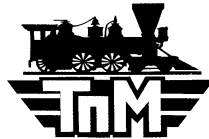


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Теоретична та прикладна механіка»



В. В. Ковальчук

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 2

Кінематика

Для студентів технічних спеціальностей
заочної форми навчання

Київ – 2013

УДК 531.011

Ковальчук В. В.

Контрольні роботи з теоретичної механіки. Частина 2. Кінематика. – К.: ДЕТУТ, 2013. – 32 с.

Посібник є збірником завдань для контрольних робіт із теоретичної механіки. У посібник включені завдання з кінематики, передбачені навчальною програмою курсу теоретичної механіки. До кожного завдання запропоновані 30 варіантів для самостійної роботи студентів і наведені зразки виконання цих завдань.

Призначений для студентів технічних спеціальностей університету заочної форми навчання.

Посібник розглянутий і затверджений на засіданні кафедри «Теоретична та прикладна механіка» (протокол № 7 від 24.04.2013 р.) та на засіданні методичної комісії факультету «Інфраструктура і рухомий склад залізниць» (протокол № 8 від 29.04.2013 р.).

Укладач:

В. В. Ковальчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рецензенти: **М. Б. Кельріх**, доктор технічних наук, професор (ДЕТУТ);
Є. О. Шквар, доктор технічних наук, професор (НАУ)

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Варіанти завдань і методичні рекомендації щодо їх виконання	5
Завдання К-1. <i>Визначення кінематичних характеристик рухомої точки</i>	5
Варіанти завдань для самостійної роботи	5
Зразок виконання завдання	7
Завдання К-2. <i>Перетворення найпростіших рухів твердого тіла</i>	14
Варіанти завдань для самостійної роботи	14
Зразок виконання завдання	20
Завдання К-3. <i>Дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла</i>	23
Варіанти завдань для самостійної роботи	23
Зразок виконання завдання	29
Література.....	31

ВСТУП

Одна з основних задач сучасної вищої освіти полягає в організації навчальної діяльності таким чином, щоб надати майбутньому фахівцю фундаментальні знання, які відповідають існуючим світовим стандартам. При цьому особливе місце в навчальному процесі займає самостійна робота студентів, як найбільш ефективна форма глибокого засвоєння матеріалу.

Теоретична механіка на першому етапі багаторівневої системи освіти є обов'язковою фундаментальною загальнонауковою дисципліною для студентів майже всіх напрямів технічної освіти України. Для студентів заочної форми навчання виконання індивідуальних завдань контрольних робіт із теоретичної механіки збагачує набутими знаннями, сприяє засвоєнню курсу та опануванню методикою розв'язування прикладних задач.

У даному навчально-методичному посібнику підбрані завдання для контрольних робіт із кінематики, які охоплюють найбільш важливі теми цього розділу теоретичної механіки, передбачені робочою навчальною програмою цієї дисципліни для технічних спеціальностей. Навички, набуті під час виконання поданих у посібнику завдань, студент буде застосовувати при розв'язуванні задач динаміки (в теоретичній механіці), а також при вивченні на старших курсах спеціальних дисциплін (теорія машин і механізмів, прикладна механіка, технічна механіка тощо).

Для успішного виконання завдання необхідно попередньо опанувати теоретичний матеріал відповідно до джерел, указаних у даному посібнику. При цьому студенту важливо перш за все зрозуміти суть викладених у літературі понять, законів і теорем. Після ознайомлення з теорією, викладеною у підручнику, рекомендуємо скласти короткий конспект і виписати основні формули відповідного розділу, а потім рохглянути зразки розв'язування задач.

Успішному виконанню завдань теоретичної механіки сприяє високий рівень математичної підготовки. При розв'язуванні задач кінематики студенту треба вільно володіти правилами диференціювання функцій однієї змінної, будувати графіки цих функцій, знати основи теорії кривих 2-го порядку, а також векторної алгебри.

Номери варіантів для студентів установлює безпосередньо викладач.

Контрольну роботу оформляти відповідно до вимог єдиної конструкторської документації (ЄСКД) на аркушах паперу формату А4. Усі текстові аркуші заповнювати лише з одного боку.

Обов'язковими складовими роботи є постановка завдання, розв'язання і чітко сформульована відповідь.

Виконання завдання проводити послідовно, розрахункові формули і рисунки супроводжувати поясненнями. Креслення виконувати олівцем, дотримуючись певного масштабу.

Остаточний результат обов'язково повинен мати розмірність у системі СІ. Точність розрахунків можна обмежувати двома цифрами після коми.

Варіанти завдань і методичні рекомендації щодо їх виконання

Завдання К–1. Визначення кінематичних характеристик рухомої точки.

Кінематичні характеристики рухомої точки розраховують за формулами кінематики точки (розділ 12 [1], глава IX [2] та ін.). Методика розв'язування таких задач наведена в [3] – [6].

Варіанти завдань для самостійної роботи

Рух точки в площині xOy заданий рівняннями $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де x і y виражені в сантиметрах, а час t – в секундах. Побудувати траєкторію точки.

Для моменту часу $t = t_1$ визначити положення точки на траєкторії та напрямок руху, а також швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення точки та радіус кривини у відповідній точці траєкторії. Показати на рисунку положення точки на траєкторії при $t = t_1$ і вектори швидкості (\vec{V}), повного (\vec{W}), дотичного (\vec{W}_τ) і нормального (\vec{W}_n) прискорень.

Таблиця

№ варіанта	Рівняння руху		Момент часу t_1, c
	$x = x(t) \text{ см}$	$y = y(t) \text{ см}$	
1	$x = -2t^2 + 3$	$y = -5t$	0,5
2	$x = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$y = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	1
3	$x = -1 - t$	$y = -\frac{2}{t+1}$	2
4	$x = -5t^2 - 4$	$y = 3 + 10t^2$	1
5	$x = 6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 6$	$y = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\frac{1}{2}$
6	$x = -2t$	$y = 4t^2 - 3$	0,5
7	$x = -6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 6$	1
8	$x = 2t + 2$	$y = -\frac{1}{t+1}$	2
9	$x = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	0,5
10	$x = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 3 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
11	$x = -2t^3 + 6$	$y = t^3 + 1$	2

№ варіанта	Рівняння руху		Момент часу t_1, c
	$x = x(t) \text{ см}$	$y = y(t) \text{ см}$	
12	$x = 8t^2 + 2$	$y = -4t$	0,5
13	$x = 4 - t + 3t^2$	$y = -6t^2 + 2t - 3$	1
14	$x = 6 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = -6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2
15	$x = -\frac{3}{t+2}$	$y = 3t + 6$	2
16	$x = -3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 2 - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$\frac{1}{2}$
17	$x = 1 - 4t^2$	$y = -2t$	0,5
18	$x = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = -3 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
19	$x = -6t^2 - 3t + 20$	$y = -3t^2 - \frac{3}{2}t + 9$	2
20	$x = 3t$	$y = 9t^2 + 1$	$\frac{1}{3}$
21	$x = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 3$	$\frac{1}{2}$
22	$x = -6t^2 + 4$	$y = 3t$	1
23	$x = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = -3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	2
24	$x = -2 - 2t$	$y = -\frac{2}{t+1}$	1
25	$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4$	$y = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2
26	$x = -2t$	$y = 3 + 2t^2$	0,5
27	$x = 5t$	$y = 25t^3$	0,2
28	$x = -\frac{3}{t+1}$	$y = -3 - 3t$	1
29	$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 2 - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	0,5
30	$x = 4t^3 - 4$	$y = 2t^3 - 1$	1

Вказівки. Завдання К–1 полягає у визначенні основних кінематичних характеристик точки, закон руху якої заданий координатним способом.

У варіантах, які містять тригонометричні функції, при визначенні траєкторії руху точки доцільно застосовувати відомі з тригонометрії формули:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Результати розрахунків подати у вигляді таблиці кінематичних характеристик рухомої точки за зразком

Час, с	Координати, см		Швидкість, см/с			Прискорення, см/с ²					Радіус кривини, см
	t_1	x	y	V_x	V_y	V	W_x	W_y	W	W_τ	W_n
0,5	2	3	4	16	16,49	0	32	32	31,05	7,74	35,13

Зразок виконання завдання

Задача К1–а. Точка рухається в площині xOy за законом

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2, \\ y = 2t \end{cases} \quad (x, y - \text{у сантиметрах, } t - \text{у секундах}).$$

Побудувати траєкторію руху. Для моменту часу $t_1 = 0,5$ с визначити положення точки, напрям руху, а також швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення точки та радіус кривини у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання

1. Для визначення рівняння траєкторії точки вилучимо із заданих рівнянь руху час t . Із другого рівняння маємо

$$y = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{y}{2}.$$

Після підстановки в перше рівняння руху отримаємо

$$x = 3t^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2.$$

Отже, рівняння траєкторії

$$x = 0,75y^2 + 2.$$

Воно описує параболу, симетричну відносно осі Ox . Гілки цієї параболи направлені управо, вершина зміщена вздовж осі x на одну одиницю в правий бік.

2. Для визначення напрямку руху знайдемо положення точки в початковий момент часу ($t_0 = 0$) і в заданий момент часу t_1 .

При $t_0 = 0$ маємо:

$$x \Big|_{t_0} = 3 \cdot 0^2 + 2 = 3, \quad y \Big|_{t_0} = 2 \cdot 0 = 0,$$

тобто початковим положенням є точка $M_0 (3; 0)$.

При $t_1 = 0,5$ с відповідно знаходимо:

$$x \Big|_{t_1} = 3 \cdot 0,5^2 + 2 = 2,75; \quad y \Big|_{t_1} = 2 \cdot 0,5 = 1,$$

тобто в заданий момент часу точка займає положення $M (2,75; 1)$.

Таким чином, точка рухається по верхній гілці параболи від початкового положення M_0 вгору (рис. 1.1).

3. Швидкість точки визначимо за її проекціями на осі координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = (3t^2 + 2)' = 6t;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = (2t)' = 2.$$

Модуль швидкості точки визначаємо за формулою:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

У заданий момент часу відповідно маємо:

$$V_x \Big|_{t_1} = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ см/с}, \quad V_y \Big|_{t_1} = 2 \text{ см/с}, \quad V \Big|_{t_1} = \sqrt{3^2 + 2^2} \approx 3,61 \text{ см/с}.$$

Вектор швидкості \vec{V} направляємо із точки M по дотичній до траєкторії відповідно до напрямку руху (рис. 1.1).

4. Визначаємо проекції прискорення точки:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = (6t)' = 6 \text{ см/с}^2; \quad W_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = (2)' = 0.$$

Тоді модуль прискорення дорівнює:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6 \text{ см/с}^2.$$

5. Дотичне прискорення точки визначаємо за формулою:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x W_x + V_y W_y}{V}.$$

При $t_1 = 0,5$ с маємо:

$$W_\tau \Big|_{t_1} = \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 0}{3,61} \approx 4,99 \text{ см/с}^2.$$

Оскільки $W_\tau > 0$, то рух точки є прискореним.

6. Нормальне прискорення точки визначаємо за формулою:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2},$$

тому в заданий момент часу маємо:

$$W_n \Big|_{t_1} = \sqrt{6^2 - 4,99^2} \approx 3,33 \text{ см/с}^2.$$

7. Радіус кривини траєкторії визначаємо за формулою $\rho = \frac{V^2}{W_n}$.

Отже, при $t_1 = 0,5 \text{ с}$ маємо

$$\rho \Big|_{t_1} = \frac{3,61^2}{3,33} \approx 3,91 \text{ см.}$$

За результатами розрахунків будуємо траєкторію точки та показуємо на ній положення точки M у заданий момент часу.

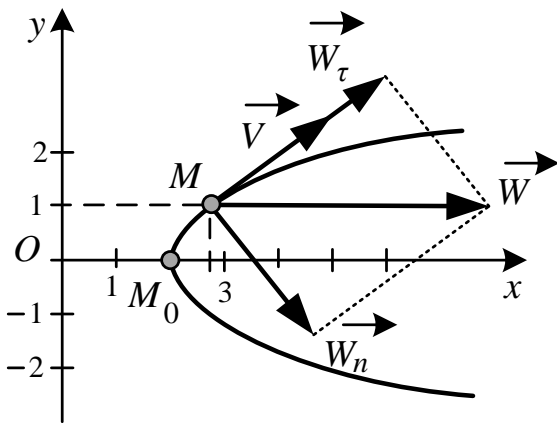


Рис. 1.1

Вектор швидкості \vec{V} направляємо по дотичній до траєкторії в напрямку руху точки.

Оскільки $W_\tau > 0$, то напрямки векторів \vec{V} і \vec{W}_τ співпадають.

Вектор нормального прискорення \vec{W}_n направляємо по нормалі до траєкторії, тобто перпендикулярно вектору \vec{W}_τ у бік вгнутості траєкторії.

Вектор \vec{W} будуємо за правилом паралелограма за складовими \vec{W}_τ і \vec{W}_n .

За рисунком можна перевірити правильність отриманих результатів.

Напрямок вектора швидкості \vec{V} узгоджується з отриманими значеннями $V_x > 0$ і $V_y > 0$. Вектори дотичного і нормального прискорень побудовані в певному масштабі відповідно до отриманих за розрахунками значень величин W_τ і W_n . Тому напрямок вектора \vec{W} узгоджується з отриманими значеннями $W_x = 0$ і $W_y > 0$.

За результатами розрахунків складаємо таблицю кінематичних характеристик заданої рухомої точки.

Час, с	Координати см		Швидкість, см/с			Прискорення, см/с ²					Радіус кривини, см
	x	y	V_x	V_y	V	W_x	W_y	W	W_τ	W_n	
0,5	2,75	1	3	2	3,61	6	0	6	4,99	3,33	3,91

Задача К1–б. Точка рухається в площині xOy за законом

$$\begin{aligned}x &= 6 - 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \\y &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad (x, y - \text{у сантиметрах, } t - \text{у секундах}).\end{aligned}$$

Побудувати траєкторію руху. Для моменту часу $t_1 = 2 \text{ с}$ визначити положення точки, напрям руху, а також швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення точки та радіус кривини у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання

1. Для визначення рівняння траєкторії точки вилучимо із заданих рівнянь руху час t . Оскільки закон руху точки виражають тригонометричні функції одного аргументу, то застосовуємо тригонометричну формулу

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Із першого рівняння маємо:

$$x = 6 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{x-6}{6}.$$

Із другого рівняння маємо:

$$y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{y}{3}.$$

Після підстановки в тригонометричну формулу отримаємо:

$$\left(\frac{x-6}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

Отже, рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{(x-6)^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Воно описує еліпс, який має центр $C(6; 0)$ і півосі $a = 6$ та $b = 3$. Будуємо цю траєкторію в системі координат (рис. 1.2).

2. Для визначення напрямку руху знайдемо положення точки в початковий момент часу ($t_0 = 0$) і в заданий момент часу t_1 .

При $t_0 = 0$ маємо:

$$x\Big|_{t_0} = 6 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 6 + 6 \cos(0) = 12,$$

$$y\Big|_{t_0} = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 3 \sin(0) = 0,$$

тобто початковим положенням є точка $M_0(0; 0)$.

У заданий момент часу $t_1 = 2$ с відповідно знаходимо:

$$x \Big|_{t_1} = 6 + 6 \cos \left(\frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = 6 + 6 \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = 9,$$

$$y \Big|_{t_1} = 3 \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = 3 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,60,$$

тобто в заданий момент часу точка займає положення $M(9; 2,6)$.

Таким чином, точка рухається по еліпсу від початкового положення M_0 проти годинникової стрілки (рис. 1.2).

3. Швидкість точки визначимо за її проекціями на осі координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \left(6 + 6 \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right) \right)' = -6 \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\pi \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right);$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \left(3 \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right) \right)' = 3 \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right).$$

Модуль швидкості точки визначимо за формулою:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

У заданий момент часу відповідно маємо:

$$V_x \Big|_{t_1} = -\pi \sin \left(\frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = -\pi \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -3,14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -2,72 \text{ см/с},$$

$$V_y \Big|_{t_1} = \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{6} \cdot 2 \right) = \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{3,14}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,79 \text{ см/с},$$

$$V \Big|_{t_1} = \sqrt{(-2,72)^2 + 1,57^2} \approx 2,83 \text{ см/с}.$$

Вектор швидкості \vec{V} направляємо із точки M по дотичній до траєкторії відповідно до напрямку руху (рис. 1.2).

4. Визначаємо проекції прискорення точки на координатні осі:

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \left(-\pi \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right) \right)' = -\pi \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right);$$

$$W_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \left(\frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right) \right)' = -\frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{12} \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right).$$

Для визначення модуля прискорення застосуємо формулу:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}.$$

У заданий момент часу $t_1 = 2$ с відповідно маємо:

$$W_x \Big|_{t_1} = -\frac{\pi^2}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) = -\frac{\pi^2}{6} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3,14^2}{6} \cdot \frac{1}{2} \approx -0,82 \text{ см/с}^2,$$

$$W_y \Big|_{t_1} = -\frac{\pi^2}{12} \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) = -\frac{\pi^2}{12} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3,14^2}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,71 \text{ см/с}^2.$$

Тоді модуль прискорення дорівнює:

$$W \Big|_{t_1} = \sqrt{(-0,82)^2 + (-0,71)^2} \approx 1,09 \text{ см/с}^2.$$

5. Дотичне прискорення точки визначимо за формулою:

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x W_x + V_y W_y}{V}.$$

При $t_1 = 2 \text{ с}$ маємо:

$$W_\tau \Big|_{t_1} = \frac{-2,72 \cdot (-0,82) + 0,79 \cdot (-0,71)}{2,83} \approx 0,59 \text{ см/с}^2.$$

Оскільки $W_\tau > 0$, то рух точки є прискореним.

6. Для визначення нормального прискорення точки застосовуємо формулу:

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}.$$

Отже, в заданий момент часу маємо:

$$W_n \Big|_{t_1} = \sqrt{1,09^2 - 0,59^2} \approx 0,91 \text{ см/с}^2.$$

7. Радіус кривини траєкторії визначаємо за формулою $\rho = \frac{V^2}{W_n}$.

У заданий момент часу радіус кривини дорівнює $\rho \Big|_{t_1} = \frac{2,83^2}{0,91} \approx 8,80 \text{ см}$.

8. За результатами розрахунків будемо траєкторію точки та покажемо на ній положення точки M у заданий момент часу.

Вектор швидкості \vec{V} направляємо по дотичній до траєкторії в напрямку руху точки.

Оскільки $W_\tau > 0$, то напрямки векторів \vec{V} і \vec{W}_τ співпадають.

Вектор \vec{W}_n нормального прискорення направляємо перпендикулярно до вектора \vec{W}_τ у бік вгнутості траєкторії.

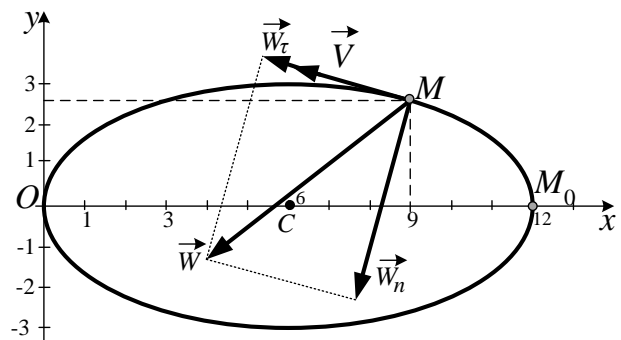


Рис. 1.2

Оскільки вектори \vec{W}_τ і \vec{W}_n перпендикулярні один одному, то вектор \vec{W} повного прискорення точки направляємо по діагоналі відповідного прямокутника.

Рисунок дає можливість перевірити правильність отриманих результатів.

Напрямок вектора швидкості \vec{V} узгоджується з отриманими значеннями $V_x < 0$ і $V_y > 0$. Вектори дотичного й нормального прискорень побудовані в певному масштабі відповідно до отриманих за розрахунками значень величин W_τ і W_n . Тому напрямок вектора \vec{W} узгоджується з отриманими значеннями $W_x < 0$ і $W_y < 0$.

За результатами розрахунків складаємо таблицю кінематичних характеристик заданої рухомої точки.

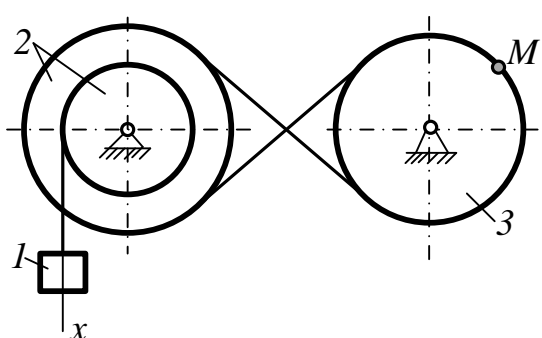
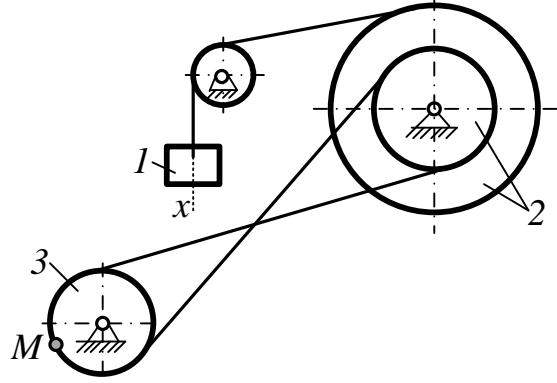
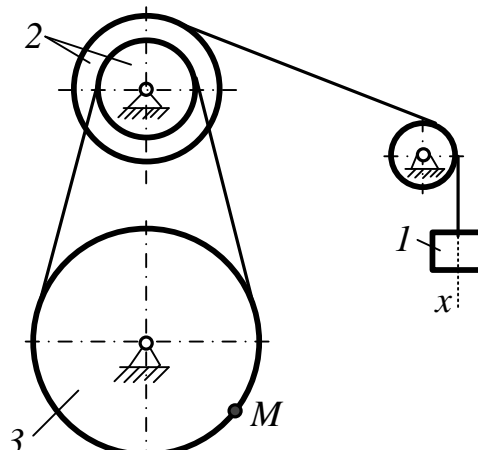
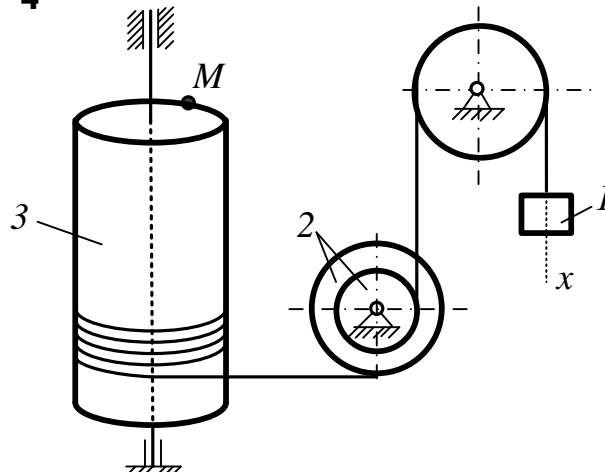
Час <i>c</i>	Координати <i>см</i>		Швидкість, <i>см/с</i>			Прискорення, <i>см/с²</i>					Радіус кривини, <i>см</i>
	<i>x</i>	<i>y</i>	V_x	V_y	<i>V</i>	W_x	W_y	<i>W</i>	W_τ	W_n	ρ
2	9	2,6	-2,7	0,79	2,83	-0,8	-0,7	1,09	0,59	0,91	8,80

Завдання К–2. Перетворення найпростіших рухів.

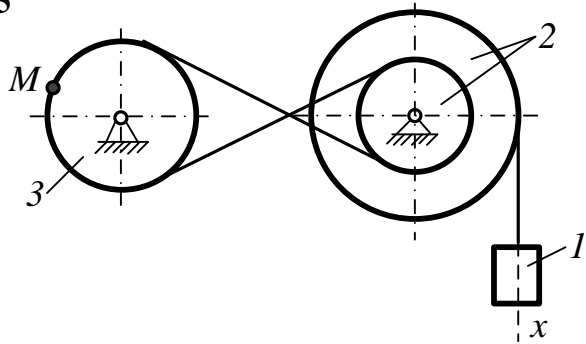
Найпростішими рухами твердого тіла є поступальний рух та обертання тіла навколо нерухомої осі. Для розв’язування задач про перетворення найпростіших рухів застосовують формули кінематики точки та кінематики обертання твердого тіла навколо нерухомої осі (розділ 12 [1], глава IX [2] та ін.). Методика розв’язування таких задач наведена в [3] – [5].

Варіанти завдань для самостійної роботи

За відомим рівнянням прямолінійного поступального руху тягача I визначити швидкість і повне прискорення точки M механізму в той момент часу, коли переміщення тягача дорівнює s .

<p>1</p>  <p>$R_2 = 40 \text{ см}, r_2 = 25 \text{ см}, R_3 = 35 \text{ см},$ $x = 10 + 20 t^2 \text{ см}, \quad s = 0,1 \text{ м}$</p>	<p>2</p>  <p>$R_2 = 50 \text{ см}, r_2 = 30 \text{ см}, r_3 = 25 \text{ см},$ $x = 8 + 10 t^2 \text{ см}, \quad s = 0,3 \text{ м}$</p>
<p>3</p>  <p>$R_2 = 32 \text{ см}, r_2 = 18 \text{ см}, r_3 = 50 \text{ см},$ $x = 12 + 40 t^2 \text{ см}, \quad s = 0,5 \text{ м}$</p>	<p>4</p>  <p>$R_2 = 24 \text{ см}, r_2 = 16 \text{ см}, R_3 = 36 \text{ см},$ $x = 5 + 30 t^2 \text{ см}, \quad s = 0,2 \text{ м}$</p>

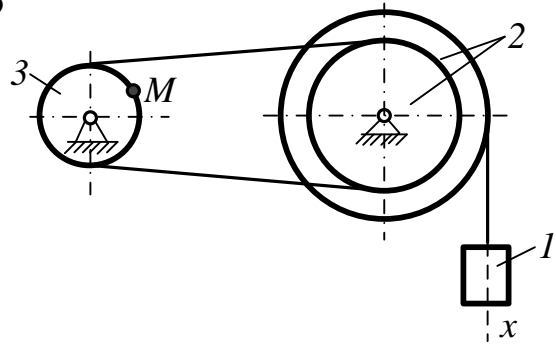
5



$$R_2 = 64 \text{ cm}, \quad r_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_3 = 48 \text{ cm},$$

$$x = 8 + 50 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,4 \text{ m}$$

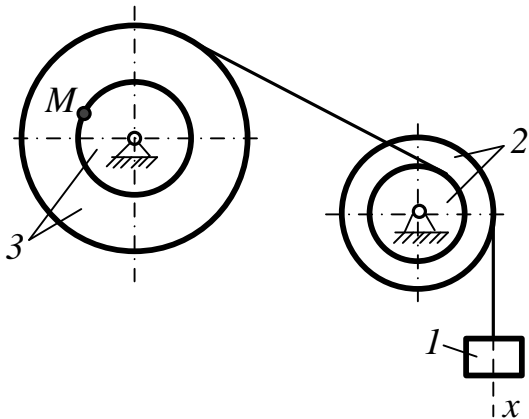
6



$$R_2 = 50 \text{ cm}, \quad r_2 = 32 \text{ cm}, \quad R_3 = 25 \text{ cm},$$

$$x = 5 + 20 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,6 \text{ m}$$

7

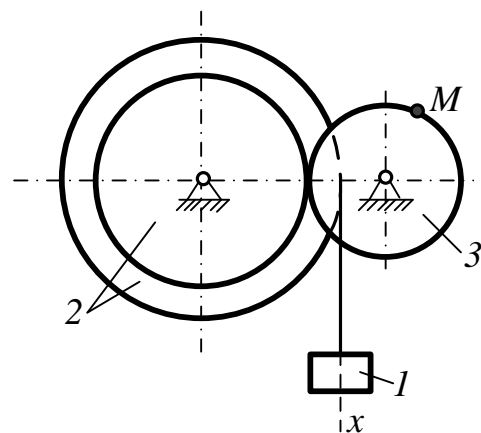


$$R_2 = 30 \text{ cm}, \quad r_2 = 20 \text{ cm},$$

$$R_3 = 48 \text{ cm}, \quad r_3 = 24 \text{ cm},$$

$$x = 9 + 90 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,3 \text{ m}$$

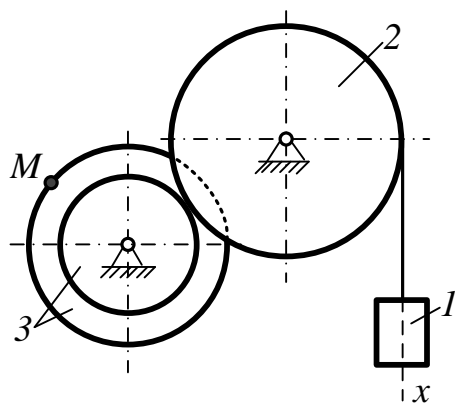
8



$$R_2 = 68 \text{ cm}, \quad r_2 = 50 \text{ cm}, \quad r_3 = 36 \text{ cm},$$

$$x = 6 + 40 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,7 \text{ m}$$

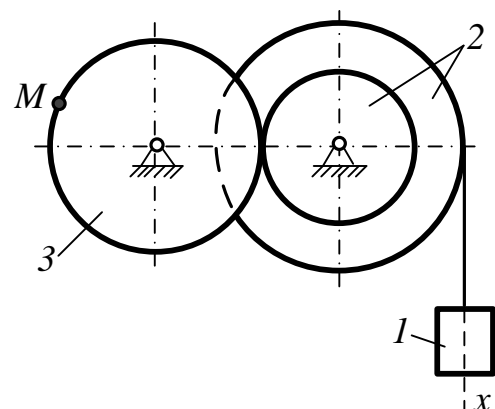
9



$$R_2 = 72 \text{ cm}, \quad R_3 = 60 \text{ cm}, \quad r_3 = 48 \text{ cm},$$

$$x = 3 + 30 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,5 \text{ m}$$

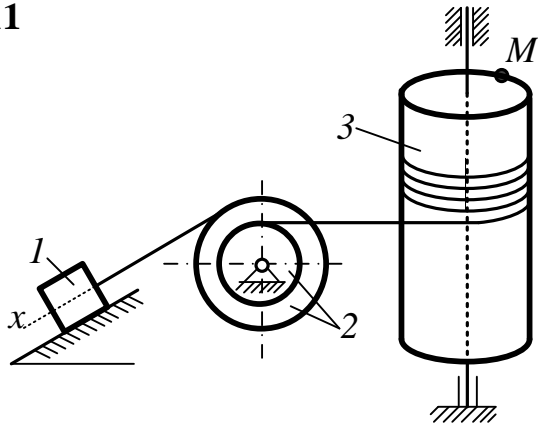
10



$$R_2 = 80 \text{ cm}, \quad r_2 = 52 \text{ cm}, \quad R_3 = 70 \text{ cm},$$

$$x = 2 + 60 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,2 \text{ m}$$

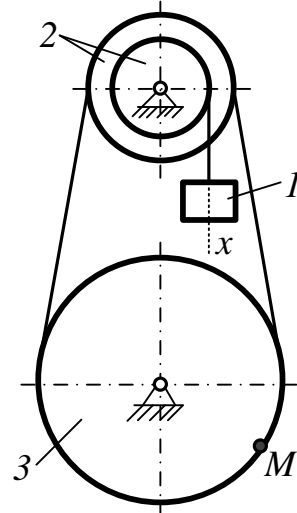
11



$$R_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_2 = 25 \text{ cm}, \quad R_3 = 40 \text{ cm},$$

$$x = 4 + 15 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,3 \text{ m}$$

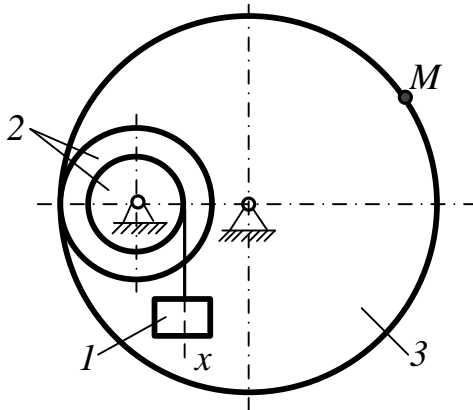
12



$$R_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_2 = 25 \text{ cm}, \quad R_3 = 65 \text{ cm},$$

$$x = 2 + 20 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,1 \text{ m}$$

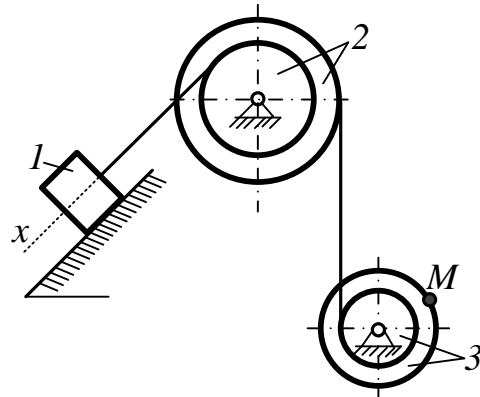
13



$$R_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_2 = 25 \text{ cm}, \quad R_3 = 100 \text{ cm},$$

$$x = 6 + 50 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,2 \text{ m}$$

14

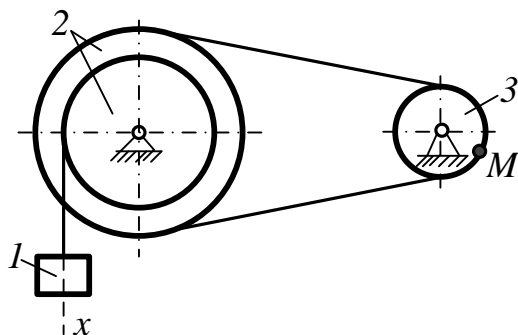


$$R_2 = 45 \text{ cm}, \quad r_2 = 30 \text{ cm},$$

$$R_3 = 28 \text{ cm}, \quad r_3 = 20 \text{ cm},$$

$$x = 5 + 30 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,1 \text{ m}$$

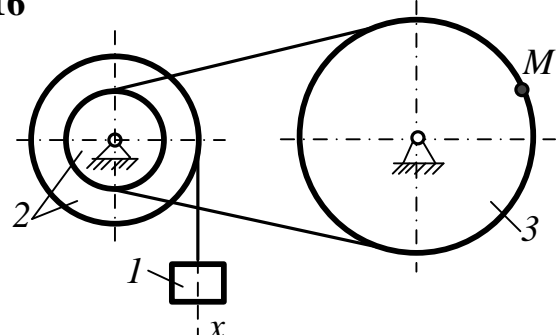
15



$$R_2 = 56 \text{ cm}, \quad r_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_3 = 25 \text{ cm},$$

$$x = 8 + 10 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,3 \text{ m}$$

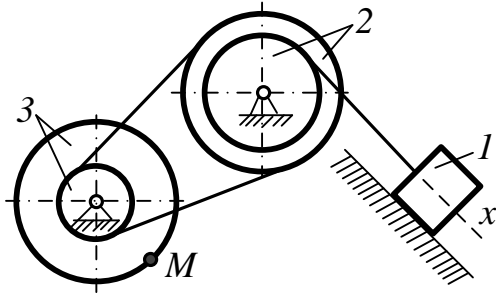
16



$$R_2 = 60 \text{ cm}, \quad r_2 = 32 \text{ cm}, \quad R_3 = 80 \text{ cm},$$

$$x = 3 + 40 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,5 \text{ m}$$

17

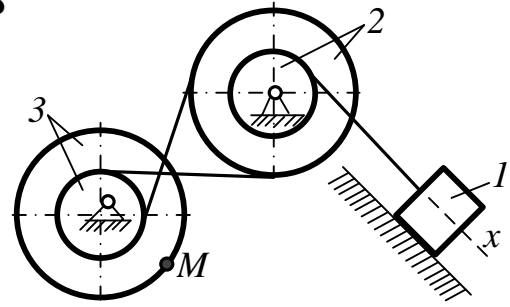


$$R_2 = 52 \text{ cm}, \quad r_2 = 40 \text{ cm},$$

$$R_3 = 52 \text{ cm}, \quad r_3 = 25 \text{ cm},$$

$$x = 7 + 10 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,3 \text{ m}$$

18

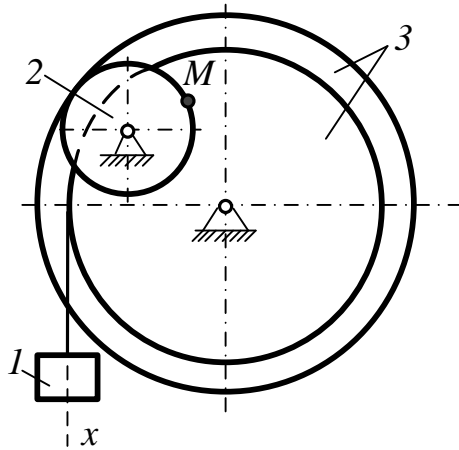


$$R_2 = 30 \text{ cm}, \quad r_2 = 16 \text{ cm},$$

$$R_3 = 30 \text{ cm}, \quad r_3 = 16 \text{ cm},$$

$$x = 4 + 12 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,2 \text{ m}$$

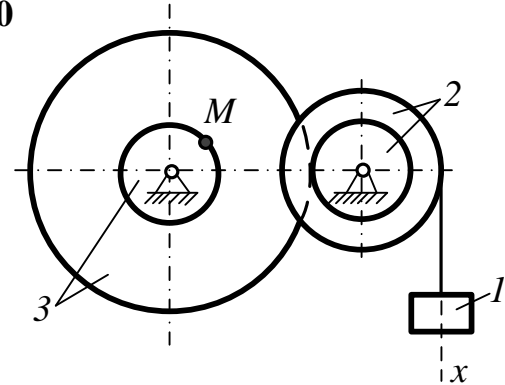
19



$$r_2 = 20 \text{ cm}, \quad R_3 = 58 \text{ cm}, \quad r_3 = 50 \text{ cm},$$

$$x = 5 + 60 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,15 \text{ m}$$

20

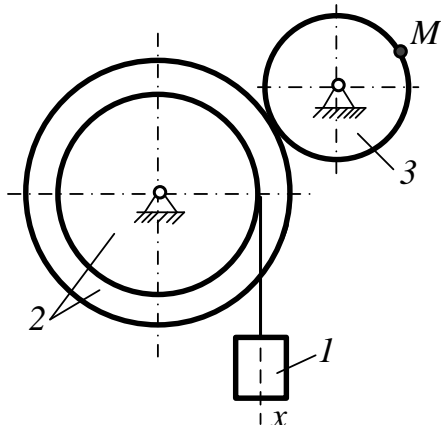


$$R_2 = 28 \text{ cm}, \quad r_2 = 18 \text{ cm},$$

$$R_3 = 45 \text{ cm}, \quad r_3 = 15 \text{ cm},$$

$$x = 10 + 70 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,6 \text{ m}$$

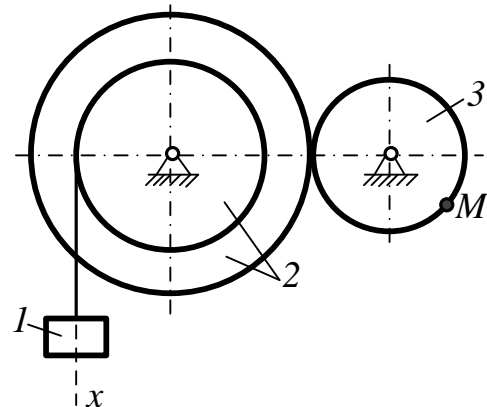
21



$$R_2 = 45 \text{ cm}, \quad r_2 = 36 \text{ cm}, \quad r_3 = 28 \text{ cm},$$

$$x = 6 + 30 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,5 \text{ m}$$

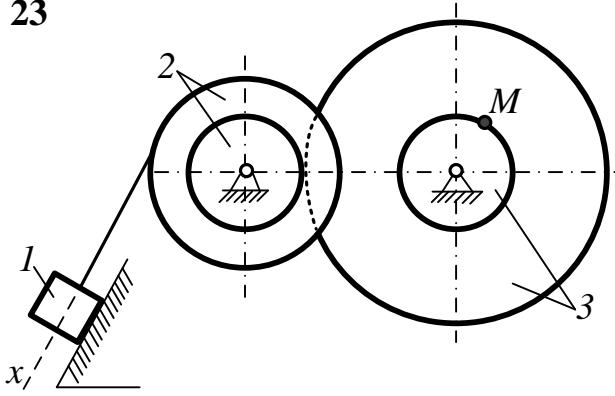
22



$$R_2 = 60 \text{ cm}, \quad r_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_3 = 32 \text{ cm},$$

$$x = 3 + 25 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,4 \text{ m}$$

23

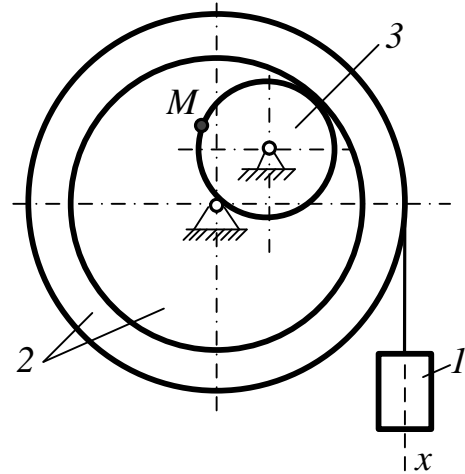


$$R_2 = 25 \text{ cm}, \quad r_2 = 16 \text{ cm},$$

$$R_3 = 40 \text{ cm}, \quad r_3 = 15 \text{ cm},$$

$$x = 8 + 40 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,6 \text{ m}$$

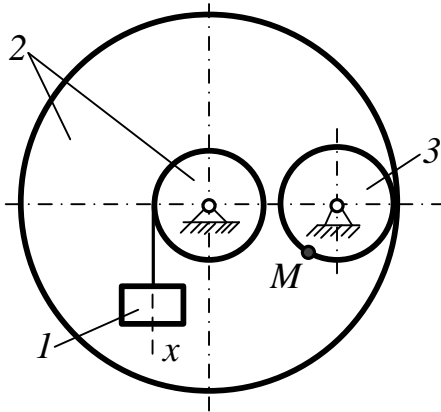
24



$$R_2 = 80 \text{ cm}, \quad r_2 = 64 \text{ cm}, \quad r_3 = 30 \text{ cm},$$

$$x = 7 + 30 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,7 \text{ m}$$

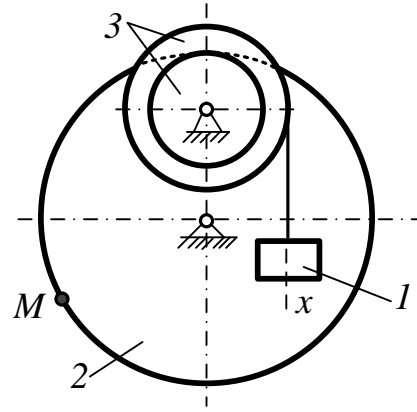
25



$$R_2 = 80 \text{ cm}, \quad r_2 = 25 \text{ cm}, \quad r_3 = 25 \text{ cm},$$

$$x = 2 + 10 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,15 \text{ m}$$

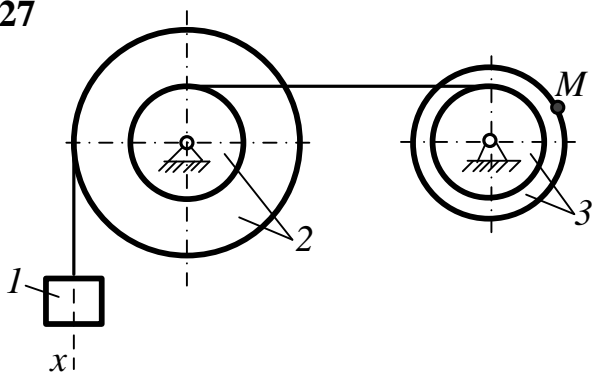
26



$$R_2 = 90 \text{ cm}, \quad R_3 = 45 \text{ cm}, \quad r_3 = 27 \text{ cm},$$

$$x = 4 + 30 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,9 \text{ m}$$

27

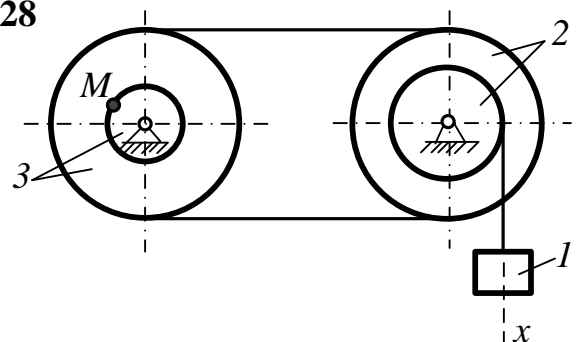


$$R_2 = 30 \text{ cm}, \quad r_2 = 15 \text{ cm},$$

$$R_3 = 21 \text{ cm}, \quad r_3 = 15 \text{ cm},$$

$$x = 6 + 25 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,4 \text{ m}$$

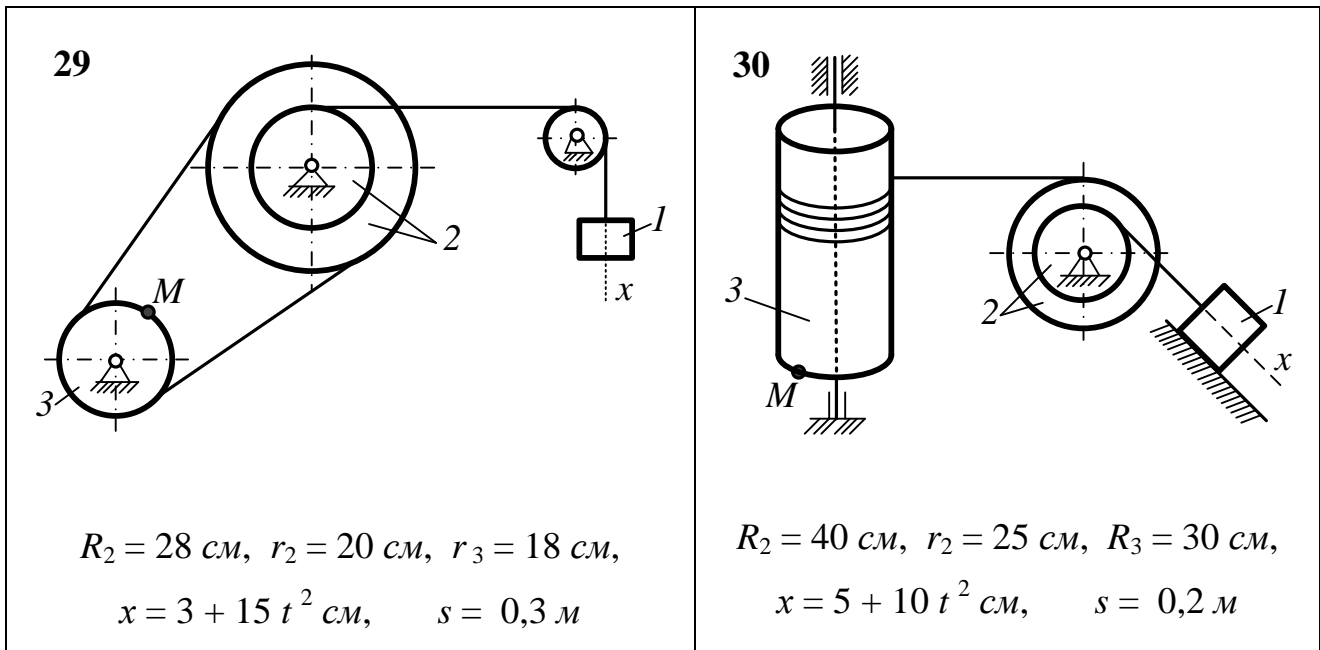
28



$$R_2 = 40 \text{ cm}, \quad r_2 = 25 \text{ cm},$$

$$R_3 = 40 \text{ cm}, \quad r_3 = 15 \text{ cm},$$

$$x = 6 + 20 t^2 \text{ cm}, \quad s = 0,5 \text{ m}$$



Вказівки: Завдання К–2 полягає у дослідженні перетворень найпростіших рухів твердого тіла. Виконувати завдання у такій послідовності:

- 1) визначити момент часу t_1 , для якого будуть проведені подальші розрахунки, застосовуючи формулу:

$$s = x \Big|_{t_1} - x \Big|_{t_0};$$

- 2) проаналізувати рух усього механізму, визначити точки, в яких відбуваються перетворення руху, і для цих точок показати вектори швидкості;
- 3) розрахувати швидкості відповідних точок або кутові швидкості та кутові прискорення відповідних елементів за формулами:

$$V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V = \omega \cdot R, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega};$$

- 4) для точки M визначити швидкість V , дотичне W_τ , нормальне W_n і повне прискорення за формулами:

$$V = \omega \cdot R, \quad W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2},$$

$$W_\tau = \varepsilon \cdot R \quad \text{або} \quad W_\tau = \frac{dV}{dt},$$

$$W_n = \omega^2 \cdot R \quad \text{або} \quad W_n = \frac{V^2}{R},$$

де R – віддаль точки M від осі обертання;

- 5) для точки M побудувати вектори швидкості та прискорення, враховуючи напрям обертання відповідного елемента та співвідношення між величинами W_τ і W_n ;
- 6) записати у відповідь значення швидкості V і прискорення W точки M , визначені для моменту часу t_1 .

Зразок виконання завдання

7)

Задача К2. Тягар I (рис. 2.1) рухається поступально за законом $x = x(t)$, де x – у сантиметрах, t – у секундах. Для точки M механізму визначити швидкість V і повне прискорення W у той момент часу, коли переміщення тягарця I дорівнює s .

Дано: $R_2 = 40$ см,
 $r_2 = 25$ см,
 $R_3 = 60$ см,
 $r_3 = 30$ см,
 $x = 2 + 16 t^2$ см,
 $s = 0,4$ м.

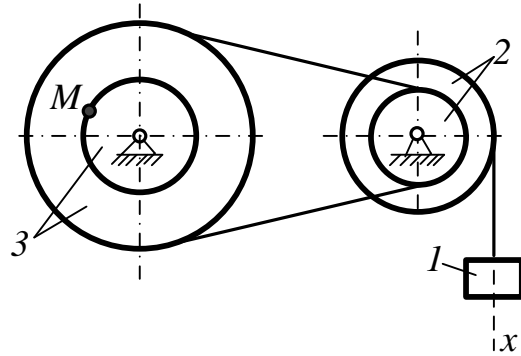


Рис. 2.1

Розв'язання

1. Визначимо момент часу t_1 , для якого будемо проводити подальші розрахунки швидкості та прискорення точки M . Застосовуємо формулу:

$$s = x|_{t_1} - x|_{t_0}.$$

За умовою завдання маємо:

$$s = 0,4 \text{ м} = 40 \text{ см}, \quad x|_{t_1} = 2 + 16 t_1^2 \text{ см}, \quad x|_{t_0} = 2 \text{ см}.$$

Тому для визначення t_1 отримаємо рівняння:

$$40 = 2 + 16 t_1^2 - 2.$$

Звідси знаходимо значення t_1 :

$$t_1^2 = \frac{40}{16} = 2,5 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{2,5} \approx 1,58 \text{ с}.$$

2. Для визначення швидкості та прискорення точки M проаналізуємо рух механізму. Рухаючись поступально, тягарець I набуває швидкості, величину якої визначаємо за формулою:

$$V_1 = \dot{x} = (2 + 16 t^2)' = 32 t.$$

Вектор \vec{V}_1 направляємо у напрямку руху тягаря (рис. 2.2).

Поступальний рух тягарця I спричиняє обертання елементів 2 за годинниковою стрілкою. При цьому для точки A , що одночасно належить як елементу 2 , так і мотузці, до якої підвішений тягар I , маємо $\vec{V}_A = \vec{V}_1$. Відповідно величину швидкості точки A можемо визначити двома способами:

$$\begin{cases} V_A = V_1 = 32t, \\ V_A = \omega_2 R_2, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad 40t = \omega_2 R_2.$$

Розв'язуємо рівняння відносно величини ω_2 :

$$\omega_2 = \frac{32t}{R_2} = \frac{32t}{40}.$$

Отже, кутова швидкість елементів 2 змінюється відповідно до закону:

$$\omega_2 = 0,8t.$$

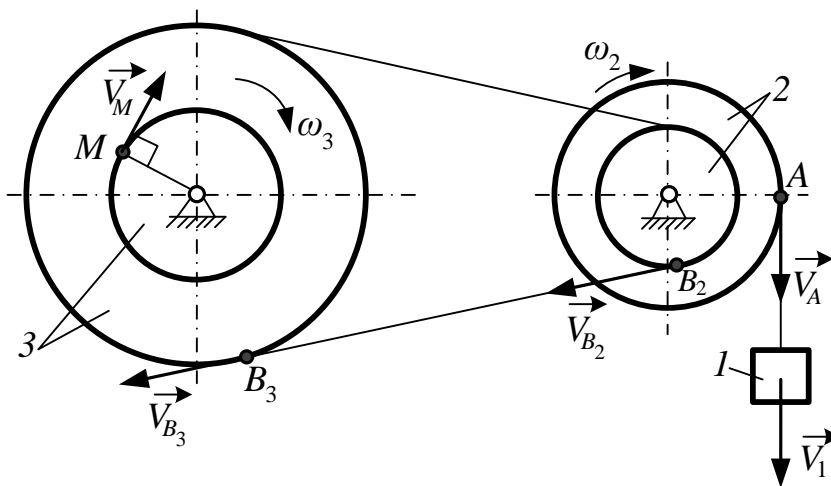


Рис. 2.2

Обертання елементів 2 спричиняють обертання елементів 3 за годинниковою стрілкою. При цьому точки B_2 і B_3 пасу, що з'єднує ці елементи, мають однакові швидкості. Тому вектори \vec{V}_{B_2} і \vec{V}_{B_3} однаково направлені (рис. 2.2) і мають однакові модулі.

Оскільки точка B_2 належить елементу 2, то її швидкість визначаємо за формулою:

$$V_{B_2} = \omega_2 r_2.$$

Точка B_3 розташована на ободі елемента 3 і тому виконується рівність:

$$V_{B_3} = \omega_3 R_3.$$

Враховуючи, що $V_{B_2} = V_{B_3}$, складаємо рівняння:

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3.$$

Звідси визначаємо величину ω_3 :

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3} = \frac{0,8t \cdot 25}{60} = \frac{20}{60}t.$$

Таким чином, кутова швидкість елемента 3 змінюється відповідно до закону:

$$\omega_3 = \frac{1}{3} t.$$

Оскільки точка M належить елементу 3 і віддалена від осі обертання на відстань r_3 , то швидкість точки M визначаємо за формулою:

$$V_M = \omega_3 r_3 = \frac{1}{3} t \cdot 30 = 10 t.$$

Відповідно в момент часу $t_1 = 1,58 c$ маємо:

$$V_M \Big|_{t_1} = 10 \cdot 1,58 = 15,8 \text{ см / с}.$$

3. Прискорення точки M визначимо за його складовими:

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n, \quad W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}.$$

Тут дотичне прискорення дорівнює:

$$W_\tau = \frac{dV_M}{dt} = (10t)' = 10 \text{ см / с}^2.$$

Нормальне прискорення можна розрахувати за формулою:

$$W_n = \frac{V_M^2}{r_3}.$$

У момент часу $t_1 = 1,58 c$ маємо:

$$W_n \Big|_{t_1} = \frac{(15,8)^2}{30} \approx 8,32 \text{ см / с}^2.$$

Отже, модуль прискорення точки M у момент часу t_1 дорівнює:

$$W_M \Big|_{t_1} = \sqrt{(10)^2 + (8,32)^2} \approx 13,01 \text{ см / с}^2.$$

На рисунку для побудови вектора прискорення точки M направляємо вектор дотичного прискорення \vec{W}_τ так само, як і вектор швидкості \vec{V}_M . Вектор нормального прискорення \vec{W}_n направляємо по нормалі до траєкторії точки M . Вектор повного прискорення \vec{W} визначаємо як векторну суму векторів \vec{W}_τ і \vec{W}_n , тобто направляємо \vec{W} по діагоналі прямокутника, побудованого на векторах \vec{W}_τ і \vec{W}_n (рис. 2.3).

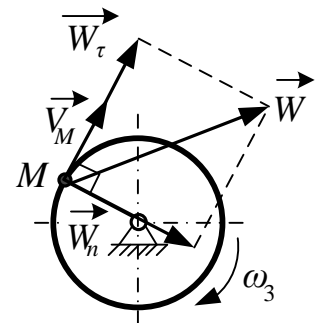


Рис. 2.3

Відповідь. $V_M = 15,8 \text{ см / с}$, $W_M = 13,0 \text{ см / с}^2$.

Завдання К-3. Дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла.

Основні теореми та формули, що застосовують при дослідженні плоского руху, указані в [1] (розділ 15), [2] (глава XI) та ін.

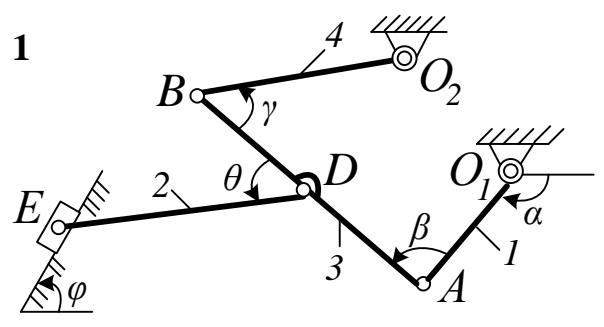
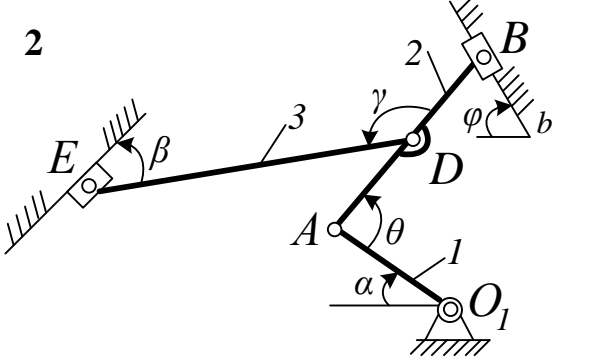
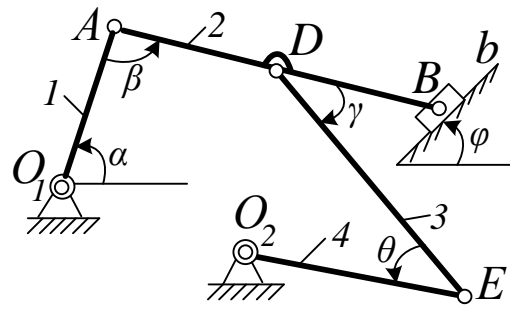
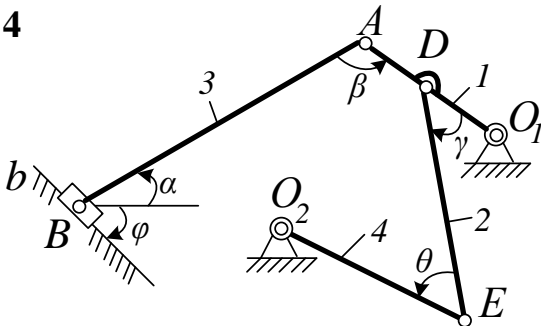
Варіанти завдань для самостійної роботи

Плоский механізм складається зі стержнів та повзунів, які з'єднані один із одним і з нерухомими опорами O_1 та O_2 шарнірами. Довжини стержнів дорівнюють:

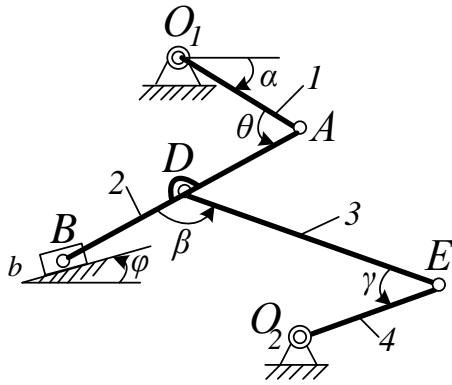
$$l_1 = 0,4 \text{ м}, \quad l_2 = 1,2 \text{ м}, \quad l_3 = 1,4 \text{ м}, \quad l_4 = 0,8 \text{ м}.$$

Положення механізму визначають кути α , β , γ , φ , θ . Враховуючи задану швидкість одного із елементів, визначити указані швидкості інших елементів.

Примітка. Якщо задана кутова швидкість ω , то направляти її проти годинникової стрілки. У варіантах, в яких задана величина V_B , вважати, що швидкість \vec{V}_B направлена від точки B до b . Точки D і K розташовані посередині відповідних стержнів механізму.

<p>1</p>  <p>Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_1 = 6 \text{ рад/с}$</p> <p>Визначити: V_B, V_D, V_E, ω_3</p>	<p>2</p>  <p>Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $V_B = 4 \text{ м/с}$</p> <p>Визначити: V_A, V_D, ω_1, ω_3</p>
<p>3</p>  <p>Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_1 = 5 \text{ рад/с}$</p> <p>Визначити: V_A, V_B, V_E, ω_3</p>	<p>4</p>  <p>Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $V_B = 6 \text{ м/с}$</p> <p>Визначити: V_A, V_E, ω_3, ω_1</p>

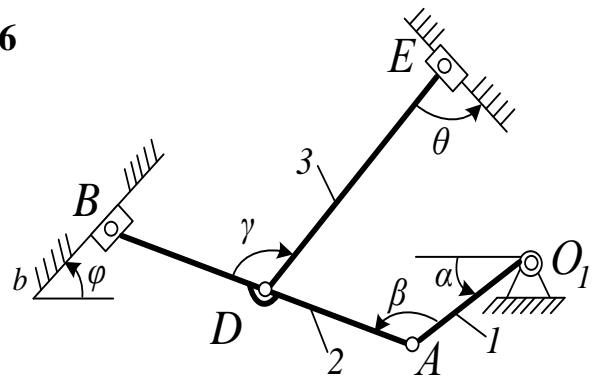
5



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$

Визначити: V_B , V_E , ω_2 , ω_4

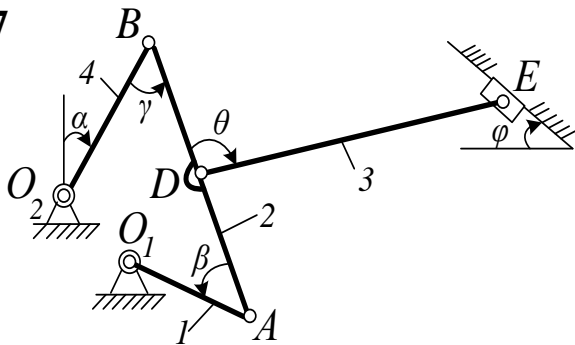
6



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_1 = 2 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , V_E , ω_2

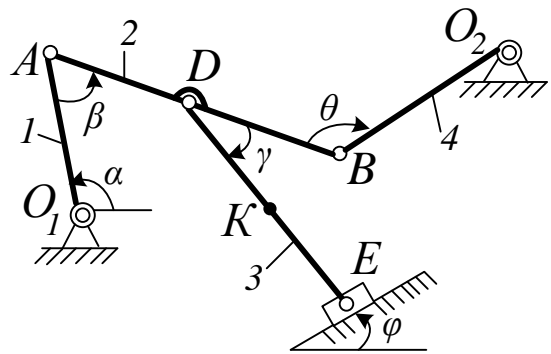
7



Дано: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\omega_4 = 4 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , V_E , ω_3

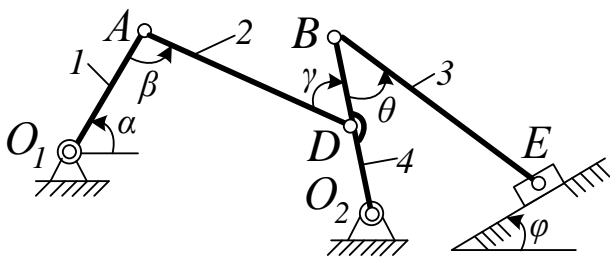
8



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_1 = 5 \text{ рад/с}$

Визначити: V_B , V_K , ω_2 , ω_4

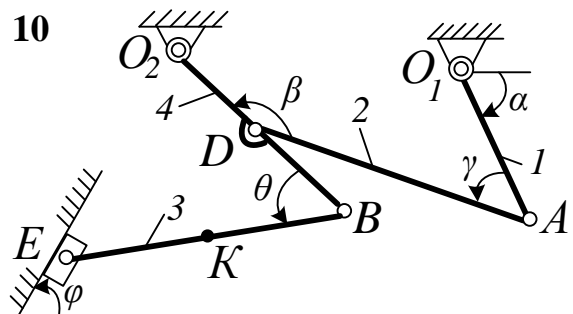
9



Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\omega_4 = 5 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_D , V_E , ω_3

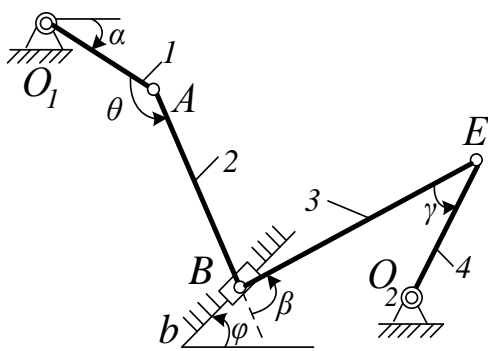
10



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$

Визначити: V_D , V_K , ω_2 , ω_4

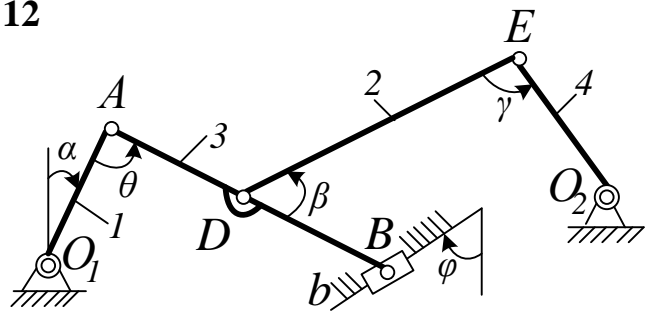
11



Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_1 = 6 \text{ рад/с}$

Визначити: V_B , V_E , ω_2 , ω_4

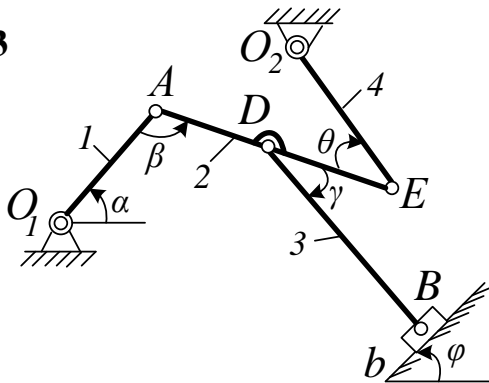
12



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 90^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_4 = 3 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , V_D , ω_3

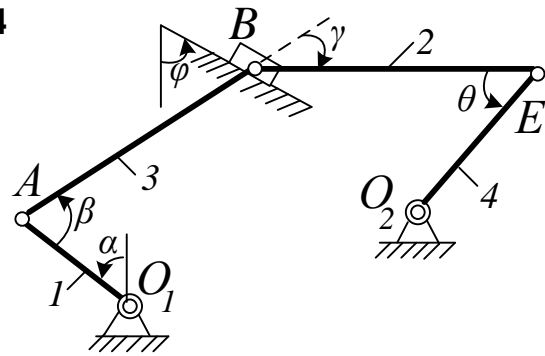
13



Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_4 = 5 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , ω_1 , ω_2

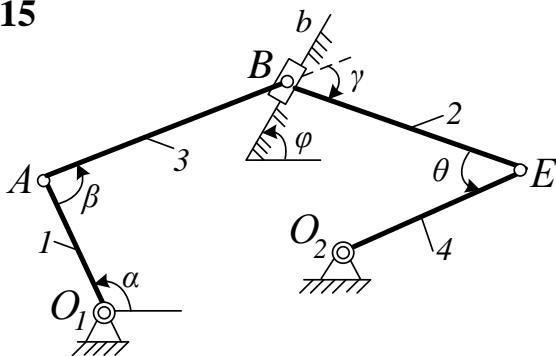
14



Дано: $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , V_E , ω_2

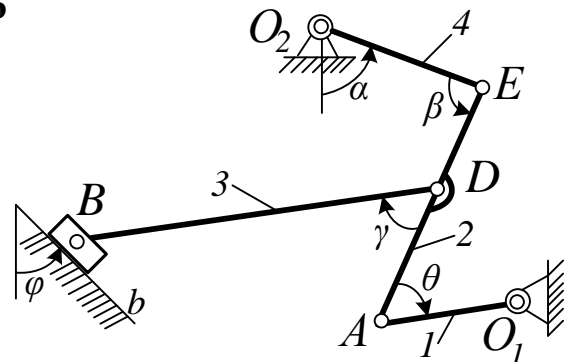
15



Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_4 = 4 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , ω_1 , ω_2

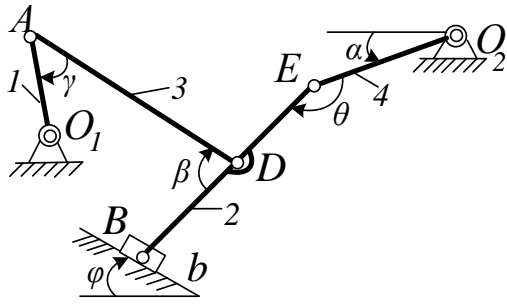
16



Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\omega_1 = 2 \text{ рад/с}$

Визначити: V_B , V_E , ω_3 , ω_4

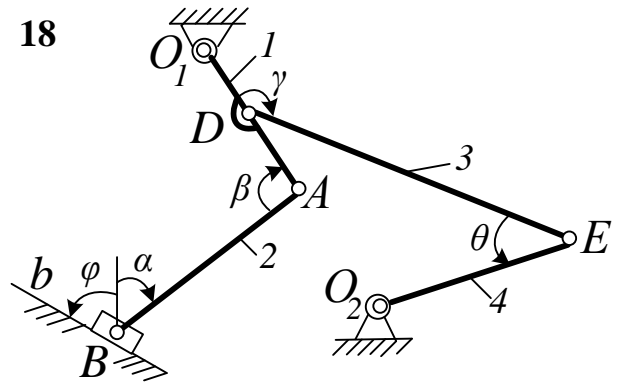
17



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_1 = 9 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , V_E , ω_2

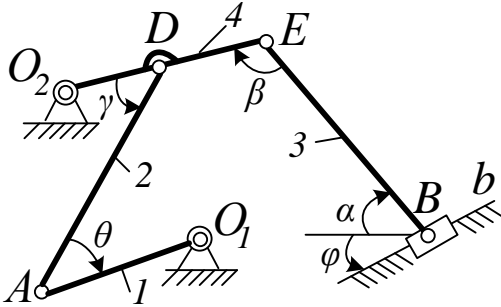
18



Дано: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\omega_4 = 5 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_D , ω_1 , ω_2

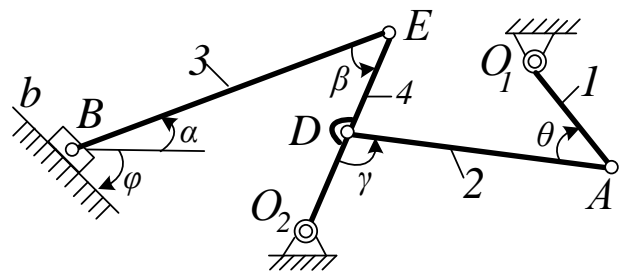
19



Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $V_B = 6 \text{ м/с}$

Визначити: V_A , V_E , ω_2 , ω_4

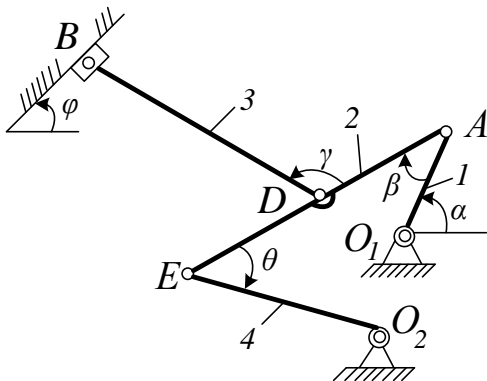
20



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$

Визначити: V_B , V_E , ω_3 , ω_4

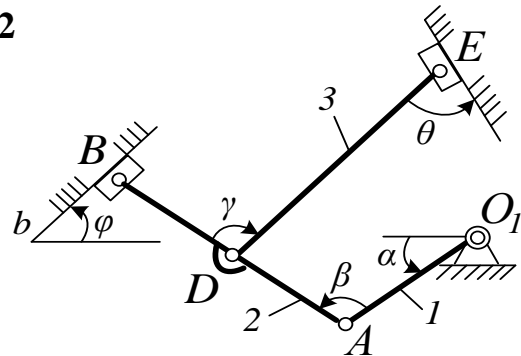
21



Дано: $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\omega_1 = 5 \text{ рад/с}$

Визначити: V_B , V_E , ω_2 , ω_4

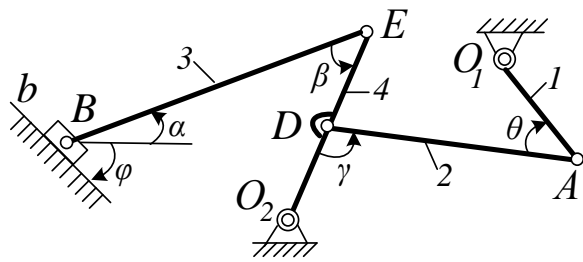
22



Дано: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 90^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $V_B = 8 \text{ м/с}$

Визначити: V_A , V_D , V_E , ω_2

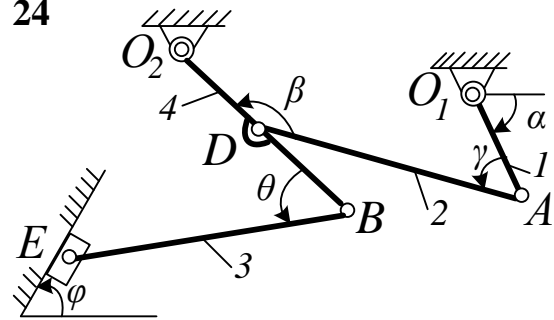
23



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_4 = 3 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , ω_1 , ω_3

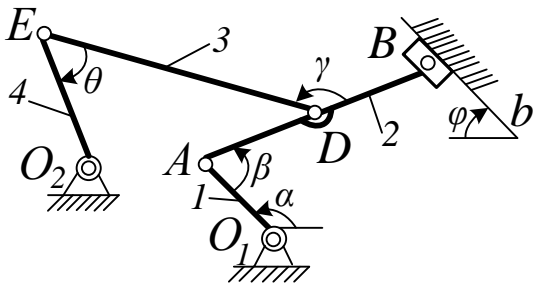
24



Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\omega_1 = 5 \text{ рад/с}$,

Визначити: V_B , V_E , ω_2 , ω_4

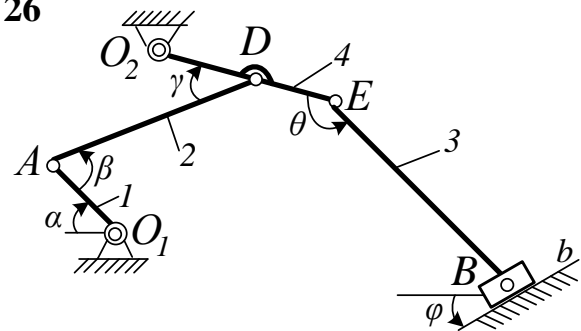
25



Дано: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $V_B = 3 \text{ м/с}$

Визначити: V_A , V_E , ω_3 , ω_4

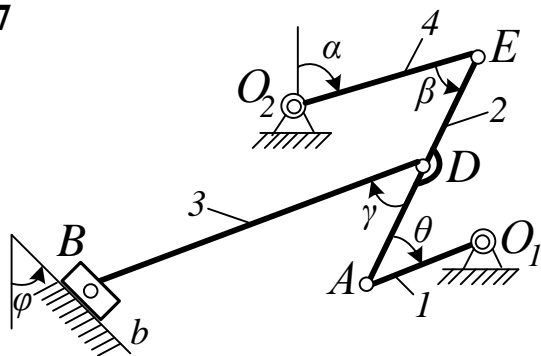
26



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 150^\circ$, $\omega_4 = 6 \text{ рад/с}$

Визначити: V_A , V_B , ω_1 , ω_2

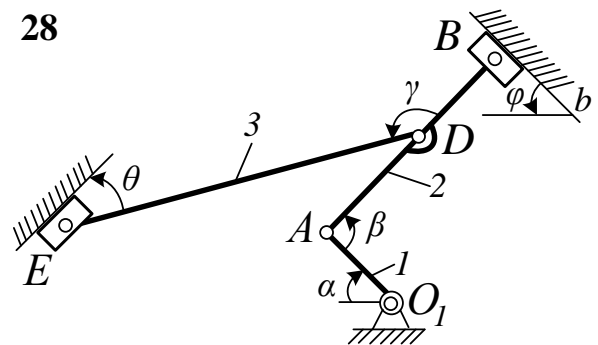
27



Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_1 = 6 \text{ рад/с}$,

Визначити: V_B , V_E , ω_3 , ω_4

28



Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $V_B = 5 \text{ м/с}$

Визначити: V_A , V_D , V_E , ω_2

29

Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $\omega_4 = 3 \text{ рад/с}$,
 Визначити: V_A , V_D , V_E , ω_2

30

Дано: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 120^\circ$,
 $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $V_B = 10 \text{ м/с}$,
 Визначити: V_A , V_E , ω_1 , ω_2

Вказівки. Завдання К-3 – на дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла. Визначити швидкості точок механізму і кутові швидкості його ланок треба за допомогою миттєвого центру швидкостей або теореми про проекції швидкостей двох точок тіла, застосовуючи їх для кожної ланки механізму окремо.

Завдання виконувати в такій послідовності:

- 1) Показати положення механізму відповідно до заданих кутів. При цьому:
 - побудову починати зі стержня, напрям якого визначає кут α ;
 - при побудові для довжин стержнів дотримуватись певного масштабу (наприклад, 1 см на рисунку відповідає 20 см дійсної довжини стержня);
 - кути відкладати в напрямках, указаних відповідними дуговими стрілками (за годинниковою стрілкою чи проти годинникової стрілки).
- 2) Показати вектори швидкостей відповідно до напрямків руху ланок механізму.
- 3) Для стержнів 1 і 2 механізму, що здійснюють плоскопаралельний рух, визначити миттєві центри швидкостей.
- 4) Починаючи з відомої величини, послідовно розрахувати необхідні величини.
- 5) Для перевірки одну із швидкостей визначити двома способами.

Зразок виконання завдання

Задача К3. Плоский механізм складається зі стержнів та повзунів, які з'єднані один із одним і з нерухожими опорами O_1 та O_2 шарнірами (рис. 3.1). Довжини стержнів:

$$l_1 = 0,4 \text{ м}, \quad l_2 = 1,2 \text{ м}, \quad l_3 = 1,4 \text{ м}, \quad l_4 = 0,8 \text{ м}.$$

Точка D розташована посередині стержня 2 механізму. Положення механізму визначають кути α , β , γ , φ , θ . Визначити швидкості точок B та E , а також кутові швидкості стержнів 2 і 4.

Дано: $\alpha = 90^\circ$,
 $\beta = 150^\circ$,
 $\gamma = 60^\circ$,
 $\varphi = 90^\circ$,
 $\theta = 30^\circ$,
 $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$.

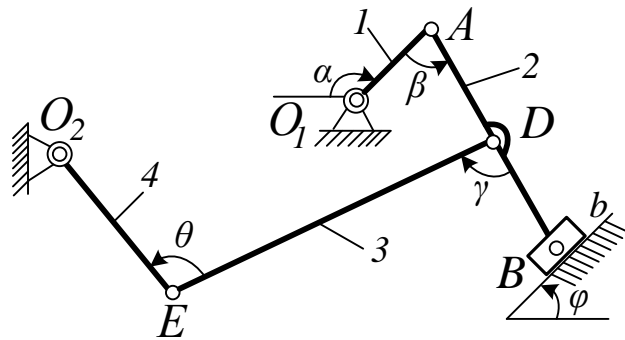


Рис. 3.1

Знайти: V_B , V_E , ω_2 , ω_4

Розв'язання

Покажемо положення механізму відповідно до заданих кутів (рис. 3.2). При цьому дотримуємося масштабу 1:20 (тобто в 1 см на рисунку маємо 20 см дійсної довжини стержня). Побудову починаємо зі стержня, положення якого визначає кут α , тобто зі стержня O_1A . Кожен із кутів відкладаємо у напрямку, указаному відповідною стрілкою.

За умовою задану кутову швидкість $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$ вважаємо направленою проти годинникової стрілки. Тому стержень 1 обертається навколо шарніру O_1 проти годинникової стрілки.

Відповідно для точки A направляємо вектор швидкості \vec{V}_A перпендикулярно до відрізка O_1A (рис. 3.2). Величину цієї швидкості розраховуємо за формулою:

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot l_1.$$

Отже, $V_A = 4 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}$.

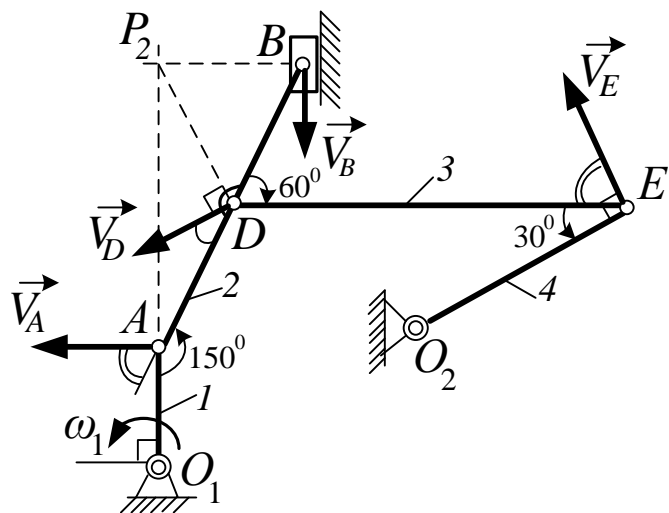


Рис. 3.2

Оскільки точка A належить також і стержню AB , то визначаємо швидкість точки B . Враховуємо, що за умовою $\varphi = 90^\circ$, тому повзун B рухається вздовж вертикальної прямої. Вектор швидкості \vec{V}_B направляємо вертикально вниз, а модуль цієї швидкості обчислюємо за теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла:

$$\text{Пр}_{AB} \vec{V}_B = \text{Пр}_{AB} \vec{V}_A \quad \Rightarrow \quad V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ.$$

Таким чином маємо:

$$V_B = \frac{V_A \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}, \quad \text{тобто} \quad V_B = \frac{1,6 \cdot \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1,6}{\sqrt{3}} \approx 0,92 \text{ м/с}.$$

Точки A та B належать стержню 2, який здійснює плоскопаралельний рух. Для визначення кутової швидкості ω_2 знайдемо миттєвий центр швидкостей стержня 2 у такій послідовності: проводимо через точку A перпендикуляр до вектора \vec{V}_A , а через точку B – перпендикуляр до вектора швидкості \vec{V}_B . Точка P_2 перетину цих перпендикулярів (рис. 3.2) є миттєвим центром швидкостей стержня 2.

Кутову швидкість ω_2 визначаємо за формулою:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2}.$$

Оскільки трикутник ABP_2 є прямокутним, то маємо:

$$AP_2 = AB \cos 30^\circ = l_2 \cos 30^\circ = 1,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,6\sqrt{3} \text{ м}.$$

Отже, кутова швидкість стержня 2 дорівнює:

$$\omega_2 = \frac{1,6}{0,6\sqrt{3}} \approx 1,54 \text{ рад/с}.$$

Стержню 2 належить також і точка D . Тому, з'єднавши цю точку з миттєвим центром швидкостей P_2 , направляємо вектор швидкості \vec{V}_D перпендикулярно до відрізка DP_2 . Застосовуємо теорему про проекції швидкостей:

$$\text{Пр}_{BD} \vec{V}_D = \text{Пр}_{BD} \vec{V}_B \quad \Rightarrow \quad V_D \cos 30^\circ = V_B \cos 30^\circ.$$

Звідси визначаємо, що $V_D = V_B = \frac{1,6}{\sqrt{3}} \approx 0,92 \text{ м/с}$.

Точка D розташована на одному стержні з точкою E , яка належить також і стержню 4. Оскільки стержень 4 обертається навколо шарніру O_2 , то вектор швидкості \vec{V}_E направляємо перпендикулярно відрізку O_2E (рис. 3.2). Тоді за теоремою про проекції швидкостей маємо:

$$\text{Пр}_{DE} \vec{V}_E = \text{Пр}_{DE} \vec{V}_D, \quad \text{тобто} \quad V_E \cos 60^\circ = V_D \cos 30^\circ.$$

Звідси визначаємо модуль швидкості точки E :

$$V_E = V_D \sqrt{3} = \frac{1,6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1,6 \text{ м/с.}$$

При обертаннях стержня 4 з кутовою швидкістю ω_4 , маємо формулу:

$$V_E = \omega_4 \cdot EO_2, \quad \text{де } EO_2 = l_4 = 0,8 \text{ м.}$$

Тому кутова швидкість стержня 4 дорівнює:

$$\omega_4 = \frac{V_E}{EO_2} = \frac{V_E}{l_4} = \frac{1,6}{0,8} = 2 \text{ рад/с.}$$

Для перевірки величину швидкості точки D визначимо за формулою:

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2.$$

Враховуючи, що трикутник ABD є рівностороннім, маємо:

$$DP_2 = BD = \frac{l_2}{2} = 0,6 \text{ м.}$$

Тому модуль швидкості точки D дорівнює:

$$V_D = \frac{1,6}{0,6 \sqrt{3}} \cdot 0,6 = \frac{1,6}{\sqrt{3}} \approx 0,92 \text{ м/с.}$$

Цей результат співпадає з отриманим вище. Отже, розрахунки проведені правильно.

Відповідь. $V_B = 0,92 \text{ м/с}$, $V_E = 1,6 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 1,54 \text{ рад/с}$, $\omega_4 = 2 \text{ рад/с}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лобас Л. Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка. – К.: ДЕДУТ, 2009. – 407 с.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. проф. А. А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.
4. Аркуша А. И. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1976. – 288 с.
5. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. I. – М.: Наука, 1964. – 512 с.
6. Лобас Л. Г., Ковальчук В. В. Теоретична механіка у прикладах і задачах. Ч. 2. Кінематика. – К.: ДЕДУТ, 2009. – 96 с.

Навчально-методичне видання

Вікторія Валентинівна Ковальчук

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 2.
Кінематика

Для студентів технічних спеціальностей
заочної форми навчання

Відповідальний за випуск В. В. Ковальчук

Редактор	Н. В. Щербак
Верстка	В. О. Андрієнка

Підписано до друку . 06.2013 року. Формат паперу 60×84/16, папір офс.,
спосіб друку – ризографія. Замовлення № 164/13, тираж 50 прим.

Надруковано в редакційно-видавничому центрі
Державного економіко-технологічного університету транспорту
Свідоцтво про реєстрацію Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р.
03049, м. Київ-49, вул. Миколи Лукашевича, 19.