

МІНІСТЕРСТВО ІНФРАСТРУКТУРИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЕКОНОМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ТРАНСПОРТУ

Кафедра «Теоретична та прикладна механіка»

Белевцова Н. Л., Одинець А. А.

Опір матеріалів

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Київ – 2011

Белевцова Н. Л., Одинець А. А. Опір матеріалів: Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. – К., 2011. – 45 с.

Навчально-методичний посібник призначено для самостійної роботи, а також виконання розрахунково-графічних і контрольних робіт із дисципліни «Опір матеріалів». Навички самостійної роботи дозволяють студентам застосовувати теорію дисципліни «Опір матеріалів» у практичній діяльності інженера.

Рекомендовано до публікації кафедрою «Теоретичної та прикладної механіки» (протокол № 8 від 16.04.10) та начальничо-методичною комісією факультету «Інфраструктура рухомого складу залізничного транспорту» (протокол № 10 від 20.05.10).

Укладачі: Н. Л. Белевцова – кандидат технічних наук, доцент (ДЕТУТ);
А. А. Одинець – кандидат технічних наук, професор (ДЕТУТ)

Рецензенти: В. В. Косарчук – доктор технічних наук, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки (ДЕТУТ);
М. М. Тормахов – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник (Інститут механіки НАН України)

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Загальні положення. Балка на пружних підвалинах.....	5
2. Приклади розрахунку балок на пружних підвалинах.....	13
Приклад 1.....	13
Приклад 2.....	21
Приклад 3.....	26
3. Додатки.....	31
Додаток 1. Варіанти індивідуальних завдань.....	32
Додаток 2. Методика інтерполяції.....	35
Додаток 3. Таблиця функцій академіка О. М. Крилова для розрахунку балок сталого перерізу на пружній основі	36
Література.....	44

ВСТУП

Методичний посібник призначено для студентів технічних спеціальностей. У ньому стисло наведено теоретичні відомості розрахунку балок на пружних підвалинах. У посібнику докладно розглянуто методику розв'язання типових задач з контролем отриманих результатів розрахунку.

Теоретичний матеріал і наведені приклади розрахунку подані в доступній формі. Це дозволить кожному студенту самостійно розібратися в методиці практичного використання теоретичних і практичних положень розв'язання балок на пружних підвалинах, а також самостійно виконати індивідуальні завдання за заданою тематикою.

Наведені приклади відображають послідовність виконання розрахунково-графічних завдань і правила контролю отриманих епюр переміщень і внутрішніх зусиль.

У додатках надано таблиці гіперболо-тригонометричних функцій та правила інтерполяції табличних даних.

Завдання виконуються згідно з варіантом. Варіант схеми надається викладачем, а варіант даних визначається за додатком 1.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. БАЛКА НА ПРУЖНИХ ПІДВАЛИНАХ

В інженерній практиці дуже часто зустрічаються балки на пружних підвалинах. З такими балками доводиться мати справу при розрахунках стрічкових фундаментів, гребель, будівельних споруд, залізничних рейок, шпал та в деяких інших випадках.

Такі балки по всій довжині лежать на підвалинах, які деформуються і наділені пружними властивостями. Балки на пружних підвалинах крім зовнішнього навантаження випробовують реактивний опір з боку самої основи. Такі балки є статично невизначуваними тому, що неможливо за допомогою лише одних рівнянь рівноваги визначити закономірність тиску з боку суцільної пружної основи.

Існує декілька методів розрахунку таких балок, але деякі з них достатньо громіздкі. Найбільш поширеним у практиці є метод, що базується на гіпотезі професора Вінклера. Відповідно до цієї гіпотези, реакції з боку основи в кожній точці пропорційні пружній просадці у балки в даній точці. Така просадка залежить від жорсткості балки і від пружних властивостей основи.

Реакція пружної основи по довжині балки матиме інтенсивність, яка дорівнює

$$r_x = -KY_x, \quad (1)$$

де r_x – реакція основи, що припадає на одиницю довжини балки, Н/м,

K – погонний коефіцієнт пропорційності. Він чисельно дорівнює реакції основи, яка припадає на одиницю довжини балки при прогині, що дорівнює 1 пі . Розмірність цього коефіцієнта K Н/м².

$$K = K_0 b, \quad (2)$$

де K_0 – коефіцієнт піддатливості основи чи коефіцієнт постелі. Його розмірність Н/м³,

b – ширина балки у місці контакту з основою.

Наведемо значення коефіцієнта піддатливості основи для деяких матеріалів.

Таблиця 1

Матеріал основи	$K_0, \text{Н/м}^3$
Пісок свіжонасипаний	10...50
Глина мокра	5...50
Пісок злежалий	
Гравій насипаний	
Щільний пісок	
Глина волога	
Щебінь	
Глина малої вологи	50...100
Ґрунт пісчано-глинистий	100...200
Ґрунт штучно-ущільнений	
Глина тверда	100...200
Вапняк, пісковик, мерзлота	200...1000
Тверда скала	
Бутова кладка	1000...15000
Бетон і залізобетон	5000...6000
Цегла	8000...15000
	4000...5000

Відповідно до гіпотези Вінклера, за модель основи можна вважати низку пружин однакової жорсткості, які розташовані на абсолютно жорсткій основі і діючих незалежно одна від одної (рис. 1)

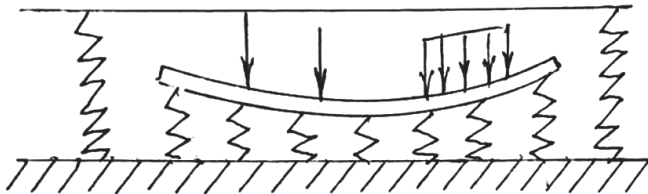


Рис. 1

Розглянемо балку постійного поперечного перерізу, яка розташована на пружній основі, що підлягає гіпотезі Вінклера. Розташуємо початок координат з лівого кінця балки і направимо вісь y вниз (рис. 2).

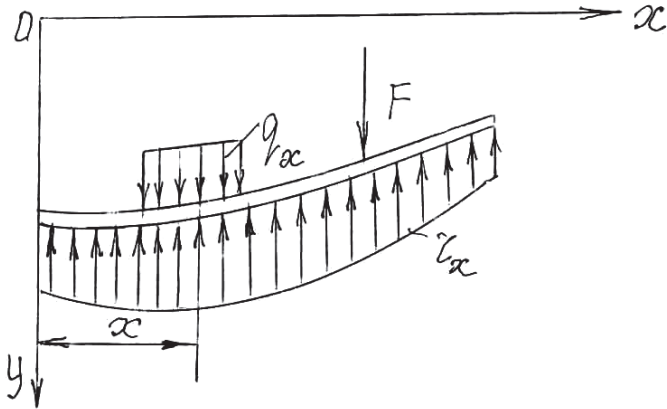


Рис. 2

У такому випадку диференційне рівняння зігнутої осі матиме вигляд:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_x, \quad (3)$$

диференціюємо це рівняння двічі – отримуємо:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -Q_x; \quad (4)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -P_x. \quad (5)$$

Сумарна інтенсивність розподіленого навантаження у довільному перерізі x буде дорівнювати:

$$P_x = q_x + r = q_x - Ky, \quad (6)$$

де y – просадка основи.

Тоді диференційне рівняння (5) набере вигляду:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{Ky}{EI} = \frac{q_x}{EI}. \quad (7)$$

Позначаємо:

$$\frac{K}{EI} = 4\beta^4; \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}, \quad (8)$$

де EI – згинальна жорсткість балки.

Тоді рівняння (7) набере виразу:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 y = \frac{q_x}{EI}. \quad (9)$$

Якщо інтенсивність розподіленого навантаження q_x буде лінійна, тоді рівняння (7) буде інше. Продиференціюємо рівняння (7), враховуючи що $q = f(x)$.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 \cdot 4EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 q_x}{dx^2}.$$

Інакше $(EIY'')'' + 4\beta^4 (EIY'') = q_x''$.

Відомо, що $EIY'' = M_x$, тоді матимемо:

$$\frac{d^4 M_x}{dx^4} + 4\beta^4 M_x = q_x'' \quad (10)$$

Далі обмежуємося випадком, коли $q_x'' = 0$. Тоді рівняння (10) має бути однорідним:

$$\frac{d^4 M_x}{dx^4} + 4\beta^4 M_x = 0 \quad (11)$$

Розрахунок цього рівняння, запропонований академіком О. М. Криловим, має вираз:

$$M_x = AY_1 + BY_2 + CY_3 + DY_4, \quad (12)$$

де Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 – функції А. Н. Крилова. Вони мають такий вигляд:

$$Y_1 = ch\beta x \cos \beta x;$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(ch\beta x \sin \beta x + sh\beta x \cos \beta x);$$

$$Y_3 = \frac{1}{2}sh\beta x \sin \beta x; \quad (13)$$

$$Y_4 = \frac{1}{4}(ch\beta x \sin \beta x - sh\beta x \cos \beta x).$$

Функції Крилова мають важливу властивість – повторюваність при диференціюванні. Інакше кажучи, при диференціюванні кожної наступної з них – отримується попередня. Ця властивість відображена в таблиці 2.

Таблиця 2

№	Функції та їхнє значення	Похідні функції по x			
		перша	друга	третя	четверта
1	$Y_1 = ch\beta x \cos \beta x$	$-4\beta Y_4$	$-4\beta^2 Y_3$	$-4\beta^3 Y_2$	$-4\beta^4 Y_1$
2	$Y_2 = \frac{1}{2}(ch\beta x \sin \beta x + sh\beta x \cos \beta x)$	βY_1	$-4\beta^2 Y_4$	$-4\beta^3 Y_3$	$-4\beta^4 Y_2$
3	$Y_3 = \frac{1}{2}sh\beta x \sin \beta x$	βY_2	$\beta^2 Y_1$	$-4\beta^3 Y_4$	$-4\beta^4 Y_3$
4	$Y_4 = \frac{1}{2}(ch\beta x \sin \beta x - sh\beta x \cos \beta x)$	βY_3	$\beta^2 Y_2$	$\beta^3 Y_1$	$-4\beta^4 Y_4$

Для визначення довільних сталих A, B, C, D використовуються граничні умови і диференційні залежності при згині. На їхній основі і знаходяться вирази для прогинів, кутів повороту, згинальних моментів і поперечних сил.

$$y_x = y_0 Y_1 + \frac{\varphi_0}{\beta} Y_2 - \frac{M_0}{EI\beta^2} Y_3 - \frac{Q_0}{EI\beta^3} Y_4 + Y^* ;$$

$$\varphi_x = \varphi_0 Y_1 - \frac{M_0}{EI\beta} Y_2 - \frac{Q_0}{EI\beta^2} Y_3 - 4y_0\beta Y_4 + \varphi^* ;$$
(14)

$$M_x = M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{\beta} Y_2 + 4EI\beta^2 y_0 Y_3 + 4EI\beta\varphi_0 Y_4 + M^* ;$$

$$Q_x = Q_0 Y_1 + 4EI\beta^3 y_0 Y_2 + 4EI\beta^2 \varphi_0 Y_3 - 4\beta M_0 Y_4 + Q^* ,$$

де y_0, φ_0, Q_0, M_0 – прогин, кут повороту, поперечна сила і згинальний момент на початку координат відповідно.

Граничні умови, пов'язані з закріпленнями кінців балки.

1. Кінець балки жорстко закріплений: $y = 0, \varphi = 0$.
2. Кінець балки вільний: $M_x = 0, Q_x = 0$.
3. Кінець балки шарнірно закріплений: $y = 0, M_x = 0$.

Визначимо частинні розв'язки для деяких видів навантаження.

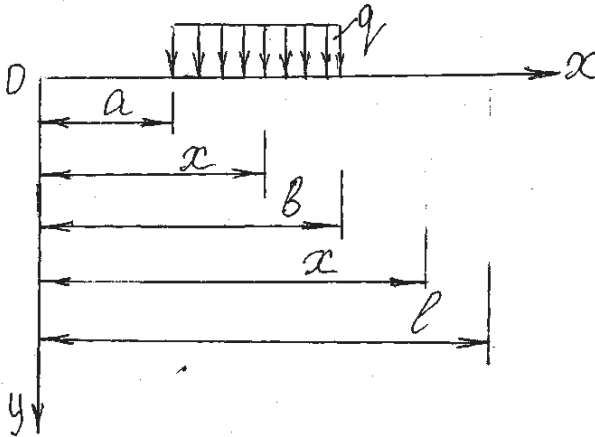


Рис. 3

1. Рівномірно розподілене навантаження на ділянці $a \leq x \leq b$ (рис. 3).

При $x < a, Y_x^* = 0$;

при $a \leq x \leq b$

$$Y_x^* = \frac{q}{K} [1 - Y_{1(x-a)}] ;$$
(15)

при $b \leq x \leq l$

$$Y_x^* = \frac{q}{K} [Y_{1(x-b)} - Y_{1(x-a)}] .$$

2. Зосереджена сила F на відстані c від початку координат (рис. 4).
 При $0 \leq x \leq c$, $Y_x^* = 0$;

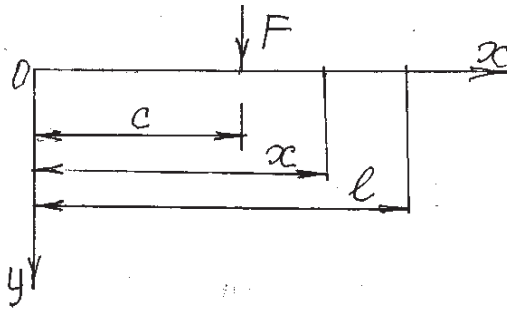


Рис. 4

при $c \leq x \leq l$

$$Y_2^* = \frac{F}{EI\beta^3} Y_{4(x-c)}. \quad (16)$$

3. Зосереджений момент M на відстані d від початку координат (рис. 5).

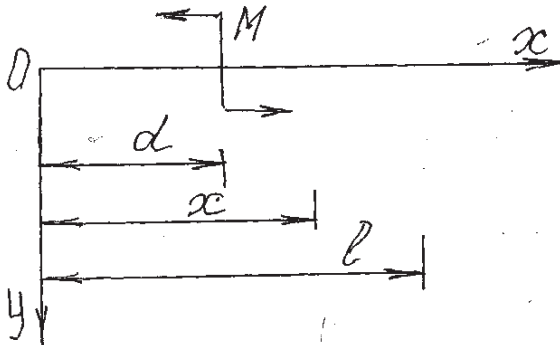


Рис. 5

При $0 \leq x \leq d$, $Y_x^* = 0$;

при $d \leq x \leq l$

$$Y_x^* = \frac{M}{EI\beta^2} Y_{3(x-d)}. \quad (17)$$

З урахуванням виразів (15, 16, 17) отримуємо загальні вирази для переміщень і внутрішніх зусиль у довільному перерізі балки на пружній основі.

$$\begin{aligned}
y_x &= y_0(Y_1)_x + \frac{\varphi_0}{\beta}(Y_2)_x - \frac{M_0}{EI\beta^2}(Y_3)_x - \frac{Q_0}{EI\beta^3}(Y_4)_x + \sum \frac{M}{EI\beta^2}(Y_3)_{x-d} + \\
&+ \sum \frac{F}{EI\beta^3}(Y_4)_{x-c} - \sum \frac{q}{4EI\beta^4}[(Y_1)_{x-a} - (Y_1)_{x-b}]; \\
\varphi_x &= \varphi_0(Y_1)_x - \frac{M_0}{EI\beta}(Y_2)_x - \frac{Q_0}{EI\beta^2}(Y_3)_x - 4\beta y_0(Y_4)_x + \sum \frac{M}{EI\beta}(Y_2)_{x-d} + \\
&+ \sum \frac{F}{EI\beta^2}(Y_3)_{x-c} + \sum \frac{q}{EI\beta^3}[(Y_4)_{x-a} - (Y_4)_{x-b}]; \\
M_x &= M_0(Y_1)_x + \frac{Q_0}{\beta}(Y_2)_x + 4EI\beta^2 y_0(Y_3)_x + 4EI\beta\varphi_0(Y_4)_x - \\
&- \sum M(Y_1)_{x-d} - \sum \frac{F}{\beta}(Y_2)_{x-c} - \sum \frac{q}{\beta^2}[(Y_3)_{x-a} - (Y_3)_{x-b}]; \\
Q_x &= Q_0(Y_1)_x + 4EI\beta^3 y_0(Y_2)_x + 4EI\beta^2\varphi_0(Y_3)_x - 4\beta M_0(Y_4)_x + \\
&+ \sum 4\beta M(Y_4)_{x-d} - \sum F(Y_1)_{x-c} - \sum \frac{q}{\beta}[(Y_2)_{x-a} - (Y_2)_{x-b}].
\end{aligned} \tag{18}$$

У цих формулах y_0 , φ_0 , Q_0 , M_0 – початкові параметри, а F , M , q – це навантаження, яке діє зліва від перерізу на відстані x від лівого кінця балки (рис. 6). Параметри a , b , c , d – це відстані від лівого кінця балки до перерізів, у яких прикладені зовнішні силові фактори q , F , M відповідно. Знаки цих зусиль треба обирати відповідно до рис. 6.

Інтенсивність реакції пружної основи в довільному перерізі x визначається за формулою (1).

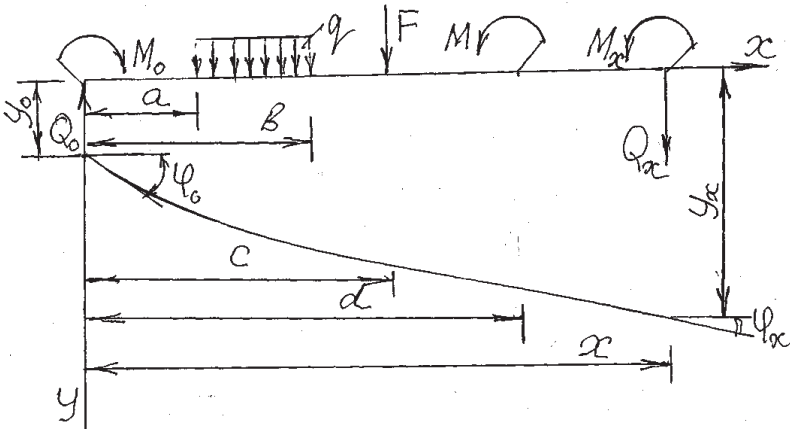


Рис. 6

За обчисленими ординатами переміщень і внутрішніх зусиль будуються відповідні епюри, які необхідні для перевірки балки на міцність і жорсткість.

Перевірку розрахунку балки треба проводити шляхом розглядання дотримання умов рівноваги усєї балки чи її відсіченої частини. У результаті таких перевірок мають дорівнювати нулю суми проєкцій активних і реактивних сил на вертикальну вісь і суми моментів указаних сил відносно довільної точки. Реакції пружної основи в рівняннях рівноваги можна вираховувати на підставі формул трапецій:

$$\sum Y = \int_x r_x dx = -\frac{\Delta x}{2}(r_0 + 2r_1 + 2r_2 + \dots + r_n); \quad (19)$$

$$\sum M_K = \int_x r_x x dx = \frac{\Delta x^2}{2}(q_0 n + 2q_1(n-1) + 2q_2(n-2) + \dots + 2q_{n-1});$$

де x – інтервал інтегрування, який дорівнює довжині балки чи певної її частини;

n – кількість однакових ділянок балки, на які розбивається інтервал інтегрування;

r_0, r_1, \dots, r_n – значення інтенсивності реакцій пружної основи для тих точок, які співпадають з границями інтервалів інтегрування (рис. 7).

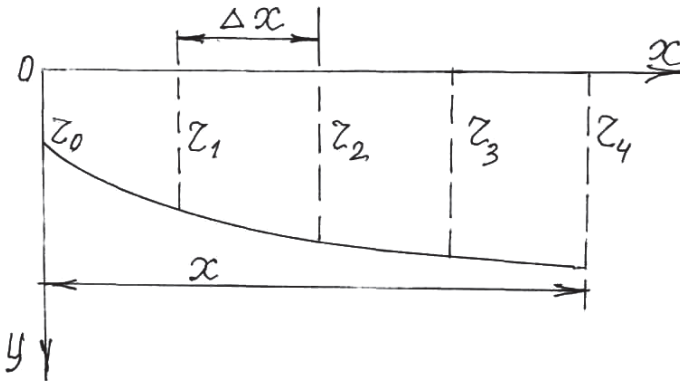
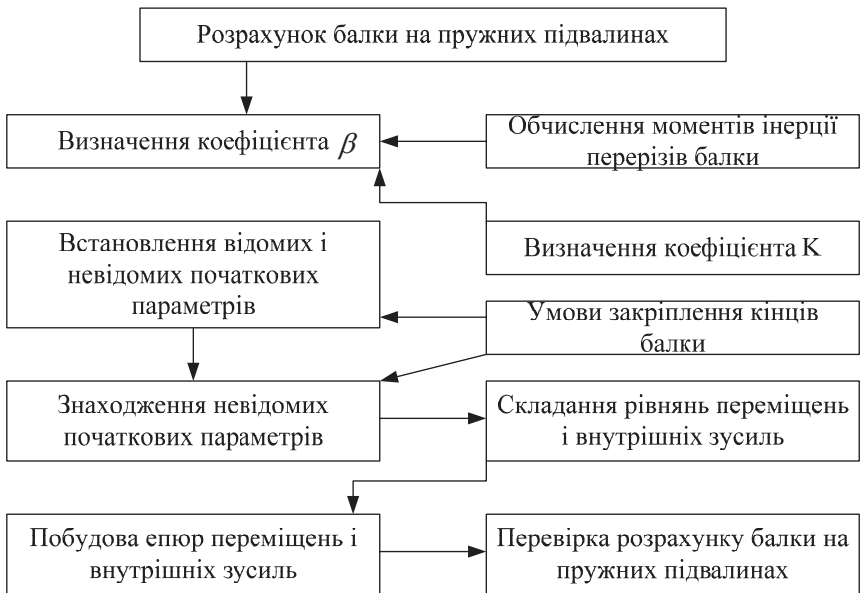


Рис. 7

Порядок розрахунку балки на пружних підвалинах можна звести до такої схеми.



Розглянемо реалізацію формул (18) на деяких прикладах.

2. ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКУ БАЛОК НА ПРУЖНИХ ПІДВАЛИНАХ

Приклад 1. Визначити переміщення і внутрішні зусилля в залізобетонній балці прямокутного перерізу на пружній основі (рис. 8). Вихідні дані:

$E = 0,36 \cdot 10^5$ МПа, $b = 0,3$ м, $h = 0,2$ м, $K_0 = 40$ МН/м³.

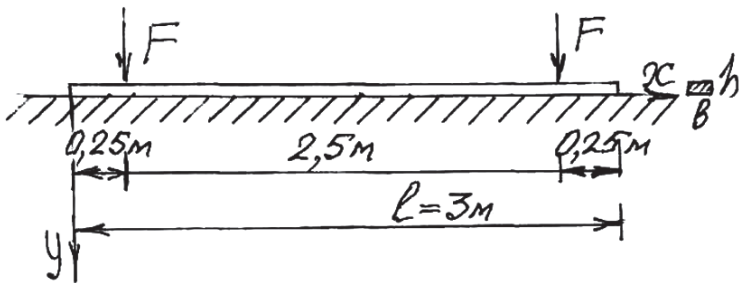


Рис. 8

Розв'язання задачі:

1. Визначаємо коефіцієнт пропорційності пружної основи:

$$K = K_0 b = 40 \cdot 10^6 \cdot 0,3 = 12 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 12 \text{ МН/м}^2.$$

2. Визначаємо згинальну жорсткість балки:

$$EI_Z = E \frac{bh^3}{12} = \frac{0,36 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 0,2^3}{12} = 7,2 \text{ МН/м}^2.$$

3. Обчислюємо коефіцієнт β :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI_Z}} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 10^6}{4 \cdot 7,2 \cdot 10^6}} = 0,8034 \frac{1}{\text{м}}.$$

Приведена довжина балки βl дорівнює:

$$\beta l = 0,8034 \cdot l = 2,41 \text{ м}.$$

Вона знаходиться у межах $1 < 2,41 \text{ м} < 5 \text{ м}$, тобто балку слід вважати короткою.

4. Визначаємо відомі і невідомі початкові параметри:

$$Q_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0.$$

5. Обчислюємо невідомі початкові параметри, використовуючи граничні умови:

$$M_{x=l} = 0, \quad Q_{x=l} = 0.$$

6. Обчислюємо гіперболо-тригонометричні функції при $x = 0$, $x = 0,25 \text{ м}$, $x = 0,75 \text{ м}$, $x = 1,25 \text{ м}$, $x = 1,75 \text{ м}$, $x = 2,25 \text{ м}$, $x = 2,75 \text{ м}$ і $x = 3,0 \text{ м}$.

Таблиця 3

№	$x, \text{ м}$	βx	$(Y_1)_x$	$(Y_2)_x$	$(Y_3)_x$	$(Y_4)_x$
0	0	0	1	0	0	0
1	0,25	0,20085	0,9997	0,2000	0,0200	0,00140
2	0,75	0,6025	0,9780	0,5999	0,1814	0,0368
3	1,25	1,0042	0,8352	0,9703	0,4995	0,1683
4	1,75	1,4059	0,3543	1,2234	0,9456	0,4545
5	2,25	1,8076	-0,7344	1,1734	1,4415	0,9347
6	2,75	2,2093	-2,7476	0,5097	1,8061	1,59598
7	3,00	2,4102	-4,1799	-0,17394	1,8445	1,9619

Складемо рівняння для визначення невідомих початкових параметрів: при $x = l$, $M_l = 0$; при $x = l$, $Q_l = 0$.

Використовуємо формули (18) і дані таблиці 3.

$$\left. \begin{aligned} 4EI\beta^2 C_{l,y_0} + 4EI\beta D_l \phi_0 - \frac{F}{\beta} [(Y_2)_{l=0,25 \text{ м}} + (Y_2)_{l=2,75 \text{ м}}] &= 0; \\ 4EI\beta^3 B_{l,y_0} + 4EI\beta^2 C_l \phi_0 - F [(Y_1)_{l=0,25 \text{ м}} + (Y_1)_{l=2,75 \text{ м}}] &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

У ці формули підставляємо відповідні гіперболо-тригонометричні функції (табл. 3) і розрахункові характеристики EI і β .

$$\left. \begin{aligned} 34,2874 \cdot 10^6 y_0 + 45,3936 \cdot 10^6 \cdot \phi_0 - 141,0904 \cdot 10^3 &= 0; \\ -2,59007 \cdot 10^6 y_0 + 34,2874 \cdot 10^6 \cdot \phi_0 + 279,6608 \cdot 10^3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь і знаходимо невідомі початкові параметри:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -7,1322 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \\ y_0 &= 13,5574 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Записуємо вирази y_x , ϕ_x , M_x , Q_x на окремих ділянках балки і будуємо відповідні епюри.

Ділянка перша ($0 \leq x \leq 0,25$ м)

$$y_x = y_0(Y_1)_x + \frac{\phi_0}{\beta}(Y_2)_x; \quad \phi_x = \phi_0(Y_1)_x - 4\beta y_0(Y_4)_x;$$

$$M_x = EI \cdot 4 \cdot \beta^2 y_0(Y_3)_x + 4EI\beta\phi_0(Y_4)_x;$$

$$Q_x = 4EI\beta^3 y_0(Y_2)_x + 4EI\beta^2\phi_0(Y_3)_x.$$

У граничних перерізах балки переміщення і внутрішні переміщення дорівнюють:

$$y_{x=0} = y_0; \quad \phi_{x=0} = \phi_0; \quad M_{x=0} = 0; \quad Q_{x=0} = 0.$$

$$y_{x=0,25 \text{ м}} = 13,5574 \cdot 10^{-3} \cdot 0,9997 - \frac{7,1322 \cdot 10^{-3}}{0,8034} \cdot 0,2 = 11,7778 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\begin{aligned} \phi_{x=0,25 \text{ м}} &= -7,1322 \cdot 10^{-3} \cdot 0,9997 - 4 \cdot 0,8034 \cdot 13,5544 \cdot 10^{-3} \cdot 0,00140 = \\ &= -7,1910 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{x=0,25 \text{ м}} &= 4 \cdot 7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034^2 (13,5574 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,02 + 4 \cdot 7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034 \cdot \\ &\cdot (-7,1322 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,0014 = 4,8094 \cdot 10^3 \text{ Нм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{x=0,25 \text{ м}} &= 4 \cdot 7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034^3 (13,5574 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,2 + 4 \cdot 7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034^2 \cdot \\ &\cdot (-7,1322 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,02 = 37,8427 \cdot 10^3 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Ділянка друга ($0,25 \text{ м} \leq x \leq 2,75$ м)

На цій ділянці зручно обчислення переміщень і внутрішніх зусиль у декількох перерізах звести в таблиці.

Прогини обчислюємо на підставі першої формули (18), яка після підстановки початкових параметрів і характеристик основи балки має вираз:

$$Y_x = 13,5574 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - \frac{7,1322 \cdot 10^{-3}}{0,8034} (Y_2)_x + \frac{160 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034^3} (Y_4)_{x=0,25 \text{ м}}$$

№	$x, \text{ м}$	βx	$13,5574 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x$	$-8,8664 \cdot 10^{-3} (Y_2)_x$	$42,85406 \cdot 10^{-3} (Y_4)_{x=0,25 \text{ м}}$	$Y_x, \text{ м}$
1	0,25	0,20085	$13,5533 \cdot 10^{-3}$	$-1,7792 \cdot 10^{-3}$	–	$11,7778 \cdot 10^{-3}$
2	0,75	0,6025	$13,2591 \cdot 10^{-3}$	$-5,3189 \cdot 10^{-3}$	$0,4551 \cdot 10^{-3}$	$8,4053 \cdot 10^{-3}$
3	1,25	1,0042	$11,3231 \cdot 10^{-3}$	$-8,6030 \cdot 10^{-3}$	$3,7003 \cdot 10^{-3}$	$6,4204 \cdot 10^{-3}$
4	1,75	1,4059	$4,8034 \cdot 10^{-3}$	$-10,8471 \cdot 10^{-3}$	$12,4641 \cdot 10^{-3}$	$6,4204 \cdot 10^{-3}$
5	2,25	1,8076	$-9,9566 \cdot 10^{-3}$	$-10,4038 \cdot 10^{-3}$	$28,7657 \cdot 10^{-3}$	$8,4054 \cdot 10^{-3}$
6	2,75	2,4102	$-37,2503 \cdot 10^{-3}$	$4,5192 \cdot 10^{-3}$	$53,5495 \cdot 10^{-3}$	$11,78 \cdot 10^{-3}$

Для обчислення кутів повороту скористаємося другою формулою (18):

$$\begin{aligned} \phi_x &= -7,1322 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - 43,56806 (Y_4)_x + \frac{160 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8434^2} (Y_3)_{x=0,25 \text{ м}} = \\ &= -7,1322 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - 43,56806 (Y_4)_x + 34,42895 (Y_3)_{x=0,25 \text{ м}} \end{aligned}$$

№	$x, \text{ м}$	βx	$-7,1322 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x$	$-43,56806 \cdot 10^{-3} (Y_4)_x$	$34,42895 \cdot 10^{-3} (Y_3)_{x=0,25 \text{ м}}$	$\phi_x, \text{ рад}$
1	0,25	0,20085	$-7,13006 \cdot 10^{-3}$	$-0,061 \cdot 10^{-3}$	–	$-7,19106 \cdot 10^{-3}$
2	0,75	0,6025	$-6,9753 \cdot 10^{-3}$	$-1,6032 \cdot 10^{-3}$	$2,7790 \cdot 10^{-3}$	$-5,7995 \cdot 10^{-3}$
3	1,25	1,0042	$-5,9568 \cdot 10^{-3}$	$-7,3325 \cdot 10^{-3}$	$11,0641 \cdot 10^{-3}$	$-2,2252 \cdot 10^{-3}$
4	1,75	1,4059	$-2,5268 \cdot 10^{-3}$	$-19,8017 \cdot 10^{-3}$	$24,5538 \cdot 10^{-3}$	$2,2252 \cdot 10^{-3}$
5	2,25	1,8076	$5,20579 \cdot 10^{-3}$	$-40,7230 \cdot 10^{-3}$	$41,2898 \cdot 10^{-3}$	$5,7992 \cdot 10^{-3}$
6	2,75	2,4102	$19,5964 \cdot 10^{-3}$	$-69,5362 \cdot 10^{-3}$	$57,1248 \cdot 10^{-3}$	$7,1910 \cdot 10^{-3}$

На другій ділянці згинальний момент має вираз (18):

$$M_x = 252,0186 \cdot 10^3 (Y_3)_x - 165,0243 \cdot 10^3 (Y_4)_x - \frac{160 \cdot 10^3}{0,8034} (Y_2)_{x-0,25 \text{ м}} =$$

$$= 252,0186 \cdot 10^3 (Y_3)_x - 165,0243 \cdot 10^3 (Y_4)_x - 199,1536 \cdot 10^3 (Y_2)_{x-0,25 \text{ м}}.$$

№	$x, \text{ м}$	βx	$252,0186 \cdot 10^3 (Y_3)_x$	$-165,0243 \cdot 10^3 (Y_4)_x$	$-199,1536 \cdot 10^3 (Y_2)_{x-0,25 \text{ м}}$	$M_x, \text{ Нм}$
1	0,25	0,20085	$5,0403 \cdot 10^3$	$-0,2358 \cdot 10^3$	–	$4,8045 \cdot 10^3$
2	0,75	0,6025	$45,7162 \cdot 10^3$	$-6,07304 \cdot 10^3$	$-79,978 \cdot 10^3$	$-40,3349 \cdot 10^3$
3	1,25	1,0042	$125,8833 \cdot 10^3$	$-27,7742 \cdot 10^3$	$-157,7776 \cdot 10^3$	$-59,6673 \cdot 10^3$
4	1,75	1,4059	$238,3088 \cdot 10^3$	$-75,0054 \cdot 10^3$	$-222,9707 \cdot 10^3$	$-59,6673 \cdot 10^3$
5	2,25	1,8076	$-363,3100 \cdot 10^3$	$-154,2520 \cdot 10^3$	$-249,3925 \cdot 10^3$	$-40,3345 \cdot 10^3$
6	2,75	2,4106	$-465,1709 \cdot 10^3$	$-263,3687 \cdot 10^3$	$-186,9976 \cdot 10^3$	$4,8045 \cdot 10^3$

Рівняння поперечної сили на другій ділянці має вираз (18):

$$Q_x = 202,4717 \cdot 10^3 (Y_2)_x - 132,5805 \cdot 10^3 (Y_3)_x - 160 \cdot 10^3 (Y_1)_{x-0,25 \text{ м}}.$$

№	$x, \text{ м}$	βx	$202,4717 \cdot 10^3 (Y_2)_x$	$-132,5805 \cdot 10^3 (Y_3)_x$	$-160 \cdot 10^3 (Y_1)_{x-0,25 \text{ м}}$	$Q_x, \text{ Н}$
1	0,25	0,20085	$40,4943 \cdot 10^3$	$-2,6516 \cdot 10^3$	$\frac{0}{-160 \cdot 10^3}$	$\frac{37,8427 \cdot 10^3}{-122,1573 \cdot 10^3}$
2	0,75	0,6025	$121,4816 \cdot 10^3$	$-24,0368 \cdot 10^3$	$-158,9883 \cdot 10^3$	$-61,5441 \cdot 10^3$
3	1,25	1,0042	$196,4583 \cdot 10^3$	$-66,2240 \cdot 10^3$	$-148,8845 \cdot 10^3$	$-18,6502 \cdot 10^3$
4	1,75	1,4059	$247,7138 \cdot 10^3$	$-125,3681 \cdot 10^3$	$-103,6855 \cdot 10^3$	$18,6503 \cdot 10^3$
5	2,25	1,8076	$237,5803 \cdot 10^3$	$-189,1096 \cdot 10^3$	$12,9937 \cdot 10^3$	$61,5543 \cdot 10^3$
6	2,75	2,4106	$103,1998 \cdot 10^3$	$-239,4536 \cdot 10^3$	$-258,4031 \cdot 10^3$	$122,150 \cdot 10^3$

Ділянка третя ($2,75 \text{ м} \leq x \leq 3,0 \text{ м}$)

$$Y_x = 13,5574 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - \frac{7,1322 \cdot 10^{-3}}{0,8034} (Y_2)_x + \frac{160 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034^3} [(Y_4)_{x-0,25 \text{ м}} + (Y_4)_{x-2,75 \text{ м}}];$$

$$Y_{x=2,75 \text{ м}} = 13,5574 \cdot 10^{-3} (-2,7476) - 8,8775 \cdot 10^{-3} (-0,509) + 42,85406 \cdot 10^{-3} (1,2496) = 11,78 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$Y_{x=3,0 \text{ м}} = 13,5574 \cdot 10^{-3} (-4,1794) - 8,8775 \cdot 10^{-3} (-0,17394) + 42,85406 \cdot 10^{-3} (1,59598 + 0,00140) = 13,5573 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\phi_x = -7,1322 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - 43,5681 \cdot 10^{-3} (Y_4)_x + \frac{160 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8034^2} [(Y_3)_{x-0,25 \text{ м}} + (Y_3)_{x-2,75 \text{ м}}] = -7,1322 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - 43,5681 (Y_4)_x \cdot 10^{-3} + 34,4290 \cdot 10^{-3} \cdot [(Y_3)_{x-0,25 \text{ м}} + (Y_3)_{x-2,75 \text{ м}}];$$

$$\phi_{x=2,75 \text{ м}} = -7,1322 \cdot 10^{-3} (-2,7476) - 43,5681 \cdot 10^{-3} (1,59598) + 34,429 \cdot 10^{-3} \cdot (1,6592) = -7,19 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\phi_{x=3,0 \text{ м}} = -7,1322 \cdot 10^{-3} (-4,1794) - 43,5681 (1,9619) + 34,429 \cdot 10^{-3} \cdot (1,8261) = 7,132 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$M_x = 252,0186 \cdot 10^3 (Y_3)_x + 165,0233 \cdot 10^3 (Y_4)_x - \frac{160 \cdot 10^3}{0,8034} [(Y_2)_{x-0,25 \text{ м}} + (Y_2)_{x-2,75 \text{ м}}] = 252,0186 \cdot 10^3 (Y_3)_x + 165,0233 \cdot 10^3 (Y_4)_x - 199,1536 \cdot 10^3 [(Y_2)_{x-0,25 \text{ м}} + (Y_2)_{x-2,75 \text{ м}}];$$

$$M_{x=2,75 \text{ м}} = 252,0186 \cdot 10^3 (1,8061) + 165,0233 (1,59598) - 199,1536 \cdot 10^3 (0,9390) = 4,8046 \cdot 10^3 \text{ Нм};$$

$$M_{x=3,0 \text{ м}} = 252,0186 \cdot 10^3 (1,8445) + 165,0233 (1,9619) - 199,1536 \cdot 10^3 (1,59598 + 0,00140) = 0;$$

$$Q_x = 202,4717 \cdot 10^3 (Y_2)_x - 132,5805 \cdot 10^3 (Y_3)_x - 160 \cdot 10^3 [(Y_1)_{x-0,25 \text{ м}} + (Y_1)_{x-2,75 \text{ м}}];$$

$$Q_{x=2,75 \text{ м}} = 202,4717 \cdot 10^3 (0,5097) - 132,5805 \cdot 10^3 (1,8061) + 160 \cdot 10^3 (0,61515 + 1) = -37,8458 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$Q_{x=3,0 \text{ м}} = 202,4717 \cdot 10^3 (-0,17394) - 132,5805 \cdot 10^3 (1,8445) - 160 \cdot 10^3 (-2,7476 + 0,9997) = 0.$$

Для обчислення реакцій пружної основи використовуємо формулу (1):

$$r_x = -KY_x.$$

На основі отриманих результатів на рис. 9 побудовані епюри y_x , ϕ_x , M_x , Q_x , r_x .

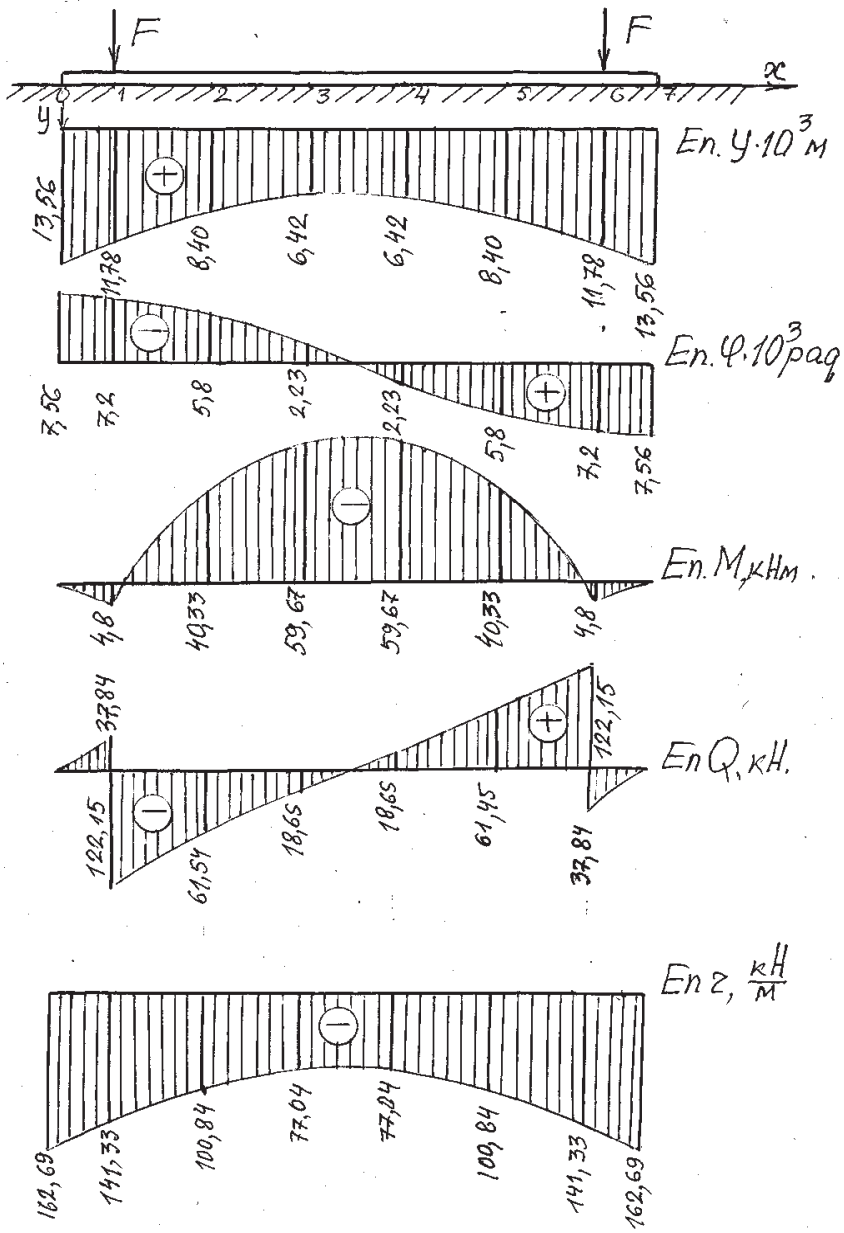


Рис. 9

Виконуємо перевірку розрахунку балки на підставі умов рівноваги (19).

$$\sum Y = 0; -\frac{162,69 + 141,93}{2} \cdot 0,25 \cdot 2 - \frac{0,5}{2} (141,33 \cdot 2 + 4 \cdot 100,84 + 4 \cdot 77,04) + 2 \cdot 160 \cong 0;$$

$$\sum M_6 = 0; \frac{0,5^2}{2} (141,33 \cdot 5 + 100,84 \cdot 2 \cdot 4 + 77,04 \cdot 2 \cdot 3 + 77,04 \cdot 2 \cdot 2 + 100,84 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{162,69 - 141,33}{2} \cdot 0,25 (2,75 - \frac{0,25}{3}) + 141,33 \cdot 0,25 (2,75 - \frac{0,25}{2}) - 160 \cdot 2,5 =$$

$$= 400,54 - 400 \cong 0. \text{ (Похибка } 0,13\%).$$

Приклад 2. Для балки квадратного поперечного перерізу $b=0,3$ і на пружній основі побудувати епюри переміщень і внутрішніх зусиль (рис. 10). Вихідні дані: $l=4$ м, $E=1 \cdot 10^5$ МПа, $K_0=120$ МН/м³, $F=80$ кН.

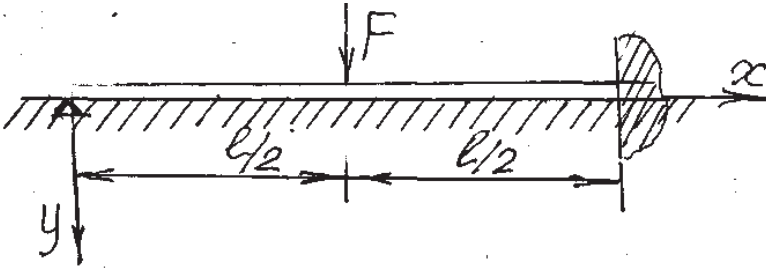


Рис. 10

Розв'язання задачі:

1. Визначаємо коефіцієнт пропорційності пружної основи:

$$K = K_0 b = 120 \cdot 0,3 = 36 \text{ МН/м}^2.$$

2. Обчислюємо згинальну жорсткість балки:

$$EI_z = E \cdot \frac{b^4}{12} = 1 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,3^4}{12} = 67,5 \text{ МНм}^2.$$

3. Обчислюємо коефіцієнт β :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI_z}} = \sqrt[4]{\frac{36}{4 \cdot 67,5}} = 0,6043 \frac{1}{\text{м}}.$$

Приведена довжина балки дорівнює:

$$\beta l = 0,6043 \cdot 4 = 2,42 \text{ м}.$$

$1 < \beta l < 5$, тому балку треба вважати короткою.

Обчислюємо потрібні для подальшого розрахунку гіперболо-тригонометричні функції у перерізах.

$$x = 0, \quad x = 0,25l, \quad x = 0,5l, \quad x = 0,75l, \quad x = l.$$

№ ТОЧОК	x, м	βx	$(Y_1)_x$	$(Y_2)_x$	$(Y_3)_x$	$(Y_4)_x$
0	0,0	0	1	0	0	0
1	1,0	0,6042	0,9777	0,6015	0,18241	0,03681
2	2,0	1,2048	0,64592	1,12256	0,71301	0,29135
3	3,0	1,8126	-0,75438	1,16882	1,44722	0,94213
4	4,0	2,4168	-4,2315	-0,21077	1,8420	1,9770

Визначаємо невідомі початкові параметри φ_0 і Q_0 із граничних умов:

$$\text{при } x = l, \quad \varphi_l = 0,$$

$$\text{при } x = l, \quad y_l = 0.$$

Використовуємо формули методу початкових параметрів (18) стосовно вказаних умов.

$$\left. \begin{aligned} y_l &= -\frac{\varphi_0}{0,6042} \cdot 0,21077 - \frac{Q_0}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^3} 1,9770 + \frac{80 \cdot 10^3}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^3} 0,29135 = 0; \\ \varphi_l &= -\varphi_0 \cdot 4,2315 - \frac{Q_0}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^2} 1,8420 + \frac{80 \cdot 10^3}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^2} 0,71301 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь і знаходимо:

$$Q_0 = 10,8568 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$\phi_0 = 0,35504 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Записуємо вирази Y_x , ϕ_x , M_x , Q_x і визначаємо їх у перерізах $x = 0$, $x = 1,0$ м, $x = 2,0$ м, $x = 3,0$ м, $x = 4,0$ м. Обчислення зводимо в таблиці.

Рівняння прогинів:

$$Y_x = 0,58762(Y_1)_x - 0,72922(Y_4)_x + \frac{80 \cdot 10^3}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^3} (Y_4)_{x-2l}.$$

№ ТОЧОК	x, м	$0,58762 \cdot$ $\cdot 10^{-3} (Y_1)_x$	$-0,72922 \cdot$ $\cdot 10^{-3} (Y_4)_x$	$5,37334 \cdot$ $\cdot 10^{-3} (Y_4)_{x-2m}$	y_x , Нм
0	0,0	0	0	0	0,0
1	1,0	$0,35345 \cdot 10^{-3}$	$-0,02684 \cdot 10^{-3}$	–	$0,32661 \cdot 10^{-3}$
2	2,0	$0,65964 \cdot 10^{-3}$	$-0,21246 \cdot 10^{-3}$	–	$0,44718 \cdot 10^{-3}$
3	3,0	$0,68682 \cdot 10^{-3}$	$-0,68738 \cdot 10^{-3}$	$0,19779 \cdot 10^{-3}$	$0,19722 \cdot 10^{-3}$
4	4,0	$-0,12385 \cdot 10^{-3}$	$-1,44167 \cdot 10^{-3}$	$1,56552 \cdot 10^{-3}$	0,0

Рівняння кутів повороту φ_x :

$$\varphi_x = 0,35504 \cdot 10^{-3} (Y_1)_x - \frac{10,8568 \cdot 10^3}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^2} (Y_3)_x + \frac{80 \cdot 10^3}{67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^2} (Y_3)_{x-2i} .$$

№ точок	$x, \text{ м}$	$0,35504 \cdot$ $\cdot 10^{-3} (Y_1)_x$	$-0,44059 \cdot$ $\cdot 10^{-3} (Y_3)_x$	$3,24657 \cdot$ $\cdot 10^{-3} (Y_3)_{x-2\text{м}}$	$\varphi_x, \text{ рад}$
0	0,0	$0,35504 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	$0,35504 \cdot 10^{-3}$
1	1,0	$0,34762 \cdot 10^{-3}$	$-0,08037 \cdot 10^{-3}$	–	$0,26725 \cdot 10^{-3}$
2	2,0	$0,23355 \cdot 10^{-3}$	$-0,31340 \cdot 10^{-3}$	–	$-0,07985 \cdot 10^{-3}$
3	3,0	$-0,26784 \cdot 10^{-3}$	$-0,63765 \cdot 10^{-3}$	$0,59225 \cdot 10^{-3}$	$-0,31328 \cdot 10^{-3}$
4	4,0	$-1,50235 \cdot 10^{-3}$	$-0,81028 \cdot 10^{-3}$	$2,31269 \cdot 10^{-3}$	0,0

Рівняння поперечної сили:

$$Q_x = 10,8568 \cdot 10^3 (Y_1)_x + 4 \cdot 67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^2 \cdot 0,35504 \cdot 10^{-3} (Y_3)_x - 80 \cdot 10^3 (Y_1)_{x-2\text{м}} .$$

№ точок	$x, \text{ м}$	$10,8568 \cdot$ $\cdot 10^3 (Y_1)_x$	$34,99472 \cdot$ $\cdot 10^3 (Y_3)_x$	$-80 \cdot$ $\cdot 10^3 (Y_1)_{x-2\text{м}}$	$Q_x, \text{ Н}$
0	0,0	$10,8568 \cdot 10^3$	0	–	$10,8568 \cdot 10^3$
1	1,0	$10,62989 \cdot 10^3$	$6,44253 \cdot 10^3$	–	$17,1322 \cdot 10^3$
2	2,0	$7,01015 \cdot 10^3$	$24,9278 \cdot 10^3$	–	$\frac{31,93795 \cdot 10^3}{-48,06205 \cdot 10^3}$
3	3,0	$-80,3928 \cdot 10^3$	$50,64681 \cdot 10^3$	$-78,328 \cdot 10^3$	$-35,72047 \cdot 10^3$
4	4,0	$-45,9405 \cdot 10^3$	$64,35879 \cdot 10^3$	$-52,6248 \cdot 10^3$	$-34,2065 \cdot 10^3$

Рівняння згинального моменту:

$$M_x = \frac{10,8568 \cdot 10^3}{0,6042} (Y_2)_x + 4 \cdot 67,5 \cdot 10^6 \cdot 0,6042^2 \cdot 0,35504 \cdot 10^{-3} (Y_4)_x - \frac{80 \cdot 10^3}{0,6042} (Y_2)_{x-2m}$$

№ точок	$x, \text{ м}$	$17,96888 \cdot$ $\cdot 10^3 (Y_2)_x$	$57,91909 \cdot$ $\cdot 10^3 (Y_4)_x$	$-132,40649 \cdot$ $\cdot 10^3 (Y_2)_{x-2m}$	$M_x, \text{ Нм}$
0	0,0	0	0	0	0
1	1,0	$10,80828 \cdot 10^3$	$2,1320 \cdot 10^3$	–	$12,93828 \cdot 10^3$
2	2,0	$20,171146 \cdot 10^3$	$16,87473 \cdot 10^3$	–	$37,0459 \cdot 10^3$
3	3,0	$21,00239 \cdot 10^3$	$54,77756 \cdot 10^3$	$-79,6425 \cdot 10^3$	$-3,86255 \cdot 10^3$
4	4,0	$-3,7873 \cdot 10^3$	$114,50662 \cdot 10^3$	$-148,63423 \cdot 10^3$	$-37,9149 \cdot 10^3$

Виконуємо статичну перевірку розрахунку балки.

$$\sum Y = 0, \quad Q_0 + \sum_0^l r_x + Q_l - F = 0.$$

$$10,8568 \cdot 10^3 + \frac{1 \cdot 36 \cdot 10^6}{2} (0 + 2 \cdot 0,32661 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0,44718 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0,19722 \cdot 10^{-3}) + 34,2065 \cdot 10^3 - 80 \cdot 10^3 = 0.$$

Епюри вище розрахованих: Y_x , φ_x , M_x , Q_x , r_x наведено на рис. 11.

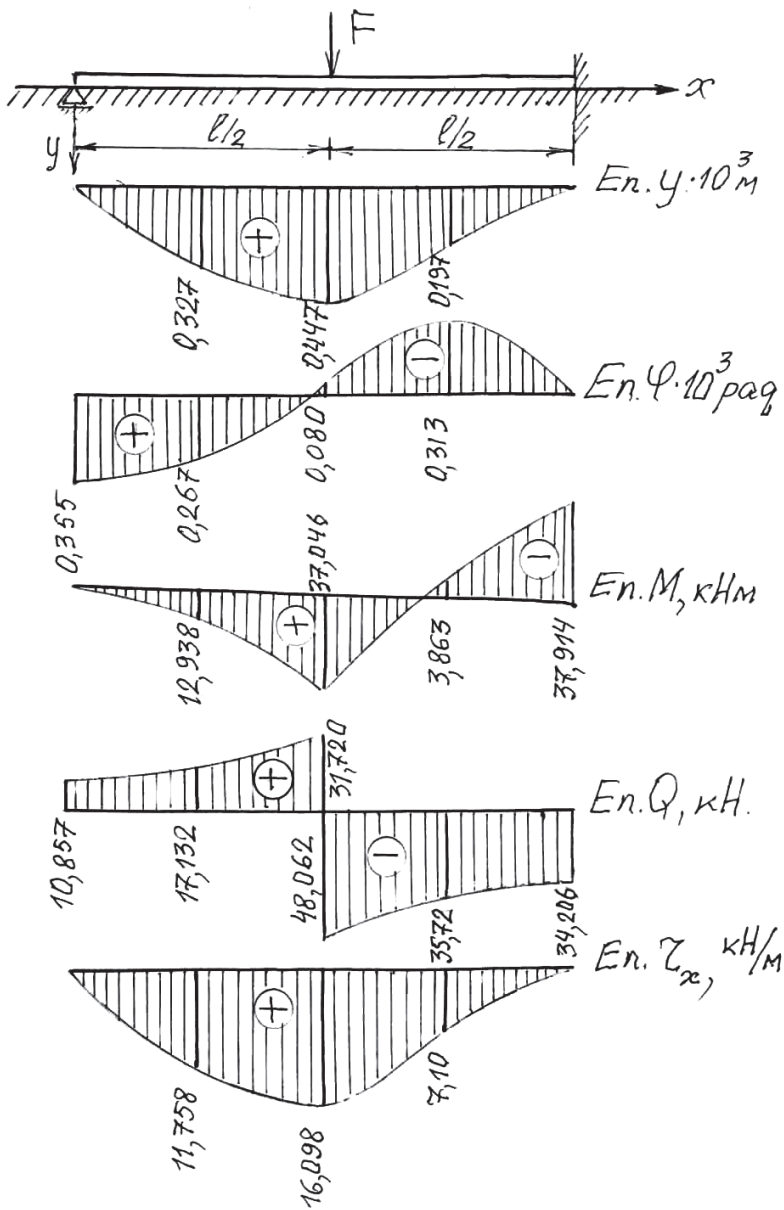


Рис. 11

Приклад 3. Побудувати епюри переміщень і внутрішніх зусиль для балки на пружній основі прямокутного перерізу $b \times h$. Вихідні дані: $l = 6$ м, $b = 0,4$ м, $h = 0,3$ м, коефіцієнт піддатливості основи $K_0 = 150$ МН/м³, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $q = 40$ кН/м.

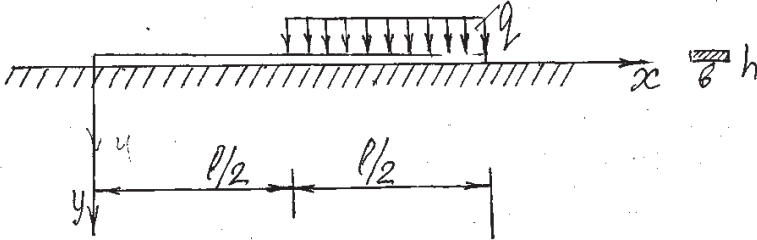


Рис. 12

Розв'язання задачі:

1. Визначаємо коефіцієнт пропорційності пружної основи:

$$K = K_0 b = 150 \cdot 0,4 = 60 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2}.$$

2. Визначаємо жорсткість балки при згині

$$EI_z = 1 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,4 \cdot 0,3^3}{12} = 90 \text{ МНм}^2.$$

3. Обчислюємо коефіцієнт β :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI_z}} = \sqrt[4]{\frac{60}{4 \cdot 90}} = 0,6389 \frac{1}{\text{м}}.$$

Приведена довжина балки дорівнює:

$$\beta l = 0,6389 \cdot 6 = 3,833 \text{ м} < 5.$$

Балку треба розглядати як коротку.

4. З'ясуємо відомі й невідомі початкові параметри.

Відомі $y_0 = 0$; $M_0 = 0$. Невідомі Q_0 ; φ_0 .

Визначаємо необхідні гіперболо-тригонометричні функції в перерізах при $x = 0$, $x = 1,5$ м, $x = 3,0$ м, $x = 4,5$ м, $x = 6,0$ м.

№	$x, \text{ м}$	βx	$(Y_1)_x$	$(Y_2)_x$	$(Y_3)_x$	$(Y_4)_x$
0	0	0	1	0	0	0
1	1,5	0,9584	$0,85959 \cdot 10^{-3}$	$0,93146 \cdot 10^{-3}$	$0,455003 \cdot 10^{-3}$	$0,14639 \cdot 10^{-3}$
2	3,0	1,9167	$1,17722 \cdot 10^{-3}$	$1,06853 \cdot 10^{-3}$	$1,56442 \cdot 10^{-3}$	$1,0087 \cdot 10^{-3}$
3	4,5	2,8751	$-8,576366 \cdot 10^{-3}$	$-3,09091 \cdot 10^{-3}$	$1,16342 \cdot 10^{-3}$	$2,71634 \cdot 10^{-3}$
4	6,0	3,8334	$-17,8049 \cdot 10^{-3}$	$-16,26891 \cdot 10^{-3}$	$-7,36777 \cdot 10^{-3}$	$0,75523 \cdot 10^{-3}$

Для визначення невідомих початкових параметрів скористаємося граничними умовами.

При $x=l$; $Q_l = 0$;

при $x=l$; $M_l = 0$.

$$-17,80493Q_0 - 4 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389^2 \cdot 7,36777\phi_0 - \frac{40 \cdot 10^3}{0,6389}[1,06726] = 0;$$

$$-\frac{16,26891}{0,6389}Q_0 + 4 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389 \cdot 0,75143 \cdot \phi_0 - \frac{40 \cdot 10^3}{0,6389^2}[1,56442] = 0.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$-17,80493Q_0 - 1082,69053 \cdot 10^6 \phi_0 - 66,81859 \cdot 10^3 = 0;$$

$$-25,46394Q_0 + 172,83191 \cdot 10^6 \phi_0 - 153,30191 \cdot 10^3.$$

Розв'язання цієї системи дорівнює:

$$\phi_0 = 0,033546 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

$$Q_0 = -5,79267 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Складаємо вирази для переміщень і внутрішніх зусиль, і визначаємо їх у окремих перерізах для подальших побудов відповідних епюр:

На першій ділянці $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$,

$$Y_x = \frac{0,033546 \cdot 10^{-3}}{0,6389}(Y_2)_x + \frac{5,79267 \cdot 10^3}{90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389^3}(Y_4)_x.$$

На другій ділянці $0,5l \leq x \leq l$.

Розрахунки ведемо в перерізах при $x=0$, $x=1,5 \text{ м}$, $x=3 \text{ м}$, $x=4,5 \text{ м}$, $x=6 \text{ м}$.

Прогини:

$$Y_x = 0,0525(Y_2)_x \cdot 10^{-3} + 0,24679 \cdot 10^{-3}(Y_4)_x - \frac{40 \cdot 10^3}{4 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 0,63894} (1 - (Y_1)_{x-0,5l}).$$

№ точок	$x, \text{ м}$	$0,0525 \cdot$ $\cdot 10^{-3}(Y_2)_x$	$0,24679 \cdot$ $\cdot 10^{-3}(Y_4)_x$	$0,6667 \cdot$ $\cdot 10^{-3}(1 - Y_1)_{x-0,5l}$	$Y_x, \text{ м}$
0	0	0	0	–	0
1	1,5	$0,0489 \cdot 10^{-3}$	$0,03605 \cdot 10^{-3}$	–	$0,0849 \cdot 10^{-3}$
2	3,0	$0,05603 \cdot 10^{-3}$	0,27115	–	$0,32718 \cdot 10^{-3}$
3	4,5	$-0,16175 \cdot 10^{-3}$	0,670365	0,09310	$0,60161 \cdot 10^{-3}$
4	6,0	$-0,85412 \cdot 10^{-3}$	0,186397	1,44854	$0,77717 \cdot 10^{-3}$

Кути повороту:

$$\phi_x = 0,033546 \cdot 10^{-3}(Y_1)_x + \frac{5,79267 \cdot 10^3}{90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389^2}(Y_3)_x + \frac{40 \cdot 10^3}{90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389^3}(Y_4)_{x-3\text{м}}.$$

№ точок	$x, \text{ м}$	$0,033546 \cdot$ $\cdot 10^{-3}(Y_1)_x$	$0,15768 \cdot$ $\cdot 10^{-3}(Y_3)_x$	$1,704193 \cdot$ $\cdot 10^{-3}(Y_4)_{x-3\text{м}}$	$\phi_x, \text{ рад}$
0	0	$0,033546 \cdot 10^{-3}$	0	0	$0,033546 \cdot 10^{-3}$
1	1,5	$0,028836 \cdot 10^{-3}$	$0,07174 \cdot 10^{-3}$	–	$0,10058 \cdot 10^{-3}$
2	3,0	$-0,03932 \cdot 10^{-3}$	$0,24668 \cdot 10^{-3}$	–	$0,20736 \cdot 10^{-3}$
3	4,5	$-0,28770 \cdot 10^{-3}$	$0,18345 \cdot 10^{-3}$	$0,24948 \cdot 10^{-3}$	$0,14523 \cdot 10^{-3}$
4	6,0	$-0,59726 \cdot 10^{-3}$	$-1,16175 \cdot 10^{-3}$	$1,87240 \cdot 10^{-3}$	$0,11339 \cdot 10^{-3}$

Згинальні моменти:

$$M_x = -\frac{5,79267 \cdot 10^3}{0,6389}(Y_2)_x - 4 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389 \cdot 0,033546 \cdot 10^{-3}(Y_4)_x - \frac{40 \cdot 10^3}{0,6389^2}(Y_3)_{x-0,5l}.$$

№ точок	$x, \text{ м}$	$-9,06663 \cdot$ $\cdot 10^3(Y_2)_x$	$7,71571 \cdot$ $\cdot 10^3(Y_4)_x$	$-97,99282 \cdot$ $\cdot 10^3(Y_3)_{x-0,5\text{м}}$	$M_x, \text{ Нм}$
0	0	0	0	–	0
1	1,5	$-8,4452 \cdot 10^3$	$1,1295 \cdot 10^3$	–	$-7,3153 \cdot 10^3$
2	3,0	$-9,68797 \cdot 10^3$	$7,78284 \cdot 10^3$	–	$-1,9051 \cdot 10^3$
3	4,5	$28,02414 \cdot 10^3$	$20,9585 \cdot 10^3$	$-44,5870 \cdot 10^3$	$4,3956 \cdot 10^3$
4	6,0	$147,47481 \cdot 10^3$	$5,8271 \cdot 10^3$	$-153,30191 \cdot 10^3$	0

Поперечні сили:

$$Q_x = -5,79267 \cdot 10^3 (Y_1)_x + 4 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot 0,6389^2 \cdot 0,033546 \cdot 10^{-3} (Y_3)_x - \frac{40 \cdot 10^3}{0,6389} (Y_2)_{x=0,5l}.$$

№ точок	x, м	$-5,79267 \cdot 10^3 (Y_1)_x$	$4,92957 \cdot 10^3 (Y_3)_x$	$-62,60761 \cdot 10^3 (Y_2)_{x=0,5M}$	$Q_x, \text{ Н}$
0	0	$-5,79267 \cdot 10^3$	0	–	$-5,79267 \cdot 10^3$
1	1,5	$-4,97932 \cdot 10^3$	$2,24297 \cdot 10^3$	–	$-2,73635 \cdot 10^3$
2	3,0	$6,790284 \cdot 10^3$	$7,71192 \cdot 10^3$	–	$14,502204 \cdot 10^3$
3	4,5	$49,6800 \cdot 10^3$	$5,73516 \cdot 10^3$	$-58,31648 \cdot 10^3$	$-2,90124 \cdot 10^3$
4	6,0	$103,13808 \cdot 10^3$	$-36,31994 \cdot 10^3$	$-66,8181 \cdot 10^3$	0,0

Закономірність зміни реактивних зусиль дорівнює (1):

$$r_x = KY_x.$$

Перевіряємо розрахунки:

$$\sum Y = 0; \quad -Q_0 + \sum_0^l r_x + q \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

$$5,79267 \cdot 10^3 - \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^6}{2} (0 + 0,0843 \cdot 2 + 0,32718 \cdot 2 + 0,60171 \cdot 2 + 0,77717) +$$

$$+ 40 \cdot \frac{6}{2} = (-126,16 + 125,79267) 10^3 \approx 0$$

(похибка 0,29 %).

$$\sum M_4 = 0 - 5,79267 \cdot 6 - 40 \cdot 3 \cdot 1,5 + \frac{1,5^2 \cdot 60}{2} (0,0843 \cdot 3 + 0,32718 \cdot 2 \cdot 2 + 0,60171 \cdot 2) =$$

$$= -185,79267 + 186,4402 \approx 0$$

(похибка 0,44 %).

Епюри визначених Y_x ; φ_x ; M_x ; Q_x ; r_x наведено на рис. 13.

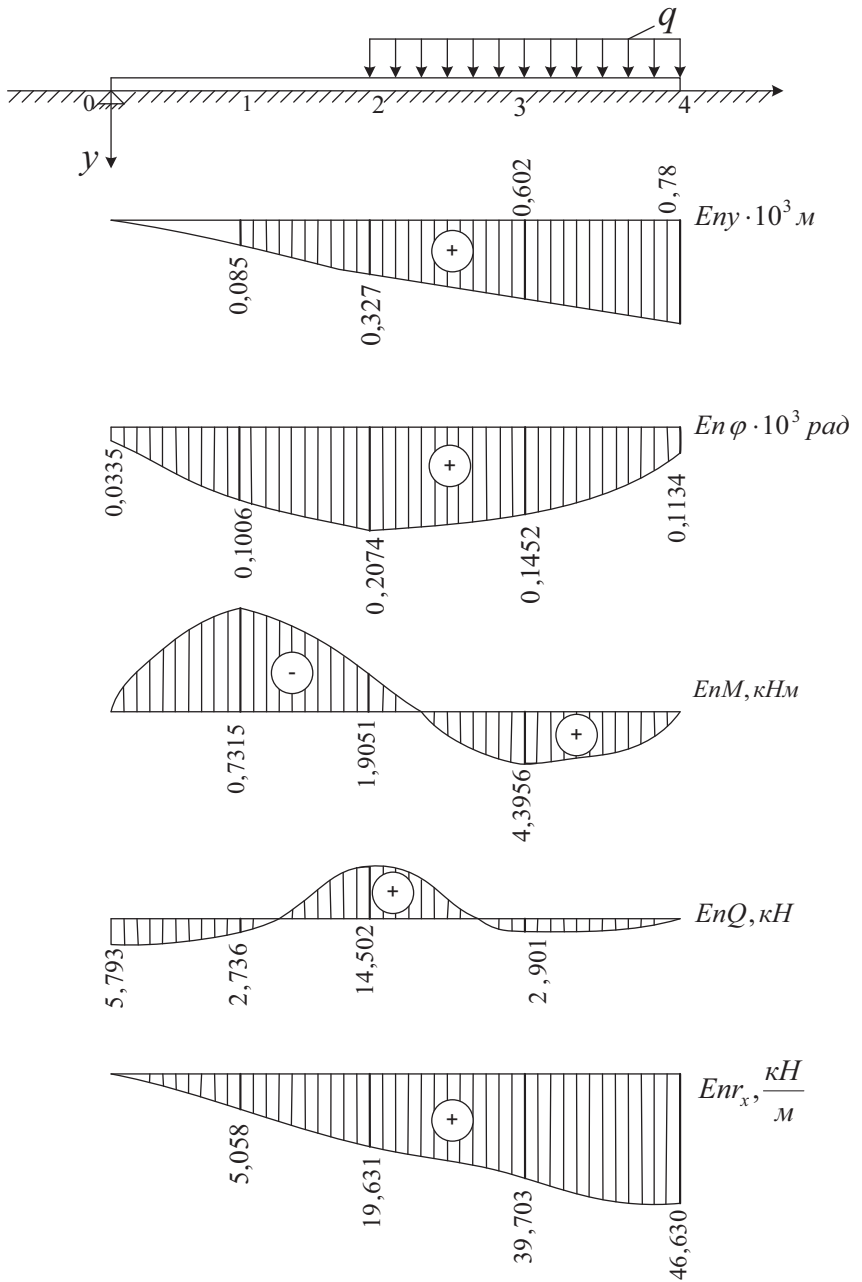


Рис. 13

Додатки

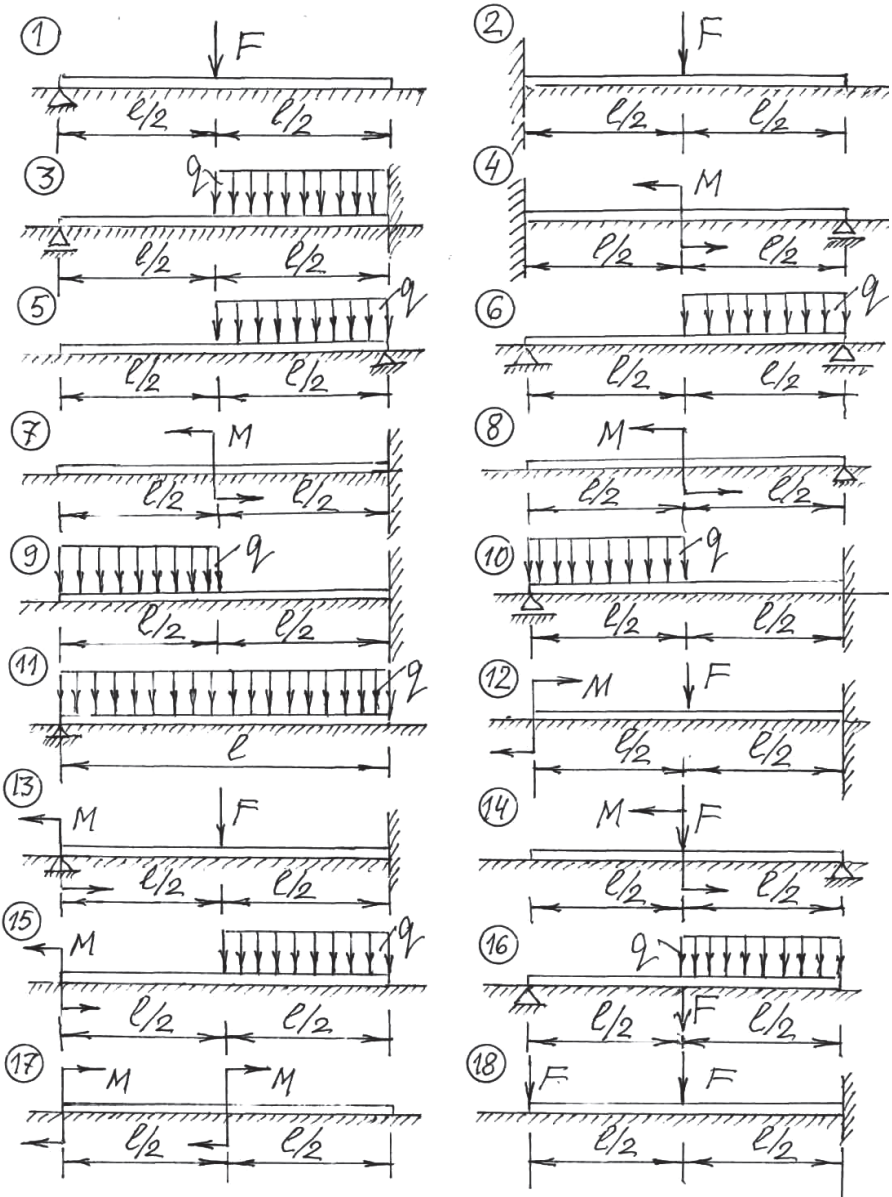
Додаток 1

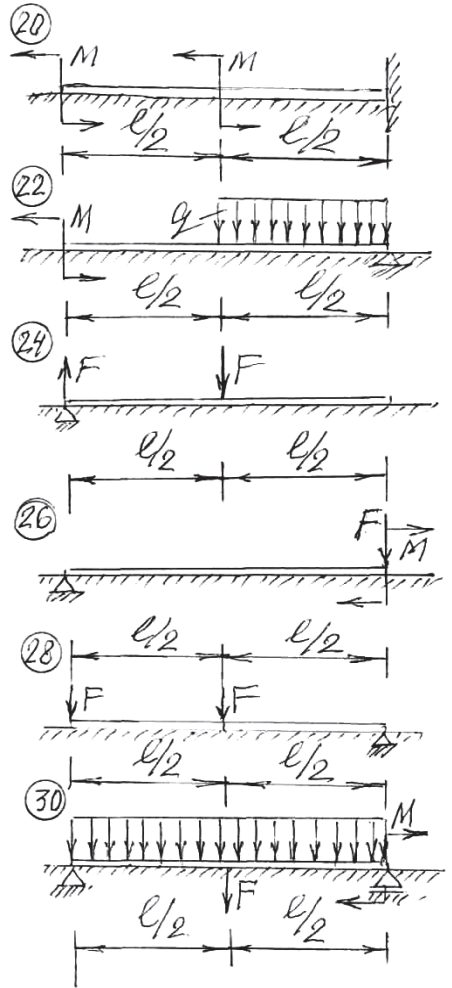
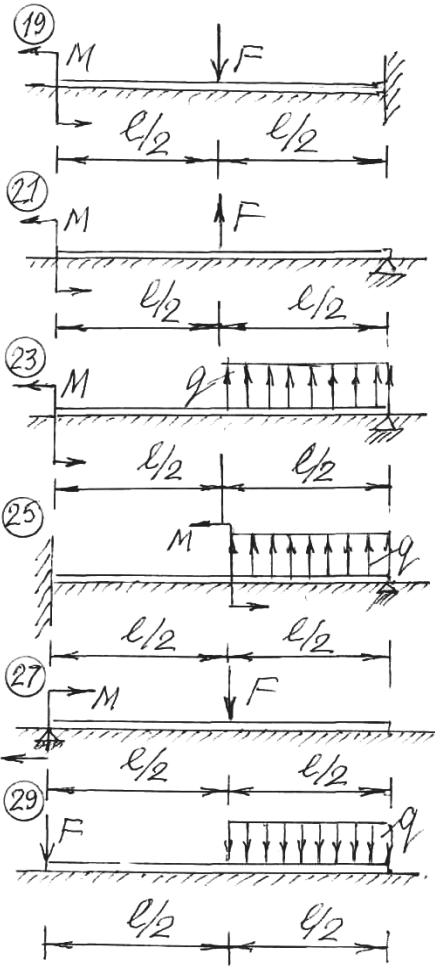
Варіанти індивідуальних задач

ряд	Цифри шифру							
	$b, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$l, \text{ м}$	$K_0, \text{ МН/м}^3$	$E, \text{ МН/м}^2$	$M, \text{ кНм}$	$F, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$
0	0,3	0,20	4,0	100	$0,8 \cdot 10^5$	80	50	40
1	0,35	0,22	4,3	200	$0,82 \cdot 10^5$	85	56	44
2	0,40	0,24	4,4	250	$0,84 \cdot 10^5$	90	60	48
3	0,42	0,26	4,6	300	$0,86 \cdot 10^5$	95	64	50
4	0,44	0,28	4,7	350	$0,88 \cdot 10^5$	100	66	30
5	0,45	0,30	4,8	150	$0,9 \cdot 10^5$	105	70	34
6	0,32	0,32	4,9	180	$0,92 \cdot 10^5$	110	72	36
7	0,34	0,25	5,0	220	$0,94 \cdot 10^5$	115	74	38
8	0,36	0,27	5,2	240	$0,96 \cdot 10^5$	120	76	42
9	0,38	0,29	5,4	260	$1 \cdot 10^5$	130	80	46
шифр	α	β	γ	α	β	γ	α	β

Примітки. Шифр складається з трьох цифр, що відповідають останнім цифрам залікової книжки. Схема завдання надається викладачем.

Схеми балок





Методика інтерполяції

а) Лінійна інтерполяція

Число	Функція
Попередня x_0	y_0
Задана x	y_x
Наступна $x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta$

Невідома функція дорівнює:

$$y_x = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta.$$

б) Квадратна інтерполяція

Число	Функція
$x_{-1} = x_0 - h$	$y_{-1} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Delta_{-1} = y_0 - y_{-1}$
x_0	
Задана x	$y_x \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Delta_0 = y_1 - y_0$
$x_1 = x_0 + h$	
$x_2 = x_0 + 2h$	$y_2 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Delta_1 = y_2 - y_1$

Невідома функція $Y_x = Y_0 + K\Delta_0 - K_1(\Delta_1 - \Delta_{-1})$,

$$\text{де } K = \frac{x - x_0}{h}; \quad K_1 = \frac{K(1 - K)}{4}.$$

Таблиця функцій акад. О. М. Крилова для розрахунку балок сталого перерізу на пружній основі

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
0,005	1,0	0,005	0,00002	0,00000
0,010	1,0000	0,0100	0,00005	0,00000
0,015	1,0000	0,0150	0,00012	0,00000
0,020	1,0000	0,0200	0,00020	0,00000
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,15	0,9999	0,1500	0,0113	0,0006
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,25	0,9993	0,2500	0,0313	0,0026
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,35	0,9975	0,3498	0,0613	0,0072
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,45	0,9932	0,4494	0,1012	0,0152
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,55	0,9847	0,5484	0,1511	0,0277
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,65	0,9703	0,6462	0,2109	0,0457
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,75	0,9473	0,7421	0,2803	0,0702
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,85	0,9131	0,8352	0,3592	0,1021
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1,05	0,7980	1,0076	0,5438	0,1918
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,15	0,7097	1,0831	0,6484	0,2514
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,25	0,5955	1,1486	0,7601	0,3218
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,35	0,4508	1,2012	0,8777	0,4036
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,45	0,2710	1,2376	0,9998	0,4974
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
1,51	0,1442	1,2501	1,0745	0,5597
1,52	0,1216	1,2515	1,0870	0,5705
1,53	0,0986	1,2526	1,0995	0,5814

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1,54	0,0746	1,2534	1,1121	0,5925
1,55	0,0612	1,2541	1,1246	0,6036
1,56	0,0268	1,2545	1,1371	0,6149
1,57	0,0020	1,2546	1,1497	0,6264
$\pi/2$	0,0	1,2546	1,1507	0,6273
1,58	-0,0233	1,2545	1,1622	0,6380
1,59	-0,0490	1,2542	1,1748	0,6496
1,60	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,61	-0,1019	1,2526	1,1998	0,6734
1,62	-0,1291	1,2515	1,2124	0,6854
1,63	-0,1568	1,2501	1,2249	0,6976
1,64	-0,1849	1,2484	1,2374	0,7099
1,65	-0,2136	1,2464	1,2498	0,7224
1,70	-0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,75	-0,5284	1,2097	1,3727	0,8535
1,80	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,85	-0,8980	1,1389	1,4906	0,9968
1,90	-1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
1,95	-1,3273	1,0281	1,5993	1,1514
2,00	-1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,05	-1,8205	0,8713	1,6947	1,3162
2,10	-2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,15	-2,3814	0,6618	1,7718	1,4897
2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,25	-3,0131	0,3926	1,8251	1,6698
2,30	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,31	-3,4270	0,1996	1,8430	1,7798
2,32	-3,4986	0,1649	1,8448	1,7983
2,33	-3,5708	0,1296	1,8462	1,8167
2,34	-3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
2,35	-3,7177	0,0567	1,8481	1,8537
2,36	-3,7922	0,0191	1,8485	1,8722
2,37	-3,8675	-0,0192	1,8485	1,8906
2,38	-3,9435	-0,0583	1,8481	1,9091
2,39	-4,0202	-0,0981	1,8473	1,9276
2,40	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9461
2,45	-4,4961	-0,3534	1,8339	2,0381
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8105	2,1293
2,55	-5,3477	-0,8450	1,7747	2,2190
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
2,65	-6,2701	-1,4253	1,6620	2,3913
2,70	-6,7565	-1,7509	1,5827	2,4725
2,75	-7,2588	-2,1012	1,4865	2,5493
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,85	-8,3067	-2,8790	1,2383	2,6862
2,90	-8,8471	-3,3079	1,0838	2,7443
2,95	-9,4039	-3,7642	0,9071	2,7942
3,00	-9,9669	-4,2485	0,7069	2,8346
3,05	-10,5317	-4,7611	0,4817	2,8644
3,10	-11,1119	-5,3023	0,2303	2,8823
3,11	-11,2272	-5,4139	0,1767	2,8844
3,12	-11,3427	-5,5268	0,1220	2,8859
3,13	-11,4580	-5,6408	0,0662	2,8868
3,14	-11,5736	-5,7560	0,0092	2,8872
π	-11,5919	-5,7744	0,0	2,8872
3,15	-11,6890	-5,8722	-0,0490	2,8870
3,16	-11,8045	-5,9898	-0,1083	2,8862
3,17	-11,9200	-6,1084	-0,1688	2,8848
3,18	-12,0353	-6,2281	-0,2305	2,8828
3,19	-12,1506	-6,3491	-0,2934	2,8802
3,20	-12,2656	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,25	-12,8388	-7,0988	-0,6966	2,8507
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,35	-13,9601	-8,4390	-1,4725	2,7434
3,40	-14,5008	-9,1507	-1,9121	2,6589
3,45	-15,0222	-9,8888	-2,3880	2,5516
3,50	-15,5200	-10,6525	-2,9014	2,4195
3,55	-15,9881	-11,4403	-3,4537	2,2608
3,60	-16,4218	-12,2508	-4,0459	2,0735
3,65	-16,8155	-13,0819	-4,6791	1,8555
3,70	-17,1622	-13,9315	-5,3544	1,6049
3,75	-17,4552	-14,7972	-6,0725	1,3194
3,80	-17,6875	-15,6761	-6,8343	0,9969
3,85	-17,8513	-16,5649	-7,6403	0,6352
3,90	-17,9387	-17,4599	-8,4909	0,2321
3,91	-17,9464	-17,6393	-8,6664	0,1464
3,92	-17,9504	-17,8188	-8,8437	0,0587
3,93	-17,9511	-17,9983	-9,0227	-0,0305
3,94	-17,9480	-18,1779	-9,2037	-0,1217
3,95	-17,9412	-18,3572	-9,3863	-0,2147

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
3,96	-17,9307	-18,5366	-9,5708	-0,3095
3,97	-17,9165	-18,7159	-9,7571	-0,4061
3,98	-17,8983	-18,8949	-9,9451	-0,5046
3,99	-17,8761	-19,0738	-10,1350	-0,6050
4,00	-17,8498	-19,2524	-10,3265	-0,7073
4,05	-17,6551	-20,1406	-11,3115	-1,2481
4,10	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8395
4,15	-16,9160	-21,8731	-13,4127	-2,4828
4,20	-16,3505	-22,7055	-14,5274	-3,1812
4,25	-15,6398	-23,5059	-15,6827	-3,9362
4,30	-14,7722	-24,2669	-16,8773	-4,7501
4,35	-13,7357	-24,9802	-18,1086	-5,6245
4,36	-13,5070	-25,1164	-18,3591	-5,8069
4,37	-13,2712	-25,2500	-18,6110	-5,9916
4,38	-13,0276	-25,3819	-18,8642	-6,1792
4,39	-12,7766	-25,5108	-19,1185	-6,3690
4,40	-12,5180	-25,6373	-19,3743	-6,5615
4,41	-12,2517	-25,7612	-19,6313	-6,7566
4,42	-11,9776	-25,8824	-19,8875	-6,9541
4,43	-11,6625	-26,0007	-20,1489	-7,1543
4,44	-11,4051	-26,1161	-20,4095	-7,3571
4,45	-11,1069	-26,2074	-20,6712	-7,5517
4,46	-10,8003	-26,3884	-20,9341	-7,7705
4,47	-10,4851	-26,4448	-21,1981	-7,9812
4,48	-10,1615	-26,5480	-21,4630	-8,1945
4,49	-9,8295	-26,6479	-21,7289	-8,4104
4,50	-9,4890	-26,7447	-21,9959	-8,6290
4,51	-9,1392	-26,8377	-22,2639	-8,8504
4,52	-8,7805	-26,9272	-22,5327	-9,0744
4,53	-8,4133	-27,0132	-22,8023	-9,3010
4,54	-8,0368	-27,0957	-23,0730	-9,5304
4,55	-7,6509	-27,1740	-23,3442	-9,7624
4,56	-7,2556	-27,2485	-23,6164	-9,9973
4,57	-6,8510	-27,3192	-23,8892	-10,2348
4,58	-6,4366	-27,3855	-24,1628	-10,4751
4,59	-6,0127	-27,4477	-24,4369	-10,7181
4,60	-5,5791	-27,5057	-24,7117	-10,9638
4,61	-5,1358	-27,5593	-24,9870	-11,2123
4,62	-4,8237	-27,6086	-25,2630	-11,4636
4,63	-4,2189	-27,6531	-25,5392	-11,7175

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
4,64	-3,7450	-27,6928	-25,8159	-11,9743
4,65	-3,2607	-27,7277	-26,0929	-12,2338
4,66	-2,7663	-27,7581	-26,3705	-12,4962
4,67	-2,2611	-27,7831	-26,6481	-12,7612
4,68	-1,7449	-27,8032	-26,9262	-13,0293
4,69	-1,2187	-27,8181	-27,2042	-13,2998
4,70	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,5732
4,71	-0,1327	-27,8317	-27,7608	-13,8495
$3\pi/2$	0,0	-27,8317	-27,8272	-13,9159
4,72	0,4268	-27,8391	-28,0390	-14,1284
4,73	0,9976	-27,8228	-28,3172	-14,4102
4,74	1,5799	-27,8101	-28,5955	-14,6948
4,75	2,1731	-27,7913	-28,8734	-14,9821
4,76	2,7782	-27,7668	-29,1514	-15,2723
4,77	3,3951	-27,7357	-29,4288	-15,5652
4,78	4,0236	-27,6988	-29,7061	-15,8609
4,79	4,6638	-27,6553	-29,9828	-16,1593
4,80	5,3164	-27,6052	-30,2589	-16,4604
4,81	5,9811	-27,5488	-30,5348	-16,7645
4,82	6,6574	-27,4859	-30,8102	-17,0712
4,83	7,3466	-27,4156	-31,0845	-17,3806
4,84	8,0477	-27,3389	-31,3584	-17,6928
4,85	8,7623	-27,2547	-31,6314	-18,0079
4,86	9,4890	-27,1634	-31,9035	-18,3257
4,87	10,2282	-27,0650	-32,1747	-18,6460
4,88	10,9806	-26,9589	-32,4448	-18,9691
4,89	11,7458	-26,8452	-32,7137	-19,2948
4,90	12,5239	-26,7239	-32,9814	-19,6232
4,91	13,3158	-26,5846	-33,2482	-19,9545
4,92	14,1202	-26,4578	-33,5135	-20,2882
4,93	14,9388	-26,3123	-33,7774	-20,6248
4,94	15,7704	-26,1588	-34,0397	-20,9638
4,95	16,6157	-25,9967	-34,3003	-21,3054
4,96	17,4750	-25,8262	-34,5595	-21,6498
4,97	18,3478	-25,6482	-34,8168	-21,9966
4,98	19,2348	-25,4594	-35,0726	-22,3462
4,99	20,1356	-25,2623	-35,3259	-22,6981
5,00	21,0504	-25,0565	-35,5775	-23,0525
5,01	21,9800	-24,8413	-35,8272	-23,4097
5,02	22,8474	-24,6170	-36,0745	-23,7691

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
5,03	23,8815	-24,3827	-36,3193	-24,1311
5,04	24,8537	-24,1392	-36,5619	-24,4954
5,05	25,8407	-23,8860	-36,8023	-24,8623
5,06	26,8427	-23,6225	-37,0398	-25,2315
5,07	27,8598	-23,3489	-37,2748	-25,6033
5,08	28,8914	-23,0651	-37,5068	-25,9771
5,09	29,9377	-22,7711	-37,7360	-26,3533
5,10	30,9997	-22,4661	-37,9619	-26,7317
5,11	32,0766	-22,1509	-38,1852	-27,1126
5,12	33,1687	-21,8246	-38,4061	-27,4955
5,13	34,2762	-21,4874	-38,6216	-27,8806
5,14	35,3991	-21,1391	-38,8348	-28,2679
5,15	36,5377	-20,7795	-39,0445	-28,6574
5,16	37,6913	-20,4084	-39,2502	-29,0486
5,17	38,8617	-20,0254	-39,4525	-29,4423
5,18	40,0474	-19,6310	-39,6509	-29,8379
5,19	41,2485	-19,2248	-39,8453	-30,2354
5,20	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,21	43,6994	-18,3754	-40,2214	-31,0361
5,22	44,9486	-17,9322	-40,4028	-31,4391
5,23	46,2148	-17,4758	-40,5796	-31,8440
5,24	47,4958	-17,0073	-40,7521	-32,2504
5,25	48,7949	-16,5258	-40,9197	-32,6590
5,26	50,1091	-16,0317	-41,0826	-33,0690
5,27	51,4399	-15,5240	-41,2404	-33,4806
5,28	52,7876	-15,0030	-41,3932	-33,8939
5,29	54,1511	-14,4684	-41,5405	-34,3084
5,30	55,5317	-13,9201	-41,6826	-34,7246
5,31	56,6296	-13,3574	-41,8187	-35,1421
5,32	58,3438	-12,7808	-41,9493	-35,5609
5,33	59,7745	-12,1903	-42,0742	-35,9810
5,34	61,2218	-11,5856	-42,1932	-36,4023
5,35	62,6869	-10,9660	-42,3061	-36,8250
5,36	64,1678	-10,3321	-42,4126	-37,2485
5,37	65,6657	-9,6823	-42,5124	-37,6731
5,38	67,1818	-9,0184	-42,6060	-38,0986
5,39	68,7140	-8,3390	-42,6928	-38,5251
5,40	70,2637	-7,6440	-42,7727	-38,9524
5,41	71,8308	-6,9336	-42,8459	-39,3808
5,42	73,4144	-6,2076	-42,9117	-39,8096

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
5,43	75,0158	-5,4652	-42,9700	-40,2390
5,44	76,6338	-4,7072	-43,0210	-40,6691
5,45	78,2687	-3,9328	-43,0642	-41,0993
5,46	79,9216	-3,1418	-43,0997	-41,5303
5,47	81,5916	-2,3340	-43,1268	-41,9613
5,48	83,2786	-1,5095	-43,1459	-42,3926
5,49	84,9829	-0,6683	-43,1568	-42,8241
5,50	86,7044	0,1901	-43,1593	-43,2557
5,51	88,4432	1,0656	-43,1531	-43,6874
5,52	90,1996	1,9589	-43,1381	-44,1189
5,53	91,9722	2,8693	-43,1141	-44,5500
5,54	93,7637	3,7984	-43,0807	-44,9812
5,55	95,5716	4,7453	-43,0378	-45,4117
5,56	97,3960	5,7095	-42,9858	-45,8418
5,57	99,2383	6,6927	-42,9238	-46,2714
5,58	101,0984	7,6950	-42,8516	-46,7003
5,59	102,9739	8,7148	-42,7695	-47,1281
5,60	104,8687	9,7544	-42,6775	-47,6558
5,61	106,7790	10,8125	-42,5744	-47,9818
5,62	108,7074	11,8903	-42,4609	-48,4071
5,63	110,6512	12,9865	-42,3366	-48,8309
5,64	112,6133	14,1029	-42,2013	-49,2538
5,65	114,5922	15,2390	-42,0547	-49,6752
5,66	116,5866	16,3950	-41,8959	-50,0944
5,67	118,5994	17,5706	-41,7277	-50,5130
5,68	120,6277	18,7666	-41,5449	-50,9292
5,69	122,6730	19,9835	-41,3507	-51,3434
5,70	124,7352	21,2199	-41,1454	-51,7563
5,71	126,8144	22,4785	-40,9265	-52,1666
5,72	128,9091	23,7571	-40,6952	-52,5746
5,73	131,0207	25,0568	-40,4514	-52,9806
5,74	133,1478	26,2810	-40,1365	-53,3359
5,75	135,2903	27,7192	-39,9238	-53,7842
5,76	137,4497	29,0832	-39,6396	-54,1819
5,77	139,6260	30,4693	-39,3416	-54,5770
5,78	141,8144	31,8755	-39,0304	-54,9689
5,79	144,0228	33,3053	-38,7041	-55,3574
5,80	146,2448	34,7564	-38,3640	-55,7429
5,81	148,4819	36,2301	-38,0089	-56,1246
5,82	150,7340	37,7256	-37,6395	-56,5029

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
5,83	153,0028	39,2449	-37,2545	-56,8776
5,84	155,2847	40,7959	-36,8546	-57,2481
5,85	157,5988	42,3504	-36,4385	-57,6143
5,86	159,8947	43,9378	-36,0077	-57,9772
5,87	162,2208	45,5484	-35,6601	-58,3349
5,88	164,5613	47,1825	-35,0964	-58,6882
5,89	166,9145	48,8394	-34,6161	-59,0363
5,90	169,2837	50,5208	-34,1198	-59,3805
5,91	171,6653	52,2255	-33,6065	-59,7187
5,92	174,0609	53,9542	-33,0746	-60,0521
5,93	176,0704	55,7067	-32,5268	-60,3806
5,94	178,8917	57,4833	-31,9609	-60,7030
5,95	181,3266	59,2852	-31,3765	-61,0195
5,96	183,7730	61,7303	-30,7751	-61,0201
5,97	186,2326	63,3087	-30,1546	-61,4608
5,98	188,7034	64,8347	-29,5155	-61,9332
5,99	191,1870	66,7344	-28,8575	-62,2251
6,00	193,6813	68,6578	-28,2116	-62,5206
6,01	196,1881	70,6079	-27,4846	-62,7889
6,02	198,7051	72,5822	-26,7689	-63,0603
6,03	201,2322	74,5817	-26,0330	-63,3241
6,04	203,7710	76,6067	-25,2774	-63,5810
6,05	206,3194	78,6574	-24,5009	-63,8299
6,06	208,8770	80,7331	-23,7041	-64,0708
6,07	211,4435	82,8350	-22,8855	-64,3032
6,08	214,0209	84,9622	-22,0469	-64,5282
6,09	216,6066	87,1150	-21,1870	-64,7447
6,10	219,2004	89,2947	-20,3043	-64,9519
6,11	221,8019	91,4992	-19,4005	-65,1503
6,12	224,4109	93,7300	-18,4743	-65,3394
6,13	227,0292	95,9871	-17,5263	-65,5200
6,14	229,6542	98,2709	-16,5551	-65,6909
6,15	232,2833	100,5538	-15,5602	-65,8372
6,16	234,9208	102,9168	-14,5425	-66,0010
6,17	237,5639	105,2793	-13,5016	-66,1413
6,18	240,2122	107,6680	-12,4370	-66,2711
6,19	242,8654	110,0832	-11,3485	-66,3901
6,20	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,21	248,1847	114,9934	-9,0980	-66,5947
6,22	250,8499	117,4888	-7,9352	-66,6796

Додаток 3 (продовження)

$\beta\chi$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
6,23	253,5208	120,0113	-6,7481	-66,7538
6,24	256,1917	122,5599	-5,5350	-66,8150
6,25	258,8649	125,1350	-4,2969	-66,8640
6,26	261,5398	127,7369	-3,0321	-66,9005
6,27	264,2159	130,3657	-1,7414	-66,9242
6,28	266,8926	133,0195	-0,4257	-66,9354
2π	287,7468	135,8725	0,0	-66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	-66,9175
6,40	298,8909	166,9722	17,5362	-65,9486
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	-63,3105
6,60	349,2554	231,8801	57,2528	-58,6870
6,70	371,4244	267,9374	82,2255	-51,7430
6,80	390,2947	306,0558	110,9087	-42,1190
6,90	404,7145	347,3499	143,4927	-30,1819
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	-13,2842

Література

1. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Ч. II. – М.: Наука, 1965. – 478 с.
2. Сопротивление материалов (под ред. А. Ф. Смирнова). – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.
3. Сопротивление материалов (под ред. Г. С. Писаренко). – К.: Вища школа, 1986. – 774 с.
4. Фимен А. П. Прикладная механика деформируемого тела. Т. II. – М.: Наука, 1978. – 616 с.