1=1$ об/с. На краю платформи стоїть людина, маса якої $m=70$ кг. Визначити, з якою частотою ν_2 буде обертатися платформа, якщо людина перейде у її центр. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

8. Хлопчик котить обруч по горизонтальній дорозі із швидкістю 7.2 км/год. Визначити, на яку відстань зможе скотитися обруч на гору за рахунок його кінетичної енергії. Ухил гори становить 10 м на кожні 100 м шляху.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 4.

1. Точка рухається по колу радіусом $R=8\text{ м}$. У деякий момент часу нормальне прискорення точки $a_n=4\text{ м/с}^2$, вектор повного прискорення \vec{a} утворює у цей момент з вектором нормального прискорення \vec{a}_T кут $\alpha = 60^\circ$. Знайти швидкість v і тангенціальне прискорення a_T точки.

2. По невеликому куску м'якого заліза, що лежить на наковальні масою $m_1=300\text{ кг}$, вдаряє молот масою $m_2=8\text{ кг}$. Визначити к.к.д. удару, якщо удар непружний. Корисною вважати енергію, що йде на деформацію куска заліза.

3. На столі стоїть возик масою $m_1=4\text{ кг}$. До возика прив'язаний один кінець мотузки, перекинutoї через блок. Визначити, з яким прискоренням a буде рухатися візок, якщо до другого кінця мотузки прив'язати гирю масою $m_2=1\text{ кг}$.

4. Визначити, яку силу потрібно прикласти до вагона, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час $t=30\text{ с}$ пройшов шлях $S=11\text{ м}$. Маса вагона $m=16\text{ т}$. Під час руху на вагон діє сила тертя, що дорівнює 0.05 ваги вагона.

5. Нитка з прив'язаними до її кінців тягарями масою $m_1=50\text{ г}$ і $m_2=60\text{ г}$ перекинута через блок діаметром $D=4\text{ см}$. Визначити момент інерції блока, якщо під дією сили тяжіння тягарів він одержав кутове прискорення $\varepsilon=1.5\text{ рад/с}^2$.

6. Щоб стиснути пружину на 1 см , потрібно прикласти силу 10 Н . Визначити, яку роботу потрібно виконати, щоб стиснути пружину на 10 см , якщо сила прямо пропорційна деформації.

7. На краю платформи у вигляді однорідного диска, що обертається навколо вертикальної осі з частотою $\nu_1=8\text{ хв}^{-1}$, стоїть людина масою $m_1=70\text{ кг}$. Коли людина переходить у центр платформи, вона починає обертатися з частотою $\nu_2=10\text{ хв}^{-1}$. Визначити масу m_2 платформи. Момент інерції людини розрахувати, як для матеріальної точки.

8. Визначити момент сили M , який необхідно прикласти до блоку, що обертається з частотою $\nu=12\text{ с}^{-1}$, щоб він зупинився протягом $\Delta t=8\text{ с}$. Діаметр блока $D=30\text{ см}$. Масу блока $m=6\text{ кг}$ вважати рівномірно розподіленою по його ободу.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 5.

1. Визначити повне прискорення a у момент $t=3$ с точки, що знаходиться на ободі колеса радіусом $R=0.5$ м, що обертається згідно рівняння $\varphi = At + Bt^3$, де $A=2$ рад/с; $B=0.2$ рад/с³.

2. Частинка масою $m_1 = 4 \cdot 10^{-20}$ г зіткнулася з частинкою масою $m_2 = 10^{-19}$ г, що знаходилася у спокої. Вважаючи зіткнення абсолютно пружним, визначити максимальну відносну втрату енергії першої частки.

3. Матеріальна точка масою $m=2$ кг рухається під дією деякої сили згідно рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $C=1$ м/с²; $D= -0.2$ м/с³. Знайти значення цієї сили у моменти часу $t_1=2$ с; $t_2=5$ с. у який момент часу сила дорівнює нулю?

4. Під дією постійної сили вагонетка пройшла по горизонтальному шляху відстань 5 м і набула швидкості 2 м/с. Визначити роботу сили, якщо маса вагонетки 400 кг і коефіцієнт тертя 0.01.

5. Визначити швидкість поступального руху суцільного циліндра, що скоївся з похилої площини висотою $h=20$ см.

6. Налетівши на пружинний буфер, вагон масою $m=16$ т, що рухався із швидкістю $v=0.6$ м/с, зупинився, стиснувши пружину на $\Delta l=8$ см. Визначити загальну жорсткість буфера.

7. На легкому столику, який вільно обертається, стоїть людина і тримає на витягнутих руках на відстані $l_1=1.5$ м одна від однієї дві однакові гирі масою $m=2.5$ кг кожна. Потім людина зближає гирі до відстані $l_2=40$ см; при цьому кутова швидкість обертання столика зростає від $\omega_1=6$ рад/с до $\omega_2=12$ рад/с. Вважаючи момент інерції людини відносно осі обертання столика сталим, знайти роботу, яку вона виконує.

8. Двигун потужністю $W=0.2$ кВт приводить у рух токарний верстат, на якому обробляють дерев'яний циліндр. Діаметр циліндра $d=5$ см, частота обертання $n = 700$ об/хв. Визначити силу, з якою різець відокремлює стружку, вважаючи, що потужність на верстаті становить $\eta=80\%$ потужності двигуна.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 6.

1. Точка рухається по колу радіусом $R=1,2$ м. Рівняння руху точки $\varphi = At + Bt^3$, де $A=0.5$ рад/с; $B=0.2$ рад/с³. Визначити тангенціальне a_τ , нормальне a_n і повне прискорення a точки у момент часу $t=4$ с.

2. Визначити к.к.д. непружного зіткнення бійка масою $m_1=0.5$ т, що падає на сваю масою $m_2=120$ кг. Корисною вважати енергію, що пішла на забивання сваї.

3. Машина вагою 1 кН рухається по горизонтальному шляху, маючи швидкість 20 км/год. Шофер вимкнув двигун. Визначити, за який час зупиниться машина, якщо сила тертя 200 Н.

4. Визначити роботу, яка виконується при рівноприскореному підйомі тіла масою 100 кг на висоту 4 м за 2 с.

5. На маховик діаметром $D=60$ см намотано трос, до кінця якого прив'язали тягар масою $m=2$ кг. Визначити момент інерції маховика, якщо він, обертаючись рівноприскорено під дією тягаря, за час $t=3$ с досяг кутової швидкості $\omega=9$ рад/с.

6. Визначити, з якою швидкістю рухався вагон масою 20 т, якщо при ударі об стінку кожний з його двох буферів стискається на 10 см. Відомо, що пружина кожного буфера стискається на 1 см під дією сили у 10 кН.

7. Визначити момент сили M , який необхідно прикласти до блоку, що обертається з частотою $\nu=12$ с⁻¹, щоб він зупинився протягом $\Delta t=8$ с. Діаметр блока $D=30$ см. Маса блока $m=6$ кг важати рівномірно розподіленою по його ободу.

8. Нехтуючи тертям, визначити, яку роботу треба виконати, щоб довести маховик, масу якого $m=0.2$ т наближено можна вважати рівномірно розподіленою по його ободу діаметром $d=1.2$ м, до рівномірного обертання з частотою $n=100$ об/хв.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 7.

1. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t задається рівнянням $s = At + Bt^2 + Ct^3$, де $A=2$ м/с, $B=3$ м/с², $C=4$ м/с³. Знайти: 1) залежність швидкості v і прискорення a від часу t ; 2) відстань, що проходить тіло, швидкість і прискорення тіла через 2 с після початку руху.

2. У човні масою $M=240$ кг стоїть людина масою $m=60$ кг. Човен пливе з швидкістю $v=2$ м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямку з швидкістю $u=4$ м/с (відносно човна). Знайти швидкість човна після стрибка людини: 1) вперед в напрямку руху човна; 2) у бік, протилежний напрямку руху човна.

3. Похила площина, довжина якої $l=2$ м, має кут нахилу $\alpha = 25^\circ$. Тіло, рухаючись рівноприскоренно, зісковзнуло з цієї площини за час $t=2$ с. Визначити коефіцієнт тертя тіла по площині.

4. Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув вперед гирю масою 5 кг і внаслідок віддачі покотився назад, маючи швидкість 1 м/с. Маса ковзаняра 6 кг. Визначити роботу, що виконав ковзаняр при киданні гирі.

5. Циліндр, що розташований горизонтально, може обертатися навколо осі, що співпадає з віссю циліндра. Маса циліндра $m_1=12$ кг. На циліндр намотали шнур, до якого прив'язали гирю масою $m_2=1$ кг. Визначити, з яким прискоренням буде опускатися гиря. Яка сила натягу шнура під час руху гирі?

6. З пружинного пістолета з пружиною жорсткістю $k=150$ Н/м був зроблений постріл кулею, маса якої $m=8$ г. Визначити швидкість кулі при вильоті з пістолета, якщо пружина була стиснена на $x=4$ см.

7. Суцільний однорідний вал робить 60 об/хв. Визначити, через скільки секунд він почне обертатися із частотою 480 об/хв, якщо на нього діє постійна дотична сила 200 Н. Маса вала 300 кг, радіус вала 20 см.

8. Визначити середню корисну потужність при пострілі рушниць, якщо відомо, що куля масою 10 г вилітає зі ствола з швидкістю $v=320$ м/с, а довжина каналу ствола $l=65$ см. Силу тиску порохових газів на кулю у каналі ствола наближено вважати сталою.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 8.

1. Дві матеріальні точки рухаються згідно рівнянь $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ і $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, де $A_1 = 4\text{ м/с}$, $B_2 = 8\text{ м/с}^2$, $C_1 = -16\text{ м/с}^3$, $A_2 = 2\text{ м/с}$, $B_2 = -4\text{ м/с}^2$, $C_1 = 1\text{ м/с}^3$. В який момент часу t прискорення цих точок будуть однакові? Знайти швидкості v_1 і v_2 точок у цей момент.

2. Куля масою 10 кг зіткнулася з кулею масою 4 кг. Швидкість першої кулі $v_1 = 4\text{ м/с}$, швидкість другої - $v_2 = 12\text{ м/с}$. Знайти спільну швидкість u куль після зіткнення у двох випадках: 1) мала куля доганяє більшу кулю, що рухається у тому ж напрямку; 2) кулі рухаються назустріч одна одній. Зіткнення куль є прямим, центральним, непружним.

3. Поїзд вагою 4400 кН рухається по горизонтальному шляху, маючи швидкість 27 км/год, і починає гальмування. Визначити час, за який поїзд зупиниться, якщо гальмовна сила становить 44 кН.

4. Знайти роботу по підйому тіла по похилій площині, якщо його маса 100 кг, довжина похилої площини 2 м, кут нахилу 30° , коефіцієнт тертя 0.1 і тіло рухається з прискоренням 1 м/с^2 .

5. Блок, який має форму диска масою $m = 0.4\text{ кг}$, обертається під дією сили натягу нитки, яка перекинута через блок. До кінців нитки прив'язані тягарі масою $m_1 = 0.3\text{ кг}$ і $m_2 = 0.7\text{ кг}$. Визначити сили T_1 і T_2 натягу нитки по одній і другій сторонах блока.

6. Якщо на верхній кінець вертикально розташованої спіральної пружини покласти тягар, то пружина стиснеться на $\Delta l = 3\text{ мм}$. Визначити, на скільки стисне пружину тягар (той самий), що падав на кінець пружини з висоти $h = 8\text{ см}$?

7. Платформа у вигляді суцільного однорідного диску обертається по інерції навколо нерухомої вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина, маса якої у 4 рази менше маси платформи. Визначити, як і у скільки разів зміниться швидкість обертання платформи, якщо людина перейде ближче до центра на відстань, що дорівнює 0.5 радіуса платформи?

8. Тіло масою $m = 40\text{ г}$ кинуте з поверхні Землі під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Через $t = 5\text{ с}$ воно впало на Землю. Нехтуючи опором повітря, визначити роботу кидання.

**Державний економіко - технологічний
університет транспорту
Кафедра фізики і електротехніки
Контрольна робота з фізичної механіки**

Варіант 9.

1. Спостерігач, який стояв у момент початку руху електропоїзда біля його переднього кінця, помітив, що перший вагон пройшов повз нього за $t=4,5$ с. Скільки часу рухатиметься повз нього 8-й вагон, якщо рух електропоїзда рівноприскорений?

2. З висоти $h=2$ м на сталюну плиту вільно падає кулька масою $m=200$ г і підстрибує на висоту $h_1=0,5$ м. Визначити імпульс \vec{p} , що отримує кулька при зіткненні.

3. Тіло масою $m=1$ кг, кинуте з висоти у горизонтальному напрямку, має швидкість $v=20$ м/с. Через $t=3$ с воно впало на землю. Визначити кінетичну енергію T , яку воно мало у момент падіння на землю. Опором повітря знехтувати.

4. Визначити, з якою швидкістю автомобіль повинен їхати через середину опуклого мосту з радіусом кривизни 40 м, щоб пасажир на мить опинився у стані невагомості.

5. Куля скочується з похилої площини, висота якої $h=90$ см. Визначити, яку лінійну швидкість буде мати центр кулі у той момент, коли куля скотиться з похилої площини?

6. Визначити, яку роботу A треба виконати, щоб пружину жорсткістю $k=800$ Н/м, стиснути на $x=6$ см, додатково стиснути на $\Delta x=8$ см.

7. Платформа у вигляді однорідного диска обертається по інерції навколо вертикальної осі з частотою $\nu_1=15$ хв⁻¹. На краю платформи стоїть людина. Коли людина перейшла у центр платформи, частота обертання зросла до $\nu_2=25$ хв⁻¹. Маса платформи =210 кг. Визначити масу людини. Момент інерції людини розрахувати, як для матеріальної точки.

8. Тіло масою $m=100$ г кинуте під кутом до горизонту з висоти $h=10$ м над поверхнею землі з початковою швидкістю $v_0=20$ м/с. У момент падіння на землю швидкість тіла була $v=24$ м/с. Знайти роботу, витрачену на подолання опору повітря.

3. Основні формули і співвідношення курсу фізичної механіки

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки (або центру мас твердого тіла) вздовж осі OX має вигляд:

$$x = f(t), \quad (3.1)$$

де $f(t)$ — деяка функція часу.

Миттєва швидкість:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.2)$$

Модуль миттєвої швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (3.3)$$

де $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$ — проекції вектора миттєвої швидкості на координатні осі.

Середнє значення проекції вектора швидкості на координатну вісь OX :

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad (3.4)$$

де x_1 та x_2 — координати матеріальної точки в моменти часу t_1 та t_2 .

Миттєва шляхова швидкість (дорівнює модулю миттєвої швидкості):

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (3.5)$$

Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (3.6)$$

де Δs — відрізок шляху, пройдений точкою за інтервал часу Δt . На відміну від різниці координат, шлях не може зменшуватися або набувати від'ємних значень, тобто $\Delta s \geq 0$.

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.7)$$

Проекція вектора миттєвого прискорення на координатну вісь OX :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad (3.8)$$

Середнє значення проекції вектора прискорення на координатну вісь OX :

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad (3.9)$$

де $\Delta v_x = v_{x2} - v_{x1}$, v_{x1} та v_{x2} — проекції вектора миттєвої швидкості на координатну вісь OX в моменти часу t_1 та t_2 , $\Delta t = t_2 - t_1$.

Кінематичні рівняння поступального руху з постійним прискоренням:

$$v = v_0 \pm at, \quad (3.10)$$

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \quad (3.11)$$

де знак (+) береться коли напрям вектора прискорення \vec{a} збігається з напрямом вектора швидкості \vec{v} , а знак (-) — при протилежних напрямках векторів \vec{v} і \vec{a} .

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по колу радіуса R :

$$\varphi = f(t), \quad (3.12)$$

де $f(t)$ — деяка функція часу.

Кутова швидкість:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.13)$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad (3.14)$$

Зв'язок між лінійними та кутовими величинами, що характеризують рух точки по колу:

$$v = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R, \quad (3.15)$$

де v — модуль лінійної швидкості; a_τ — модуль тангенціального прискорення, a_n — модуль нормального прискорення; ω — модуль кутової швидкості; ε — модуль кутового прискорення; R — радіус кола.

Модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \text{або} \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.16)$$

Кут α між векторами повного прискорення і нормального прискорення:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a_n}{a}\right). \quad (3.17)$$

Імпульс матеріальної точки масою m , яка рухається зі швидкістю \vec{v} :

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.18)$$

Другий закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (3.19)$$

де $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N$ — векторна сума всіх сил, що діють на тіло.

Зміна імпульсу $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ під дією постійної сили \vec{F} :

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}, \quad (3.20)$$

Закон збереження імпульсу:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots + \vec{p}'_N, \quad (3.21)$$

де $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ — імпульси тіл до взаємодії, $\vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_N$ — імпульси тіл після взаємодії. Для двох тіл:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \quad (3.22)$$

де \vec{v}_1 та \vec{v}_2 — швидкості цих тіл до взаємодії між ними, \vec{u}_1 та \vec{u}_2 — швидкості цих тіл після взаємодії.

Правило складання швидкостей: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$, де \vec{v}' — швидкість точки відносно рухомої системи відліку; \vec{v} — швидкість точки відносно нерухомої системи відліку; \vec{u} — швидкість руху рухомої системи відліку відносно нерухомої системи відліку.

Модуль сили пружності:

$$F = kx, \quad (3.23)$$

k — коефіцієнт пружності (у випадку пружини — жорсткість), x — модуль вектора пружної деформації тіла.

Модуль сили тяжіння:

$$P = mg, \quad (3.24)$$

де g — прискорення вільного падіння (біля поверхні Землі $g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$).

Модуль сили тертя ковзання:

$$F_{\text{тер.}} = \mu N \quad (3.25)$$

де μ — коефіцієнт тертя ковзання, N — модуль сили нормальної реакції опори.

Робота постійної сили \vec{F} на прямолінійному шляху

$$A = Fs \cos \alpha, \quad (3.26)$$

де s — модуль переміщення (довжина шляху), α — кут між напрямом дії сили та напрямом переміщення.

Миттєва потужність:

$$N = \vec{F}\vec{v} = Fv \cos \alpha. \quad (3.27)$$

Середня потужність

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}, \quad (3.28)$$

де Δt — час виконання роботи A .

Кінетична енергія тіла, яке рухається поступально:

$$W_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2}, \quad \text{або} \quad W_{\text{К}} = \frac{p^2}{2m}, \quad (3.29)$$

де m — маса тіла, v — модуль швидкості його руху, p — модуль імпульсу тіла.

Зміна кінетичної енергії:

$$W_{\text{К}2} - W_{\text{К}1} = A, \quad (3.30)$$

де A — робота всіх сил, що діють на тіло.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла:

$$W_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2}, \quad (3.31)$$

де $x = |\vec{\Delta l}|$ — модуль вектора пружної деформації тіла.

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії:

$$W_{\text{П}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (3.32)$$

де G — гравітаційна стала, m_1 та m_2 — маси взаємодіючих тіл, r — відстань між ними (тіла розглядаються як матеріальні точки).

Потенціальна енергія тіла масою m на висоті h над поверхнею Землі:

$$W_{\text{П}} = mgh. \quad (3.33)$$

Повна механічна енергія тіла або системи тіл:

$$W = W_{\text{К}} + W_{\text{П}}. \quad (3.34)$$

Зміна повної механічної енергії тіла дорівнює роботі A дисипативних сил (наприклад, сили тертя), що діють на тіло:

$$W_2 - W_1 = A. \quad (3.35)$$

Величина моменту сили M відносно певної осі:

$$M = Fl, \quad (3.36)$$

де F — модуль сили, l — плече сили (найкоротша відстань від осі до лінії дії сили).

Рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі OZ :

$$M_z = J_z \varepsilon, \quad (3.37)$$

де M_z — результуючий момент зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі обертання OZ ; J_z — момент інерції тіла відносно осі обертання; ε — кутове прискорення.

Моменти інерції деяких однорідних тіл масою m :

1. порожнистий тонкостінний циліндр (обруч) радіусом R відносно осі, яка співпадає з геометричною віссю циліндра (перпендикулярна до площини обруча і проходить через його центр):

$$J_z = mR^2;$$

2. суцільний циліндр (вал, диск) радіусом R відносно осі, яка співпадає з геометричною віссю циліндра:

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2;$$

3. куля радіусом R відносно осі, яка проходить через центр кулі:

$$J_z = \frac{2}{5}mr^2;$$

4. стержень довжиною l відносно осі, яка проходить через середину стержня перпендикулярно до нього:

$$J_z = \frac{1}{12}ml^2;$$

5. стержень довжиною l відносно осі, яка проходить через кінець стержня перпендикулярно до нього:

$$J_z = \frac{1}{3}ml^2.$$

Модуль вектора моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки O :

$$L = rp \sin \alpha, \quad (3.38)$$

де $r = |\vec{r}|$, \vec{r} — радіус-вектор, проведений з точки O до матеріальної точки; $p = mv$, m та v — маса та модуль швидкості матеріальної точки; α — кут між

векторами \vec{r} та \vec{v} .

Модуль моменту імпульсу тіла, яке обертається навколо нерухомої осі OZ :

$$L_z = J_z \omega, \quad (3.39)$$

де ω — кутова швидкість обертання тіла.

Закон збереження моменту імпульсу системи тіл, що обертаються навколо нерухомої осі:

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2, \quad (3.40)$$

де J_1, ω_1 та J_2, ω_2 — відповідно моменти інерції системи тіл та кутові швидкості обертання в моменти часу, що прийняті за початковий та кінцевий.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$W_K = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad \text{або} \quad W_K = \frac{L_z^2}{2J_z}. \quad (3.41)$$

Кінетична енергія тіла, яке котиться по поверхні без ковзання

$$W_K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}, \quad (3.42)$$

де m — маса тіла; v_c — швидкість центру мас тіла; J_c — момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла; ω — кутова швидкість тіла.

4. Приклади розв'язування задач з фізичної механіки

Приклад №1. Велосипедист проїхав першу третину шляху зі швидкістю $8 \frac{\text{М}}{\text{С}}$, а останні дві третини шляху з швидкістю $4 \frac{\text{М}}{\text{С}}$. Визначити середню шляхову швидкість велосипедиста на всьому шляху.

$\begin{aligned} v_1 &= 8 \frac{\text{М}}{\text{С}} \\ s_1 &= \frac{1}{3}s \\ v_2 &= 4 \frac{\text{М}}{\text{С}} \\ s_2 &= \frac{2}{3}s \end{aligned}$	За означенням, середня шляхова швидкість (середня швидкість проходження шляху) дорівнює
$\langle v \rangle = ?$	$\langle v \rangle = \frac{s}{t},$
	де s — весь пройдений шлях, t — час руху. В нашому випадку $t = t_1 + t_2$, де $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{3v_1}$

частини шляху, $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{2s}{3v_2}$ — час проходження другої частини шляху.

Тому загальний час руху велосипедиста

$$t = \frac{s}{3v_1} + \frac{2s}{3v_2} = \frac{s}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} \right) = \frac{s}{3} \frac{v_2 + 2v_1}{v_1 v_2}.$$

Підставивши одержаний вираз для часу руху у формулу для визначення середньої швидкості, одержимо:

$$\langle v \rangle = \frac{s}{\frac{s}{3} \cdot \frac{v_2 + 2v_1}{v_1 v_2}} = \frac{3v_1 v_2}{v_2 + 2v_1}.$$

Підставляємо числові значення:

$$\langle v \rangle = \frac{3 \cdot 8 \cdot 4}{2 \cdot 8 + 4} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $\langle v \rangle = 4,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Приклад №2. Кінематичне рівняння прямолінійного руху матеріальної точки вздовж осі OX має вигляд

$$x = A + Bt + Ct^3,$$

де t — час, $A = 2 \text{ м}$, $B = 8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $C = -0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^3}$. Для моменту часу $t_2 = 2 \text{ с}$ визначити: 1) координату x_2 точки; 2) миттєву швидкість \vec{v} ; 3) миттєве прискорення \vec{a} ; 4) середню шляхову швидкість v за інтервал часу від $t_1 = 1 \text{ с}$ до $t_2 = 2 \text{ с}$.

Розв'язання. 1) Координату точки, для якої відоме кінематичне рівняння руху, знаходимо, підставляючи в рівняння руху замість t задане значення часу t_2 :

$$x_2 = A + Bt_2 + Ct_2^3.$$

Підставляємо в цей вираз значення A , B , C , t_2 і виконуємо обчислення:

$$x_1 = (2 + 8 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) \text{ м} = 14 \text{ м}.$$

2) Проекція вектора миттєвої швидкості на координатну вісь OX визначається як похідна від координати за часом:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Тоді в заданий момент часу

$$v_{2x} = B + 3Ct_2^2.$$

Підставимо в цей вираз значення B , C , t_2 і виконаємо обчислення:

$$v_{2x} = (8 + 3 \cdot (-0,5) \cdot 2^2) \frac{\text{М}}{\text{с}} = 2 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Вектор миттєвої швидкості має модуль $2 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, його напрям співпадає з додатним напрямом координатної осі (оскільки $v_{2x} > 0$).

3) Проекція вектора миттєвого прискорення на координатну вісь OX :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct.$$

В заданий момент часу

$$a_{1x} = 6Ct_2.$$

Підставимо в цей вираз значення C та t_2 і виконаємо обчислення:

$$a_{2x} = 6 \cdot (-0,5) \cdot 2 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} = -6 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Вектор миттєвого прискорення має модуль $6 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$, його напрям співпадає з від'ємним напрямом координатної осі (оскільки $a_{2x} < 0$).

4) Середня шляхова швидкість

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

де Δs — відрізок шляху, пройдений точкою за інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta S = x_2 - x_1 = (A + Bt_2 + Ct_2^3) - (A + Bt_1 + Ct_1^3) = B(t_2 - t_1) + C(t_2^3 - t_1^3).$$

Тому

$$\langle v \rangle = \frac{B(t_2 - t_1) + C(t_2^3 - t_1^3)}{t_2 - t_1} = B + \frac{(t_2^3 - t_1^3)}{t_2 - t_1}.$$

Підставляємо в цей вираз значення B , C , t_1 , t_2 і виконуємо обчислення:

$$\langle v \rangle = 8 - 0,5 \cdot \frac{2^3 - 1^3}{2 - 1} \frac{\text{М}}{\text{с}} = 4,5 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $x_2 = 14 \text{ м}$, $v_{2x} = 2 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, $a_{2x} = -6 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$, $\langle v \rangle = 4,5 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

Приклад №3. Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ рад, $B = 3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $C = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Визначити величини нормального, тангенціального і повного прискорення точки, яка знаходиться на відстані $r = 0,1$ м від осі обертання для моменту часу $t = 4$ с.

Розв'язання. Нормальне прискорення точки обчислимо за формулою

$$a_n = \omega^2 r,$$

де ω — кутова швидкість:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

Тоді

$$a_n = (B + 2Ct)^2 r.$$

Підставляємо в цей вираз значення B , C , t і виконуємо обчислення:

$$a_n = (3 + 2 \cdot 2 \cdot 4)^2 \cdot 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 36,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тангенціальне прискорення точки обчислимо за формулою

$$a_\tau = \varepsilon r,$$

де ε — кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C.$$

Тоді

$$a_\tau = 2Cr.$$

$$a_\tau = 2 \cdot 2 \cdot 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Оскільки вектори \vec{a}_n та \vec{a}_τ взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

$$a = \sqrt{36,1^2 + 0,4^2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \sqrt{1303,37} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 36,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a_n = 36,1 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$; $a_\tau = 0,4 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$; $a = 36,1 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$.

Приклад №4. Тіло масою $m_1 = 200$ г рухається вгору вздовж нахиленої під кутом $\alpha = 30^\circ$ площини під дією тягарця масою $m_2 = 300$ г, який з'єднаний з тілом невагомою нерозтяжною ниткою. Нитка перекинута через невагомий блок, закріплений на вершині площини. Тягарець вільно висить на нитці, блок вільно обертається без тертя. Коефіцієнт тертя між тілом та площиною $\mu = 0,2$. Визначити величину прискорення, з яким рухається тіло.

$m_1 = 200$ г	$m_1 = 0,2$ кг
$m_2 = 300$ г	$m_2 = 0,3$ кг
$\alpha = 30^\circ$	
$\mu = 0,2$	
$a = ?$	

На тіло діють такі сили: $m_1\vec{g}$ — сила тяжіння, $\vec{F}_{\text{тер.}}$ — сила тертя, \vec{N} — сила нормальної реакції опори (площини), \vec{T}_1 — сила натягу нитки. На тягарець діють сила тяжіння $m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки \vec{T}_2 . Запишемо у векторній формі рівняння другого закону

Ньютона для тіла та тягарця.

$$\vec{N} + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер.}} = m_1\vec{a}_1. \quad (4.43)$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2. \quad (4.44)$$

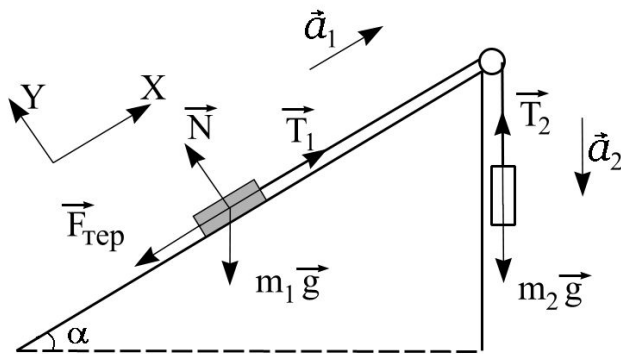


Рис. 4.2.

Запишемо проекції рівнянь 4.43 та 4.44 на координатні осі, враховуючи знаки проекцій векторів. При цьому врахуємо, що тягарець і тіло рухаються з однаковим за модулем прискоренням, оскільки нитка нерозтяжна: $a_1 = a_2 = a$. Оскільки блок вільно обертається, то модуль сили натягу нитки з обох боків блока однаковий: $T_1 = T_2 = T$. Рівняння (1) запишемо в проекціях на осі OX та OY :

$$T - m_1g \sin \alpha - F_{\text{тер.}} = m_1a. \quad (4.45)$$

$$N - m_1g \cos \alpha = 0. \quad (4.46)$$

Рівняння 4.44 запишемо в проекціях на вісь, спрямовану вертикально вниз:

$$m_2g - T = m_2a. \quad (4.47)$$

З рівняння 4.46 знаходимо: $N = m_1g \cos \alpha$, тоді $F_{\text{тер.}} = \mu N = \mu m_1g \cos \alpha$. Підставимо в рівняння (3) вираз для $F_{\text{тер.}}$ і додамо до рівняння (3) рівняння (5), одержимо:

$$m_2g - m_1g \sin \alpha - \mu m_1g \cos \alpha = m_1a + m_2a,$$

звідки знаходимо:

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Підставляючи чисельні значення, виконуємо обчислення:

$$a = 9,8 \cdot \frac{0,3 - 0,2 \cdot \sin 30^\circ - 0,2 \cdot 0,2 \cdot \cos 30^\circ}{0,2 + 0,3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 3,24 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a = 3,24 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Приклад №5. Літак описує коло радіусом 800 м у вертикальній площині, маючи швидкість $720 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Визначити величину сили, з якою пілот масою 80 кг тисне на сидіння у верхній та нижній точках кола.

$R = 800 \text{ м}$	$v = 200 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
$m = 80 \text{ кг}$	
$v = 720 \frac{\text{км}}{\text{год}}$	$N_1 = ?$
	$N_2 = ?$

На пілота діє сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила нормальної реакції з боку сидіння \vec{N} . Під дією цих сил пілот рухається по колу з доцентровим прискоренням $a_{\text{д}} = \frac{v^2}{R}$. За третім законом Ньютона сила, з якою пілот тисне на сидіння, чисельно дорівнює силі нормальної реакції сидіння.

Тому, визначивши величини N_1 та N_2 , ми розв'яжемо задачу.

Запишемо другий закон Ньютона у векторній формі:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{\text{д}}. \quad (4.48)$$

Для випадку, коли літак знаходиться у верхній точці кола, проекція рівняння 4.48 на вісь OY має вигляд

$$-mg - N_1 = -ma_{\text{д}}. \quad (4.49)$$

Для випадку, коли літак знаходиться у нижній точці кола, проекція рівняння 4.48 на вісь OY має вигляд

$$-mg + N_2 = ma_{\text{д}}, \quad (4.50)$$

З рівняння 4.49 знаходимо:

$$N_1 = ma_{\text{д}} - mg = m\frac{v^2}{R} - mg = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right).$$

Аналогічно з рівняння 4.50 одержуємо:

$$N_2 = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right).$$

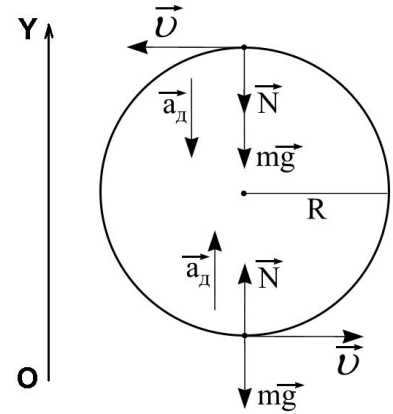


Рис. 4.3.

Перевіримо правильність результуючої формули, використовуючи одиниці вимірювання фізичних величин.

$$[N] = \text{кг}\left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} - \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$N_1 = 80\left(\frac{200^2}{800} - 9,8\right) \text{ Н} = 3216 \text{ Н}.$$

$$N_2 = 80\left(\frac{200^2}{800} + 9,8\right) \text{ Н} = 4784 \text{ Н}.$$

Відповідь: У верхній точці — 3216 Н, у нижній точці — 4784 Н.

Приклад №6. Молот масою 500 кг падає на нерухому сваю масою 100 кг зі швидкістю $4 \frac{\text{М}}{\text{С}}$. Визначити: 1) кінетичну енергію $W_{\text{К1}}$ молота в момент удару; 2) енергію W_2 , яка витрачається на заглиблення сваї; 3) енергію W_3 , яка витрачається на деформацію сваї; 4) коефіцієнт корисної дії η удару молота. Удар молота вважати абсолютно непружним.

$m_1 = 500 \text{ кг}$	
$m_2 = 100 \text{ кг}$	
$v_1 = 4 \frac{\text{М}}{\text{С}}$	
$v_2 = 0$	
$W_{\text{К1}} = ?$	
$W_2 = ?$	
$W_3 = ?$	
$\eta = ?$	

1) Кінетична енергія молота в момент удару:

$$W_{\text{К1}} = \frac{m_1 v^2}{2}.$$

$$W_{\text{К1}} = \frac{500 \cdot 4^2}{2} \text{ Дж} = 4 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

2) Енергія, яка витрачається на заглиблення палі в ґрунт, дорівнює кінетичній енергії, яку має система молот–палі одразу після удару. Після абсолютно непружного удару взаємодіючі тіла рухаються разом, як одне тіло. Тому

$$W_2 = W_{\text{К2}} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2},$$

де u — модуль швидкості молота та палі після удару. Цю швидкість можна визначити, використовуючи закон збереження імпульсу. В замкнутій системі тіл сума імпульсів тіл залишається сталою. Оскільки удар — дуже короткочасний процес, то взаємодія палі з ґрунтом за час удару не може помітно змінити її імпульс, і систему молот–палі можна вважати замкнутою.

Для двох тіл при абсолютно непружному ударі рівняння закону збереження імпульсу має вигляд:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

Спрямувавши вісь OX вздовж напрямку руху молота, спроектувавши на неї вектори швидкостей, дістаємо:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Оскільки $v_2 = 0$, то

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Тоді

$$W_2 = \frac{(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right)^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

$$W_2 = \frac{500^2 \cdot 4^2}{2(500 + 100)} \approx 3333 \text{ Дж.}$$

3) Кінетична енергія молота витрачається на заглиблення палі в ґрунт і на деформацію сваї. Тому

$$W_{\text{к1}} = W_2 + W_3,$$

$$W_3 = W_{\text{к1}} - W_2.$$

$$W_3 = 4000 \text{ Дж} - 3333 \text{ Дж} = 667 \text{ Дж.}$$

4) Коефіцієнт корисної дії може бути визначений як

$$\eta = \frac{W_{\text{кор}}}{W},$$

де $W_{\text{кор}}$ — корисно витрачена енергія, W — повна енергія, витрачена пристроєм. Оскільки в даному випадку молот працює для заглиблення палі в ґрунт, то $W_{\text{кор}} = W_2$, $W = W_{\text{к1}}$, і

$$\eta = \frac{W_2}{W_{\text{к1}}} = \frac{\frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

$$\eta = \frac{500}{500 + 100} = 0,833.$$

Відповідь: $W_{\text{к1}} = 4000 \text{ Дж}$; $W_2 = 3333 \text{ Дж}$; $W_3 = 667 \text{ Дж}$; $\eta = 0,833$.

Приклад №7. На залізничній платформі, яка рухається за інерцією горизонтально зі швидкістю $v_1 = 1,2 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, закріплена гармата, ствол якої спрямований у напрямку руху платформи і піднятий над горизонтом на кут $\alpha = 30^\circ$. Гармата виконала постріл, після чого швидкість платформи з гарматою зменшилася до $u_1 = 0,4 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. Визначити величину швидкості снаряду u'_2 відносно гармати при вильоті зі ствола. Маса снаряду 50 кг, маса платформи з гарматою 20 тонн.

$v_1 = 1,2 \frac{\text{М}}{\text{с}}$	Якщо нехтувати силою тертя між рейками та платформою, то в горизонтальному напрямі жодні сили на систему платформа з гарматою—снаряд не діють. Тому згідно закону збереження імпульсу проекція вектора імпульсу цієї системи тіл на горизонтальний напрям (вісь OX) є сталою величиною: $p_x = \text{const}$. Розглядаючи всі рухи відносно Землі, одержимо:
$u_1 = 0,4 \frac{\text{М}}{\text{с}}$	
$\alpha = 30^\circ$	
$m_2 = 50 \text{ кг}$	
$m_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ кг}$	
$u'_2 = ?$	

— для стану системи до пострілу, коли снаряд і платформа рухалися разом зі швидкістю \vec{v}_1 горизонтально (вздовж осі OX)

$$p_x = (m_1 + m_2)v_1;$$

— для стану системи після пострілу

$$p_x = m_1 u_1 + m_2 u_2 \cos \beta,$$

де $u_2 \cos \beta$ — проекція на вісь OX вектора швидкості \vec{u}_2 снаряду відносно Землі.

Маємо

$$(m_1 + m_2)v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \cos \beta. \quad (4.51)$$

Для визначення величини $u'_2 = |\vec{u}'_2|$ врахуємо, що снаряд рухається зі швидкістю \vec{u}'_2 відносно гармати, а гармата після пострілу рухається зі швидкістю \vec{u}_1 відносно Землі. За правилом складання швидкостей:

$$\vec{u}_2 = \vec{u}'_2 + \vec{u}_1,$$

або для проекцій на вісь OX :

$$u_2 \cos \beta = u'_2 \cos \alpha + u_1, \quad (4.52)$$

де $u'_2 \cos \alpha$ — проекція на ось OX вектора швидкості \vec{u}'_2 снаряду відносно гармати.

Після заміни в рівнянні 4.51 величини $u_2 \cos \beta$ на її значення згідно рівняння 4.52, одержуємо:

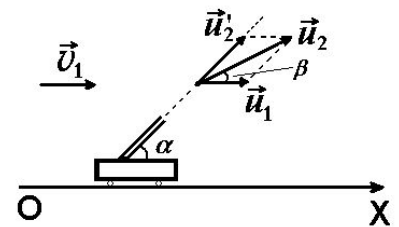


Рис. 4.4.

$$(m_1 + m_2)v_1 = m_1u_1 + m_2u'_2 \cos \alpha + m_2u_1,$$

звідки маємо:

$$u'_2 = \frac{(m_1 + m_2)(v_1 - u_1)}{m_2 \cos \alpha}.$$

Підставляючи в цю формулу чисельні значення заданих величин і виконуючи обчислення, знаходимо:

$$u'_2 = \frac{(20000 + 50)(1,2 - 0,4)}{50 \cdot \cos 30^\circ} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3,7 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: Величина швидкості снаряду відносно гармати $3,7 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Приклад №8. Гиря, покладена на верхній кінець пружини, стискає її на $x_0=1$ мм. На скільки стисне пружину ця гиря, якщо вільно впаде на пружину з висоти $h=20$ см?

$x_0 = 1 \text{ мм}$	$x_0 = 10^{-3} \text{ м}$
$h = 20 \text{ см}$	$h = 0,2 \text{ м}$
	$x = ?$

Величина деформації пружини визначає потенціальну енергію тіла. Тому скористаємося законом збереження енергії.

Крім сили пружності з боку пружини, на тіло діє сила тяжіння Землі, тому розглянемо систему тіл Земля-гиря-пружина. Оскільки при русі гирі та стисканні пружини тертя практично відсутнє, а сили пружності і тяжіння є консервативними силами, то повна механічна енергія обраної системи тіл буде зберігатися. Запишемо енергію системи у її початковому і кінцевому положеннях. За нульовий рівень відліку висоти гирі оберемо найнижче положення гирі, яке відповідає стиснутій пружині. В обох положеннях гиря і пружина нерухомі, тому їх повна енергія складається лише з потенціальної енергії: $W = W_{\text{П}}$. У початковому положенні:

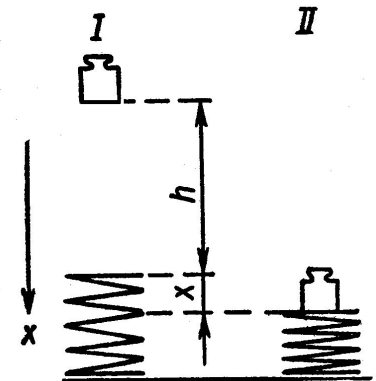


Рис. 4.5.

$$W_{\text{П}} = mg(h + x).$$

У найнижчому положенні потенціальна енергія взаємодії гирі з Землею дорівнює нулю, зате стиснута пружина має потенціальну енергію пружної деформації:

$$W_{\text{П2}} = \frac{kx^2}{2}.$$

Жорсткість пружини k можна визначити з умови, що коли гиря лежить на пружині, то сила тяжіння врівноважується силою пружності: $mg = kx_0$, звідки $k = \frac{mg}{x_0}$.

Оскільки повна механічна енергія обраної системи тіл зберігається, то $W_{\text{П1}} = W_{\text{П2}}$, тобто

$$mg(h + x) = \frac{\frac{mg}{x_0}x^2}{2}.$$

Звідси після простих перетворень одержуємо квадратне рівняння відносно x :

$$x^2 - 2x_0x - 2x_0h = 0.$$

Розв'язуючи рівняння, знаходимо:

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2x_0h}.$$

Від'ємний корінь рівняння має бути відкинутий: $x < 0$ означає розтяг пружини, а вона насправді стискується. Підставляючи чисельні значення, виконуємо обчислення:

$$x = 10^{-3} \text{ м} + \sqrt{10^{-6} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \text{ м}} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Відповідь: Пружина буде стиснута на 0,021 м.

Приклад №9. Суцільний однорідний циліндр масою 1 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $10 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. Визначити кінетичну енергію циліндру.

$$\begin{array}{l|l} m = 1 \text{ кг} & \\ v = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}} & \\ \hline W_{\text{к}} = ? & \end{array}$$

Якщо тіло здійснює обертальний рух навколо осі, яка проходить через центр мас тіла, а вісь обертання рухається поступально, то кінетична енергія тіла складається з енергії поступального руху та енергії обертального руху:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}, \quad (4.53)$$

де m — маса тіла; v_c — швидкість центру мас тіла; J_c — момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла; ω — кутова швидкість тіла.

Швидкість центру мас — це швидкість руху циліндру, тобто $v_c = v$. Тому перший доданок у формулі 4.53 може бути обчислений.

Якщо циліндр котиться, то він при цьому обертається відносно осі, яка співпадає з геометричною віссю циліндра і проходить через центр мас циліндру. Суцільний циліндр радіусом R має момент інерції відносно цієї осі:

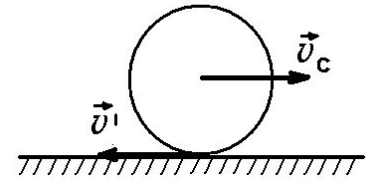


Рис. 4.6.

$$J_c = \frac{1}{2}mR^2.$$

Кутову швидкість ω можна визначити зі співвідношення $v' = \omega R$, де v' — лінійна швидкість руху по колу точок на поверхні циліндру.

Для визначення величини v' врахуємо, що будь-яка точка на поверхні циліндру рухається зі швидкістю \vec{v}' відносно осі циліндру, а вісь рухається зі швидкістю \vec{v}_c відносно площини. За правилом складання швидкостей, швидкість точки на поверхні циліндру \vec{u} відносно площини:

$$\vec{u} = \vec{v}' + \vec{v}_c.$$

Оскільки циліндр котиться без ковзання, то точки циліндру, які торкаються площини, є нерухомими, тобто для них $u = 0$. Тому $\vec{v}' = -\vec{v}_c$, звідки для величини швидкості одержуємо $v' = v_c$. Тому

$$\omega = \frac{v'}{R} = \frac{v_c}{R}.$$

Підставляючи вирази для J_c та ω у формулу (1), маємо

$$W_K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_c}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_c^2}{4} = \frac{3mv_c^2}{4}.$$

Підставляючи в цю формулу чисельні значення заданих величин і виконуючи обчислення, знаходимо:

$$W_K = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^2}{4} \text{ Дж} = 75 \text{ Дж}.$$

Відповідь: Кінетична енергія циліндру $W_K = 75 \text{ Дж}$.

$m = 80 \text{ г}$	$m = 0,08 \text{ кг}$
$m_1 = 100 \text{ г}$	$m_1 = 0,1 \text{ кг}$
$m_2 = 200 \text{ г}$	$m_2 = 0,2 \text{ кг}$
	$a = ?$

Приклад №10. Через блок масою $m = 80 \text{ г}$, який має форму однорідного диска, перекинута невагома гнучка нитка, до кінців якої підвішені тягарці масами $m_1 = 100 \text{ г}$ та $m_2 = 200 \text{ г}$. Визначити, з яким прискоренням будуть рухатися тягарці.

Розглянемо сили, які діють на тягарці та блок. На тягарець m_1 діють сила тяжіння $m_1\vec{g}$ та сила натягу нитки \vec{T}_1 , під дією цих сил він рухається з прискоренням \vec{a}_1 . На тягарець m_2 діють сила тяжіння $m_2\vec{g}$ та сила натягу нитки \vec{T}_2 , під дією цих сил він рухається з прискоренням \vec{a}_2 вниз, бо має більшу масу.

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для вантажів:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1, \quad (4.54)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_1\vec{a}_2, \quad (4.55)$$

Прискорення, з якими рухаються тягарці, спрямовані в протилежних напрямках, але вони рівні за модулем, бо нитка нерозтяжна: $a_1 = a_2 = a$. Спроектуємо рівняння 4.54 та 4.55 на вісь Ox .

$$m_1g - T_1 = -m_1a, \quad (4.56)$$

$$m_2g - T_2 = m_2a, \quad (4.57)$$

На блок діють з боку нитки сили \vec{T}'_1 та \vec{T}'_2 . Ці сили створюють моменти сил \vec{M}_1 та \vec{M}_2 (спрямовані у протилежних напрямках), під дією яких блок обертається з кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon}$ відносно осі $O'Z$, перпендикулярної до площини рисунку. Згідно основного рівняння динаміки обертального руху

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}, \quad (4.58)$$

де $J = \frac{1}{2}mr^2$ — момент інерції блока (однорідного диска радіуса r).

Запишемо рівняння 4.58 у проекціях на вісь $O'Z$. Оскільки $M_2 > M_1$, то вектор прискорення $\vec{\varepsilon}$ буде спрямований в той же бік, що і вектор M_2 :

$$M_2 - M_1 = J\varepsilon.$$

Врахуємо, що $M_1 = T'_1 r$, $M_2 = T'_2 r$, $\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}$, де a_τ — тангенціальне прискорення точок на поверхні блока. Тоді

$$T'_2 r - T'_1 r = \frac{1}{2}mr^2 \frac{a_\tau}{r}, \quad (4.59)$$

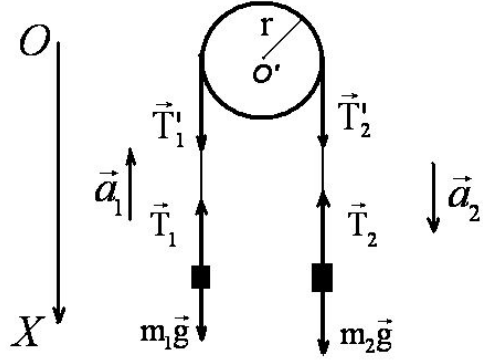


Рис. 4.7.

Модуль тангенціального прискорення a_τ , з яким рухається нитка на поверхні блока, дорівнює модулю прискорення a , з яким вона рухається вертикально разом з вантажами, тобто $a_\tau = a$.

Згідно третьому закону Ньютона $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$. Тому підставимо в рівняння 4.59 замість T'_1 та T'_2 вирази для T_1 та T_2 , одержавши їх з рівнянь 4.56 та 4.57:

$$(m_2 g - m_1 a)r - (m_1 g + m_2 a)r = \frac{1}{2}mr^2 \frac{a}{r}.$$

Після скорочення на r та перегрупування маємо:

$$m_2 g - m_1 g = m_2 a + m_1 a + \frac{1}{2}ma,$$

звідки

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}} g.$$

Перевіряємо одиниці вимірювання шуканої величини:

$$[a] = \frac{[m] - [m]}{[m] + [m] + [m]} \cdot [g] = \left[\frac{\text{кг} - \text{кг}}{\text{кг} + \text{кг} + \text{кг}} \cdot \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right].$$

Підставляючи у формулу чисельні значення заданих величин і виконуючи обчислення, знаходимо:

$$a = \frac{0,2 - 0,1}{0,2 + 0,1 + \frac{0,08}{2}} \cdot 9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} = 2,88 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: Тягарці будуть рухатися з прискоренням $a = 2,88 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$.

$n_1 = 0,1 \frac{\text{об}}{\text{с}}$
$R = 2 \text{ м}$
$m = 70 \text{ кг}$
$J = 260 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$
$n_2 = ?$

Приклад №11. Кругла платформа радіусом $R = 2 \text{ м}$ має момент інерції $J = 260 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. На краю платформи стоїть людина масою $m = 70 \text{ кг}$. Платформа обертається за інерцією навколо вертикальної осі, яка проходить через центр платформи, з частотою $6 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$. Визначити, з якою частотою буде обертатися платформа, якщо людина перейде в її центр. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

При русі по платформі людина буде з нею взаємодіяти. Про характер взаємодії нічого невідомо, тому неможливо застосувати до платформи рівняння динаміки обертального руху. Закон збереження механічної енергії теж неможна використати, оскільки при русі людина буде виконувати роботу і змінювати механічну енергію системи платформа-людина.

За умовою задачі, платформа з людиною обертається за інерцією. Це означає, що результуючий момент всіх зовнішніх сил, прикладених до системи платформа-людина, дорівнює нулю. Тому цю систему тіл можна вважати замкнутою, і для неї виконується закон збереження моменту імпульсу. В скалярному вигляді рівняння цього закону для даної задачі запишемо так:

$$L_1 = L_2, \tag{4.60}$$

де L_1 — початкова величина моменту імпульсу системи тіл (людина стоїть на краю платформи); L_2 — кінцева величина моменту імпульсу (людина стоїть у центрі платформи).

$$(2) \quad L_1 = J_1 \omega_1 = (J + mR^2) \cdot 2\pi n_1,$$

де mR^2 — початковий момент інерції людини відносно осі обертання;

$J_1 = J + mR^2$ — початковий момент інерції системи тіл відносно осі обертання;

$\omega_1 = 2\pi n_1$ — початкова кутова швидкість системи тіл.

$$L_2 = J_2 \omega_2 = J \cdot 2\pi n_2,$$

(3)

де $J_2 = J$ — кінцевий момент інерції системи тіл (враховано, що момент інерції людини, що стоїть у центрі платформи, дорівнює нулю); $\omega_2 = 2\pi n_2$ — кінцева кутова швидкість системи тіл.

Підставляючи праві частини рівнянь (2) та (3) в рівняння (1), одержуємо:

$$(J + mR^2) \cdot 2\pi n_1 = J \cdot 2\pi n_2,$$

звідки

$$n_2 = \frac{J + mR^2}{J} n_1.$$

Перевіряємо одиниці вимірювання шуканої величини:

$$[n_2] = \frac{[J] + [m] \cdot [R^2]}{[J]} = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 + \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} \cdot \frac{\text{об}}{\text{с}} \right] = \left[\frac{\text{об}}{\text{с}} \right].$$

Підставляючи у формулу чисельні значення заданих величин і виконуючи обчислення, знаходимо:

$$n_2 = \frac{260 + 70 \cdot 2^2}{260} \cdot 0,1 \frac{\text{об}}{\text{с}} = 0,204 \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

Відповідь: Платформа буде обертатися з частотою $0,204 \frac{\text{об}}{\text{с}}$.

5. Рекомендована література

1. **Фізична механіка (Теоретичний Курс)**, *М.М.Чепілко*, 2016, К: ДЕ-ТУТ
2. **Курс фізики**, *Т.И.Трофимова*, 2000, М: Высшая школа
3. **Курс фізики**, *І.Є. Лопатинський, та інші*. 2002, Львів, Афіша
4. **Сборник задач по курсу фізики**, *Т.И.Трофимова* 1991, М: Высшая школа

Навчальне видання

доцент Поліщук С.І.

**Завдання та методичні вказівки до самостійної роботи
з фізичної механіки**

Для студентів технічних спеціальностей

Відповідальний за випуск: М.М. Чепілко

Підписано до друку . Формат паперу 60x84/16. Обсяг: обл.-вид.арк.
Папір для тиражувальних апаратів. Друк - різнографія. Замовлення . Тираж прим.

Надруковано у друкарні видавництва
Державного економіко - технологічного університету транспорту,
03049, м. Київ - 49, вул. Миколи Лукашевича, 19