

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний економіко-технологічний університет транспорту

Кафедра УПП



МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

щодо виконання лабораторних робіт для студентів
галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура»,
напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)»
для усіх форм навчання

Київ 2012

УДК: 681.3

Філіпович Л. В., Мацюк В. І., Бердниченко Ю. А. Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ: Методичні вказівки щодо виконання лабораторних робіт. – К.: ДЕТУТ, 2012. – 64 с.

Методичні вказівки щодо виконання лабораторних робіт з дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ» підготовлені за навчальним планом галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура», напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)» і програмою дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ».

Призначені для студентів університету денної і заочної форм навчання галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура», напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)».

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри «Управління процесами перевезень» (протокол № 11 від 18.05.2011 р.) та на засіданні методичної комісії факультету «Управління залізничним транспортом» (протокол № 6 від 23.05.2011 р.).

Укладач: Л. В. Філіпович, доцент кафедри УПП, канд. техн. наук, с.н.с.;

Рецензенти: О. І. Стасюк, зав.кафедри АКІТТ, д.т.н, проф.;

І. К. Рисцов, доцент кафедри математичного моделювання економічних систем НТУ «КПІ», к.ф-м.н.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ	5
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1	7
ДОСЛІДЖЕННЯ ЕМПІРИЧНОЇ МОДЕЛІ	7
1. Мета роботи	7
2. Постановка задачі	7
3. Порядок виконання роботи	7
4. Навчальний матеріал	7
4.1. Визначення коефіцієнтів моделей	7
4.2. Використання таблиці для розрахунку коефіцієнтів моделей	10
4.3. Визначення результуючої моделі	11
4.4. Використання таблиці для вибору моделі	11
4.5. Побудова суміщеного графіка	12
5. Контрольні запитання та завдання	12
6. Варіанти індивідуальних завдань	12
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2	13
ОПРАЦЮВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ І ВСТАНОВЛЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ	13
1. Мета роботи	13
2. Постановка задачі	13
3. Порядок виконання роботи	13
4. Навчальний матеріал	13
4.1. Ущільнення статистичного ряду	13
4.2. Розрахунок числових характеристик	14
4.3. Визначення параметрів розподілу Ерланга	15
4.4. Перевірка гіпотези про розподіл Ерланга	16
4.5. Побудова графічних моделей розподілу інтервалів	17
5. Контрольні запитання та завдання	17
6. Варіанти індивідуальних завдань	18
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3	33
РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ	33
1. Мета роботи	33
2. Постановка задачі	33
3. Порядок виконання роботи	33
4. Навчальний матеріал	33
4.1. Визначення коефіцієнта кореляції і умовних середніх	33
4.2. Визначення коефіцієнтів лінійної моделі	34
4.3. Побудова суміщеного графіка	35
4.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками	35
5. Контрольні запитання та завдання	36
6. Варіанти індивідуальних завдань	36
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4	44
РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ	44
1. Мета роботи	44
2. Постановка задачі	44
3. Порядок виконання роботи	44

4. Навчальний матеріал	44
4.1. Визначення коефіцієнтів параболічної моделі	44
4.2. Розрахунок дисперсій	44
4.3. Визначення кореляційного співвідношення	45
4.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками	45
5. Контрольні запитання та завдання	45
6. Варіанти індивідуальних завдань	46
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5	50
РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ	50
НА МОВІ <i>QBASIC</i>	50
1. Мета роботи	50
2. Постановка задачі	50
3. Порядок виконання роботи	50
4. Навчальний матеріал	50
4.1. Задача інтерполювання	50
4.2. Інтерполяційна формула Ньютона	51
4.3. Інтерполяційна формула Лагранжа	51
5. Контрольні запитання та завдання	52
6. Варіанти індивідуальних завдань	52
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6	54
ОПТИМАЛЬНЕ ЗАВАНТАЖЕННЯ ВАНТАЖНИХ ФРОНТІВ	54
1. Мета роботи	54
2. Постановка задачі	54
3. Порядок виконання роботи	54
4. Методичний матеріал	54
4.1. Розробка математичної моделі	54
4.2. Використання симплекс-методу для рішення задачі	55
4.3. Програмування задачі у середовищі <i>Excel</i>	56
5. Контрольні запитання та завдання	56
6. Варіанти індивідуальних завдань	57
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7	58
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	58
1. Мета роботи	58
2. Постановка задачі	58
3. Порядок виконання роботи	58
4. Навчальний матеріал	58
4.1. Математична модель транспортної задачі	58
4.2. Алгоритм пошуку оптимального плану в <i>Excel</i>	60
5. Контрольні запитання	60
6. Варіанти індивідуальних завдань	60
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	64

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Методичні вказівки складаються із сімох лабораторних робіт, які виконуються при вивченні дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ».

Чотири роботи пов'язані з дослідженням статистичних моделей, одна – з числовими методами обчислень і дві – з дослідженням моделей оптимізації.

Основна мета виконання лабораторних робіт – придбання знань і навичок у галузі розробки і дослідження математичних моделей транспортних процесів на основі застосування сучасних програмних засобів, а саме: табличного процесора *Microsoft Excel* і алгоритмічної мови *QBasic*.

Структура методичних рекомендацій щодо кожної роботи включає мету роботи, постановку задачі, методика її розв'язку, послідовність виконання роботи, варіанти індивідуальних завдань, контрольні запитання та завдання, критерії оцінки знань і відповідну кількість балів за результатами виконаної роботи.

У результаті виконання лабораторних робіт студенти зобов'язані здійснити всі передбачені етапи: від змістовної постановки задачі до аналізу отриманих результатів.

Крім розробки і дослідження електронної моделі задачі, студенти повинні сформулювати у середовищі текстового редактора *Microsoft Word* звіт про виконану роботу, який містить такі розділи:

1. Постановка задачі.
2. Початкові дані.
3. Математична модель задачі.
4. Висновки.
5. Відповіді на контрольні запитання та завдання.

Початкові дані обираються за індивідуальним варіантом. Якщо дані не відповідають завданню, лабораторна робота не зараховується.

У розділі «Математична модель» наводяться тільки прикінцеві формули, які застосовуються при моделюванні в *Excel*.

Висновки звіту повинні містити аналіз даних, отриманих як наслідок моделювання і продемонструвати здатність студента до самостійного формулювання і аналізу результатів виконаної роботи

У п'ятій лабораторній роботі, що виконується із застосуванням мови *QBasic*, крім наведених розділів, потрібно розробити і навести у звіті схему алгоритму інтерполювання функцій за формулами Ньютона і Лагранжа.

Критерії оцінки знань при виконанні лабораторних робіт визначені в Робочій програмі дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ». Кількість балів при оцінюванні роботи коливається у межах від шести до трьох і залежить, крім якості захищеної роботи, ще й від терміну її виконання.

Для кожної лабораторної роботи мають значення **результати**, а не той спосіб моделювання (вигляд табличних форм, архітектура програмного продукту), за яким ці результати були отримані. Таким чином, нараховування балів відбувається за такими критеріями:

6 балів нараховується студентам, які захистили лабораторну роботу в установлений термін і оформили звіт у середовищі *Microsoft Word*;

5 балів нараховується студентам, які захистили лабораторну роботу в установлений термін, але не мають звіту на цю роботу;

4 бали отримують студенти, які захистили лабораторну роботу, мають оформлений звіт, але не уклалися в рамки встановленого терміну;

3 бали отримують студенти, які захистили лабораторну роботу, але не мають оформленого звіту і не уклалися в установлений термін;

0 балів отримують студенти, які не захистили роботу.

У процесі виконання лабораторних робіт студенти повинні продемонструвати знання за фахом, виявити індивідуальний підхід до моделювання задач у середовищі *Microsoft Excel*, поглибити ті знання, які вони отримали при вивченні дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ», а також у процесі вивчення на попередніх курсах таких дисциплін як «КТ і програмування», «Теорія імовірностей і математична статистика», «Дослідження операцій».

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕМПІРИЧНОЇ МОДЕЛІ

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою визначення параметрів емпіричної формули за методом найменших квадратів.

1.2. Набування навичок моделювання задачі у середовищі електронної таблиці *Microsoft Excel*.

2. Постановка задачі

За даними спостереження часу розформування поїзда на сортувальній гірці визначити емпіричну залежність витраченого часу на розформування від кількості вагонів у складі поїзда.

Передбачається, що ця залежність може бути лінійною, параболічною або гіперболічною. Відповідні математичні моделі процесу розформування мають вигляд:

$$\text{лінійна модель} \quad y = a_0 + a_1 x; \quad (2.1)$$

$$\text{параболічна модель} \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2; \quad (2.2)$$

$$\text{гіперболічна модель} \quad y = a_0 + \frac{a_1}{x}, \quad (2.3)$$

де x – число вагонів у складі поїзда (одиниць);

y – час розформування поїзда (хвилини).

Для розв'язку задачі за методом найменших квадратів визначити коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 всіх трьох моделей і обрати ту з них, яка найкраще визначає процес.

3. Порядок виконання роботи

3.1. Сформуванню таблицю (рис. 4.1) для визначення сум, які використовуються для розрахунку коефіцієнтів моделей (2.1), (2.2) і (2.3).

3.2. На основі таблиці (рис. 4.1) за методом найменших квадратів розрахувати коефіцієнти a_0 , a_1 , a_2 .

3.3. Сформуванню таблицю (рис. 4.2) для визначення результуючої моделі часу розпуску вантажного поїзда з використанням методу найменших квадратів.

3.4. Побудувати суміщений графік залежності часу розпуску поїзда від числа вагонів, який містить результати спостереження, лінійну, параболічну і гіперболічну моделі процесу розпуску.

3.5. У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу.

4. Навчальний матеріал

4.1. Визначення коефіцієнтів моделей

За методом найменших квадратів, найкращими коефіцієнтами a_0 , a_1 , a_2 вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень теоретичних значень часу розформування поїзда від спостережених є мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^n (f(x_i, a_0, a_1, a_2) - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

де n – кількість спостережень ($n=10$ для усіх варіантів).

Якщо функція S залежить від коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 , то потрібно знайти такі значення цих коефіцієнтів, які мінімізують функцію. Для цього треба дорівняти до нуля приватні похідні від S по a_0, a_1, a_2 , тобто задача зводиться до рішення такої системи нормальних рівнянь:

$$\frac{dS}{da_0} = 0; \quad \frac{dS}{da_1} = 0; \quad \dots; \quad \frac{dS}{da_k} = 0. \quad (4.2)$$

Для *лінійної* моделі (2.1) вираз (4.1) набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (4.3)$$

Для визначення коефіцієнтів a_0 , і a_1 за (4.2) і (4.3) складається система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \\ \frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Після деяких перетворень система (4.4) матиме остаточний вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i. \end{cases} \quad (4.5)$$

Для *параболічної* моделі (2.2) вираз (4.1) набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (4.6)$$

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1 і a_2 за (4.2) і (4.6) складається система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0 \\ \frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i = 0 \\ \frac{dS}{da_2} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Після перетворень система (4.7) матиме вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i. \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Для *гіперболічної* моделі (2.3) вираз (4.1) набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i \right)^2 \rightarrow \min. \quad (4.9)$$

Для визначення коефіцієнтів a_0 , і a_1 за (4.2) і (4.9) складається система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i \right) = 0 \\ \frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x_i} - y_i \right) \frac{1}{x_i} = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Після перетворень система (4.10) матиме вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Для спрощення вигляду систем (4.5), (4.8) і (4.11) запроваджуються позначення:

$$\begin{aligned} S_0 = n; \quad S_1 = \sum_{i=1}^n x_i; \quad S_2 = \sum_{i=1}^n y_i; \quad S_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad S_4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \quad S_5 = \sum_{i=1}^n x_i^3; \quad S_6 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2; \\ S_7 = \sum_{i=1}^n x_i^4; \quad S_8 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}; \quad S_9 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}; \quad S_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Після заміни сум відповідними символами S_i ($i=0, 1, \dots, 10$) системи набувають відповідний вигляду.

Система (4.5) для визначення коефіцієнтів *лінійної* моделі:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 = S_2 \\ S_1 a_0 + S_3 a_1 = S_4. \end{cases} \quad (4.13)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 лінійної моделі обчислюються за допомогою визначника другого порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_1 \\ S_4 & S_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_3 - S_4 S_1}{S_0 S_3 - S_1^2}; \quad (4.14)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_1 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_4 - S_1 S_2}{S_0 S_3 - S_1^2}. \quad (4.15)$$

Система (4.8) для визначення коефіцієнтів *параболічної* моделі:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 + S_3 a_1 = S_2 \\ S_1 a_0 + S_3 a_1 + S_5 a_1 = S_4 \\ S_3 a_0 + S_5 a_1 + S_7 a_1 = S_6. \end{cases} \quad (4.16)$$

Коефіцієнти a_0 , a_1 і a_2 параболічної моделі обчислюються за допомогою визначника третього порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_1 & S_3 \\ S_4 & S_3 & S_5 \\ S_6 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_3 & S_5 \\ S_3 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_3 S_7 + S_1 S_5 S_6 + S_4 S_5 S_3 - S_6 S_3^2 - S_5^2 S_2 - S_4 S_1 S_7}{S_0 S_3 S_7 + 2 \cdot S_1 S_5 S_3 - S_3^3 - S_5^2 S_0 - S_1^2 S_7}; \quad (4.17)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_6 & S_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_3 & S_5 \\ S_3 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_4 S_7 + S_2 S_5 S_3 + S_1 S_6 S_3 - S_3^2 S_4 - S_6 S_5 S_0 - S_1 S_2 S_7}{S_0 S_3 S_7 + 2 \cdot S_1 S_5 S_3 - S_3^3 - S_5^2 S_0 - S_1^2 S_7}; \quad (4.18)$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_3 & S_5 \\ S_3 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_3 S_6 + S_1 S_4 S_3 + S_1 S_5 S_2 - S_3^2 S_2 - S_1^2 S_6 - S_5 S_4 S_0}{S_0 S_3 S_7 + 2 \cdot S_1 S_5 S_3 - S_3^3 - S_5^2 S_0 - S_1^2 S_7}. \quad (4.19)$$

Система (4.11) для визначення коефіцієнтів *гіперболічної* моделі:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_8 a_1 = S_2 \\ S_8 a_0 + S_9 a_1 = S_{10}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 гіперболічної моделі обчислюються за допомогою визначника другого порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_8 \\ S_{10} & S_9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_8 \\ S_8 & S_9 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_9 - S_8 S_{10}}{S_0 S_9 - S_8^2}; \quad (4.21)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_8 & S_{10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_8 \\ S_8 & S_9 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_{10} - S_8 S_2}{S_0 S_9 - S_8^2}. \quad (4.22)$$

4.2. Використання таблиці для розрахунку коефіцієнтів моделей

Для визначення коефіцієнтів лінійної, параболічної та гіперболічної моделей у середовищі *Excel* доцільно застосувати табличний спосіб розрахунків.

Для побудови таблиці скористаємося наведеними змінними, де x – кількість вагонів, y – час розформування складу потяга. Приклад обробки результатів спостережень з використанням таблиці наведено на рис. 4.1.

x	y	x^2	yx	x^3	yx^2	x^4	$1/x$	$1/x^2$	y/x
18	11,2								
.	.								
.	.								
54	24,8								
Σx	Σy	Σx^2	Σyx	Σx^3	Σyx^2	Σx^4	$\Sigma 1/x$	$\Sigma 1/x^2$	$\Sigma y/x$
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}

Рис. 4.1. Таблиця розрахунку сум в середовищі *Microsoft Excel*

4.3. Визначення результуючої моделі

Методика визначення моделі, яка дає найкраще наближення до процесу розформування складу потяга із сортувальної гірки, також базується на методі найменших квадратів. За цим методом визначається сума квадратів відхилень даних спостереження y_i ($i=1, 2, \dots, 10$) від лінійної y_{li} , параболічної y_{pi} та гіперболічної y_{gi} розрахункових моделей. Обирається та модель, для якої ця сума мінімальна.

Для **лінійної** моделі сума квадратів відхилень має вигляд:

$$S_l = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{li})^2. \quad (4.23)$$

Для **параболічної** моделі:

$$S_p = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{pi})^2. \quad (4.24)$$

Для **гіперболічної** моделі:

$$S_g = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{gi})^2. \quad (4.25)$$

$$\text{Ознакою вибору моделі є умова: } \min \{S_l, S_p, S_g\}. \quad (4.26)$$

4.4. Використання таблиці для вибору моделі

На рис. 4.2 наведено приклад таблиці розрахунку сум квадратів відхилень даних спостереження від відповідних значень моделей.

x	y	Лінійна модель		Параболічна модель		Гіперболічна модель	
		y_l	$(y-y_l)^2$	y_p	$(y-y_p)^2$	y_g	$(y-y_g)^2$
18	11,2						
.	.						
.	.						
54	24,8						
С у м а			$\Sigma(y-y_l)^2$		$\Sigma(y-y_p)^2$		$\Sigma(y-y_g)^2$

Рис. 4.2. Таблиця вибору моделі в середовищі *Microsoft Excel*

4.5. Побудова суміщеного графіка

Для побудови суміщеного графіка в системі координат xu наносяться точки, отримані в результаті спостережень і з'єднуються кривою (емпірична крива – y). У цій же системі координат треба розмістити лінійну y_l , параболічну y_p і гіперболічну y_g моделі. Вигляд графіка дозволяє візуально оцінити, яка з досліджуваних моделей найбільш точно відображає характер емпіричної кривої.

5. Контрольні запитання та завдання

5.1. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?

5.2. Який метод покладено в основу визначення коефіцієнтів емпіричної формули?

5.3. Навести методику вибору моделі з числа запропонованих.

6. Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 6.1.

Початкові дані

Номер варіанта	Число вагонів у складі вантажного поїзда									
	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54
	Тривалість розформування									
1	11,2	13,1	14,8	16,5	18,1	19,6	21,0	22,3	24,8	28,3
2	9,8	10,4	10,9	11,4	11,9	12,3	12,6	12,9	13,5	15,3
3	6,0	7,1	8,5	9,8	11,5	12,0	13,5	14,3	15,4	18,4
4	5,3	6,5	7,8	9,5	11,6	14,1	17,1	20,0	22,6	26,1
5	10,0	10,7	11,1	11,5	11,8	12,0	12,2	12,4	13,3	16,4
6	11,0	12,7	14,4	16,0	17,6	19,1	20,6	22,1	24,4	26,3
7	8,0	9,5	10,2	12,4	13,9	15,4	16,7	18,2	20,2	23,5
8	10,8	12,3	13,6	14,9	16,1	17,2	18,3	19,1	23,3	26,1
9	12,2	12,7	13,2	13,7	14,3	14,9	15,5	16,1	18,1	22,8
10	12,0	12,8	13,4	13,9	14,2	14,5	14,7	14,9	16,3	19,4
11	9,7	11,2	13,4	14,9	16,2	17,3	18,9	19,5	23,1	26,5
12	11,2	13,0	14,2	15,6	16,9	17,2	18,6	19,3	22,5	25,3
13	10,9	11,6	12,7	13,6	14,1	15,9	16,3	17,8	18,9	21,9
14	13,0	14,2	16,0	17,8	18,8	19,3	20,5	21,3	23,6	26,8
15	11,6	12,3	13,6	14,5	15,9	16,3	17,2	18,2	20,7	23,8
16	10,5	12,1	14,3	16,8	18,2	20,5	22,1	24,5	26,4	29,3
17	9,6	10,2	11,8	12,3	13,5	13,9	14,7	15,3	17,4	22,4
18	8,2	10,1	11,9	12,3	14,6	16,2	17,9	18,6	22,8	26,2
19	5,6	7,9	10,1	12,3	14,8	15,8	16,4	17,9	21,3	24,7
20	8,0	9,8	11,0	12,1	13,2	13,9	16,4	18,1	20,4	24,3
21	7,9	8,1	9,3	10,5	11,9	12,5	13,7	14,6	16,4	19,4
22	9,7	10,3	14,1	14,9	15,2	17,2	18,3	19,4	23,1	25,4
23	10,6	10,9	11,6	11,9	12,3	12,9	13,1	14,0	16,8	20,3
24	12,3	12,9	13,8	14,2	14,9	15,2	16,0	16,9	19,3	23,1
25	13,2	13,5	14,2	14,9	15,7	16,0	16,9	17,5	19,9	24,6
26	11,2	12,3	13,5	14,6	15,7	16,8	17,9	18,4	21,2	25,4
27	10,6	11,2	12,6	13,5	14,2	15,3	16,3	16,5	18,5	22,8
28	9,6	11,1	12,3	13,5	14,9	15,6	16,1	17,2	20,6	24,9
29	9,7	10,2	11,3	12,5	13,6	14,8	15,6	16,9	18,5	22,6
30	11,1	12,6	13,8	14,9	15,3	16,5	17,9	18,5	20,1	24,6

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2 ОПРАЦЮВАННЯ СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ І ВСТАНОВЛЕННЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою розробки та дослідження статистичних моделей на основі рядів і функцій розподілу.

1.2. Вивчення функціональних можливостей *Microsoft Excel* та набуття практичних навичок застосування електронної таблиці.

2. Постановка задачі

За даними спостережень часу надходження вантажних поїздів на сортувальну станцію (96 спостережень) визначити числові характеристики розподілу інтервалів між надходженням поїздів на станцію і на основі розрахунку параметрів розподілу Ерланга перевірити прийняту гіпотезу про розподіл Ерланга.

3. Порядок виконання роботи

3.1. На основі спостереження астрономічного часу надходження поїздів на станцію визначити інтервали часу між надходженням поїздів (у хвиликах).

3.2. Отриманий ряд інтервалів надходження поїздів (95 значень) об'єднати у розряди.

3.3. Скласти статистичний ряд інтервалів надходження поїздів.

3.4. Сформуванати таблицю 1 (рис. 4.1) для визначення числових характеристик статистичного ряду.

3.5. Сформуванати таблицю 2 (рис. 4.2) для визначення щільності ймовірності закону розподілу Ерланга.

3.6. Сформуванати таблицю 3 (рис. 4.3) для перевірки гіпотези про розподіл Ерланга за критеріями узгодження Пірсона і умовою Романовського.

3.7. Побудувати гістограму розподілу частоти влучення інтервалів у розряд.

3.8. Побудувати функцію щільності ймовірності закону Ерланга.

3.9. У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу.

4. Навчальний матеріал

4.1. Ущільнення статистичного ряду

Інтервали часу між надходженням поїздів у розформування визначаються шляхом вирахування часу надходження наступного поїзда від попереднього.

Результатом розрахунків будуть 95 значень інтервалів часу між надходженням поїздів у хвиликах, у розташуванні яких важко знайти будь-яку закономірність.

Щоб дослідити отримані дані, необхідно, не змінюючи сутності, привести їх у деякий порядок шляхом об'єднання у групи (розряди). Обираючи довжину групування даних, керуються таким міркуванням: без істотної помилки дорівняти всі значення ознаки, віднесеної до будь-якої групи, до середнього значення групи. Для цього необхідно спочатку передивитися початковий матеріал, відмітити найбільше і найменше значення інтервалів і поділити різницю між ними на передбачуване число розрядів.

Існує емпірична формула для визначення довжини інтервалу (формула Стерджеса):

$$I = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{R}, \quad (4.1)$$

де t_{\max} – максимальне значення інтервалу;

t_{\min} – мінімальне значення інтервалу;

R – число розрядів, $R=1+3,2 \lg n$;

n – число спостережень, $n=95$.

Після визначення числа і довжини інтервалів, починається групування спостережень. Значення випадкової величини об'єднуються у розряди і підраховується кількість значень, які потрапили у кожний розряд.

Кількість спостережень, яка потрапила у розряд, називається **частотою** розряду (m_i), а їхня частка у загальній сукупності – **частістю** (p_i). Порядок, у якому частоти розподіляються по розрядах, становить **розподіл статистичного ряду**.

4.2 Розрахунок числових характеристик

Інтервал часу між надходженням поїздів – це випадкова величина, числовими характеристиками якої є її математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації, які розраховуються за відповідними формулами.

Математичне сподівання:

$$M(t) = \frac{\sum_{i=1}^R m_i t_{s_i}}{\sum_{i=1}^R m_i}. \quad (4.2)$$

Дисперсія інтервалів:

$$D(t) = \frac{\sum_{i=1}^R (t_{s_i} - M(t))^2 m_i}{\sum_{i=1}^R m_i}. \quad (4.3)$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)}. \quad (4.4)$$

Коефіцієнт варіації:

$$g(t) = \frac{\sigma(t)}{M(t)}. \quad (4.5)$$

Для розрахунку числових характеристик у середовищі *Excel* створюється таблиця (рис. 4.1)

t_n	t_k	m	t_s	mt_s	$(t_s - M(t))^2 m$	$p = \frac{m}{n}$
0	12	39	6			0,410
.
.
.
91	103	2	97			0,021
Сума		$\sum_R m = 95$		$\sum_R mt_s$	$\sum_R (t_s - M(t))^2 m$	$\sum_R p = 1$

Рис. 4.1. Таблиця розрахунку характеристик розподілу в *Excel*

4.3. Визначення параметрів розподілу Ерланга

Інтервали часу між надходженням поїздів на сортувальну станцію досить добре описуються законом Ерланга $f(t)$:

$$f(t) = \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} t^{(k-1)} e^{-k\lambda t}, \quad (4.6)$$

де $f(t)$ – щільність імовірності (диференційний закон розподілу);

t – поточне значення інтервалу;

λ – середня інтенсивність влучення в розряд:

$$\lambda = \frac{60}{M(t)}; \quad (4.7)$$

k – параметр закону розподілу Ерланга, який являє собою співвідношення між математичним сподіванням і дисперсією:

$$k = \frac{M^2(t)}{D(t)} = \frac{1}{g^2(t)}. \quad (4.8)$$

Результат, отриманий за формулою (4.8), потрібно округлити до цілого і він набере значення 1 або 2.

Якщо $k=1$, то розрахункова формула (4.6) матиме вигляд:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (4.9)$$

а якщо $k=2$, то

$$f(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t}. \quad (4.10)$$

Для розрахунку щільності ймовірності (4.6) у середовищі *Excel* формується таблиця (рис. 4.2).

t_s	$\frac{t_s}{60}$	$f(t)$
6		
.		
.		
.		
97		

Рис. 4.2. Таблиця розрахунку щільності ймовірності в *Excel*

4.4. Перевірка гіпотези про розподіл Ерланга

Для перевірки ступеня узгодження розрахункового розподілу Ерланга із статистичним розподілом застосовується критерій згоди Пірсона χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^R \frac{(np_i - m_i)^2}{np_i}, \quad (4.11)$$

де R – число розрядів статистичного ряду, $R=8$;

p_i – імовірність влучення в i -й розряд;

m_i – спостережена частота влучення в i -й розряд;

n – загальне число спостережень;

np_i – теоретична частота влучення в i -й розряд.

Імовірність p_i влучення в i -й розряд визначається як різниця між значеннями інтегральної функції розподілу Ерланга $F(t)$ на кінцях розряду:

$$p_i = F(t_{i+1}) - F(t_i). \quad (4.12)$$

Значення інтегральної функції розподілу Ерланга залежать від параметра k і визначаються за формулами:

якщо $k=1$, то

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad (4.13)$$

якщо $k=2$, то

$$F(t) = 1 - (2\lambda t + 1)e^{-2\lambda t}. \quad (4.14)$$

Для розрахунку критерію Пірсона у середовищі *Excel* формується таблиця, рис. 4.3.

За умовою Романовського гіпотеза про прийнятий теоретичний розподіл вважається правдоподібною, якщо дотримується умова:

$$\left| \frac{\chi^2 - r}{\sqrt{2r}} \right| \leq 3, \quad (4.15)$$

де r – степінь вільності, $r = R - Z - 1$;

(4.16)

Z – число параметрів закону розподілу: якщо $k=1$, $Z=1$;
якщо $k=2$, $Z=2$.

t_k	$\frac{t_k}{60}$	$F(t)$	p_i	np_i	m_i	$\frac{(np_i - m_i)^2}{np_i}$
12					39	
.					.	
.					.	
.					.	
103					2	
Критерій Пірсона χ^2						$\sum_{i=1}^R \frac{(np_i - m_i)^2}{np_i}$

Рис. 4.3. Таблиця розрахунку критерію Пірсона в Excel

4.5. Побудова графічних моделей розподілу інтервалів

У середовищі Excel за даними таблиці (рис. 4.1) будується гістограма розподілу частот (m), а за даними таблиці (рис. 4.2) – функція щільності ймовірності $f(t)$.

5. Контрольні запитання та завдання

- 5.1. Навести етапи обробки статистичних даних.
- 5.2. Що означає статистичний розподіл випадкової величини?
- 5.3. Навести числові характеристики випадкової величини і формули для їхнього визначення.
- 5.4. За якими формулами визначаються диференційний та інтегральний закони розподілу Ерланга?
- 5.5. Навести параметри розподілу Ерланга.

6. Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 6.1

Астрономічний час надходження поїздів на станцію

Варіант 1				Варіант 2			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	0:03	49	23:55	1	7:00	49	3:10
2	0:55	50	1:20	2	8:50	50	3:12
3	1:25	51	1:37	3	8:59	51	3:24
4	1:30	52	1:45	4	9:10	52	3:54
5	1:35	53	2:32	5	9:20	53	4:00
6	2:55	54	2:50	6	9:45	54	4:20
7	3:28	55	3:45	7	9:47	55	5:20
8	4:16	56	3:55	8	10:20	56	5:45
9	4:48	57	4:25	9	10:53	57	6:55
10	4:53	58	5:01	10	11:30	58	7:15
11	5:10	59	5:42	11	11:41	59	7:48
12	6:30	60	6:32	12	11:52	60	7:55
13	6:40	61	6:45	13	12:10	61	8:10
14	6:59	62	6:50	14	13:30	62	8:15
15	7:27	63	7:00	15	14:01	63	8:17
16	7:35	64	7:42	16	14:15	64	8:27
17	7:45	65	8:00	17	14:16	65	8:37
18	7:59	66	8:30	18	14:27	66	8:59
19	9:00	67	10:02	19	14:38	67	9:10
20	9:57	68	10:25	20	14:59	68	9:40
21	10:47	69	10:30	21	16:20	69	9:58
22	11:25	70	10:55	22	16:20	70	10:20
23	12:17	71	11:15	23	16:40	71	10:59
24	14:23	72	11:57	24	17:35	72	11:06
25	15:03	73	12:22	25	17:40	73	11:18
26	15:15	74	12:32	26	17:50	74	11:30
27	15:28	75	12:40	27	17:59	75	11:41
28	15:40	76	13:10	28	18:41	76	11:49
29	15:52	77	14:57	29	18:58	77	11:59
30	16:37	78	15:05	30	19:25	78	12:08
31	16:50	79	15:30	31	19:37	79	12:48
32	17:30	80	15:57	32	19:48	80	12:54
33	17:57	81	15:58	33	19:55	81	13:10
34	18:10	82	16:10	34	21:20	82	13:25
35	18:37	83	16:25	35	21:31	83	13:55
36	18:47	84	17:00	36	21:42	84	14:40
37	18:57	85	17:10	37	22:58	85	14:50
38	19:22	86	18:05	38	23:15	86	14:59
39	19:22	87	19:22	39	23:19	87	15:30
40	19:50	88	19:32	40	23:22	88	15:41
41	20:00	89	19:50	41	23:50	89	15:53
42	20:40	90	19:57	42	23:57	90	16:07
43	21:00	91	20:00	43	0:59	91	17:10
44	21:35	92	21:37	44	1:10	92	17:35
45	21:58	93	21:55	45	1:20	93	17:55
46	22:42	94	22:20	46	1:31	94	18:00
47	23:15	95	22:35	47	1:38	95	18:15
48	23:30	96	23:40	48	2:41	96	18:26

Варіант 3				Варіант 4			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	18:00	49	17:28	1	7:40	49	23:57
2	18:40	50	17:50	2	8:53	50	0:56
3	19:05	51	18:00	3	8:55	51	0:57
4	19:35	52	18:49	4	9:00	52	1:10
5	20:10	53	18:55	5	9:17	53	1:27
6	20:45	54	19:25	6	9:38	54	1:50
7	20:59	55	19:40	7	9:47	55	2:23
8	21:35	56	20:50	8	10:10	56	2:25
9	22:14	57	21:07	9	10:43	57	2:45
10	22:25	58	21:50	10	10:48	58	3:10
11	22:55	59	22:37	11	11:20	59	3:15
12	23:10	60	22:40	12	11:40	60	3:40
13	0:00	61	22:51	13	11:50	61	4:02
14	0:10	62	0:09	14	12:33	62	4:15
15	0:48	63	0:20	15	13:37	63	5:00
16	0:50	64	0:32	16	14:00	64	5:20
17	0:59	65	0:57	17	14:05	65	5:43
18	1:17	66	1:20	18	14:05	66	7:23
19	1:40	67	1:35	19	14:25	67	7:26
20	3:20	68	1:50	20	14:30	68	7:38
21	3:50	69	2:30	21	14:42	69	7:45
22	4:20	70	2:45	22	14:45	70	7:55
23	4:50	71	3:40	23	15:42	71	8:10
24	5:20	72	3:50	24	16:15	72	9:20
25	5:35	73	4:30	25	16:17	73	9:40
26	6:20	74	4:59	26	16:35	74	9:45
27	6:40	75	5:37	27	17:25	75	9:55
28	7:20	76	5:47	28	17:35	76	9:57
29	7:30	77	6:30	29	17:40	77	10:45
30	7:35	78	6:55	30	17:46	78	11:20
31	7:50	79	6:57	31	17:53	79	11:30
32	7:50	80	7:57	32	18:32	80	11:35
33	9:30	81	8:35	33	19:15	81	11:55
34	10:10	82	9:10	34	19:30	82	12:50
35	10:25	83	9:20	35	19:40	83	13:02
36	11:40	84	9:31	36	19:55	84	13:37
37	11:50	85	9:45	37	21:13	85	14:07
38	12:41	86	10:01	38	21:18	86	14:30
39	12:55	87	11:07	39	21:30	87	14:55
40	13:25	88	12:10	40	21:40	88	15:20
41	13:41	89	12:28	41	21:57	89	15:30
42	14:38	90	12:37	42	22:50	90	15:40
43	14:46	91	13:00	43	23:07	91	15:45
44	15:40	92	13:50	44	23:15	92	15:50
45	16:30	93	14:10	45	23:20	93	15:57
46	16:51	94	14:22	46	23:22	94	16:05
47	17:10	95	14:49	47	23:40	95	16:10
48	17:25	96	15:07	48	23:50	96	17:30

Варіант 5				Варіант 6			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	1:03	49	20:47	1	22:35	49	14:15
2	1:26	50	21:08	2	0:45	50	15:00
3	1:33	51	21:27	3	0:50	51	15:35
4	1:43	52	21:40	4	1:20	52	16:00
5	1:57	53	21:53	5	2:01	53	16:03
6	2:05	54	22:02	6	2:12	54	16:10
7	2:32	55	22:19	7	2:23	55	16:21
8	3:01	56	22:30	8	2:30	56	16:32
9	3:15	57	22:38	9	2:45	57	16:35
10	3:42	58	23:45	10	3:45	58	16:55
11	4:20	59	0:06	11	4:01	59	18:01
12	4:38	60	0:24	12	4:03	60	18:08
13	5:01	61	0:42	13	4:05	61	19:09
14	5:24	62	1:05	14	4:28	62	19:20
15	6:35	63	1:25	15	4:39	63	19:35
16	7:15	64	1:25	16	4:39	64	20:06
17	8:40	65	2:17	17	4:45	65	20:11
18	9:08	66	2:51	18	5:07	66	20:23
19	9:16	67	3:10	19	5:18	67	20:50
20	9:40	68	3:32	20	5:20	68	22:15
21	10:03	69	4:12	21	5:33	69	22:55
22	10:20	70	5:08	22	5:45	70	23:58
23	10:30	71	5:31	23	6:05	71	1:09
24	10:48	72	6:10	24	6:12	72	1:59
25	11:12	73	6:23	25	6:25	73	2:40
26	12:35	74	6:48	26	6:30	74	2:50
27	12:53	75	7:15	27	6:56	75	2:55
28	13:15	76	8:57	28	7:20	76	4:35
29	13:25	77	9:18	29	8:01	77	5:50
30	13:40	78	9:34	30	8:05	78	5:55
31	13:58	79	10:07	31	8:30	79	6:10
32	14:57	80	10:48	32	8:56	80	6:59
33	15:22	81	11:00	33	9:10	81	7:19
34	16:27	82	11:15	34	10:10	82	7:50
35	16:32	83	11:42	35	11:15	83	7:55
36	17:06	84	12:20	36	11:20	84	8:05
37	17:35	85	12:38	37	11:30	85	8:40
38	17:45	86	13:17	38	11:31	86	8:49
39	17:55	87	13:28	39	11:41	87	9:49
40	18:02	88	13:32	40	11:45	88	10:20
41	18:21	89	13:40	41	11:56	89	10:40
42	18:35	90	14:27	42	12:01	90	10:45
43	19:04	91	14:34	43	12:12	91	10:57
44	19:20	92	14:40	44	12:30	92	11:05
45	19:33	93	15:30	45	12:41	93	11:24
46	19:47	94	15:40	46	12:55	94	11:25
47	19:58	95	15:50	47	13:25	95	12:00
48	20:32	96	17:10	48	14:01	96	13:00

Варіант 7				Варіант 8			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	18:35	49	11:35	1	18:01	49	9:01
2	18:41	50	12:10	2	18:22	50	9:30
3	20:15	51	12:47	3	18:40	51	9:41
4	20:20	52	12:52	4	19:15	52	10:05
5	20:40	53	13:22	5	19:30	53	11:05
6	20:50	54	13:52	6	20:05	54	11:15
7	20:55	55	14:20	7	20:10	55	11:26
8	21:56	56	14:35	8	20:40	56	11:30
9	22:03	57	14:46	9	20:42	57	13:10
10	22:18	58	15:00	10	20:56	58	13:25
11	22:25	59	15:02	11	21:15	59	13:30
12	22:35	60	15:20	12	21:17	60	13:45
13	23:45	61	15:22	13	21:32	61	13:45
14	23:50	62	16:40	14	21:48	62	14:15
15	23:56	63	17:05	15	21:59	63	14:18
16	0:10	64	17:10	16	22:05	64	14:29
17	0:20	65	17:25	17	22:15	65	14:41
18	0:35	66	17:48	18	22:35	66	15:20
19	0:44	67	17:58	19	22:47	67	15:32
20	2:03	68	18:40	20	22:58	68	15:59
21	2:17	69	18:49	21	23:15	69	16:30
22	2:35	70	19:03	22	23:40	70	17:10
23	2:40	71	19:15	23	23:49	71	17:20
24	3:30	72	19:30	24	0:40	72	17:50
25	3:40	73	19:35	25	0:48	73	18:10
26	3:45	74	19:35	26	1:06	74	18:50
27	3:52	75	21:03	27	2:06	75	18:55
28	5:05	76	21:08	28	2:20	76	19:20
29	5:10	77	21:30	29	2:35	77	19:47
30	5:15	78	22:20	30	2:47	78	19:50
31	6:05	79	22:28	31	3:05	79	20:30
32	6:26	80	22:43	32	4:45	80	20:57
33	6:27	81	23:30	33	5:00	81	21:38
34	6:45	82	23:37	34	5:15	82	22:07
35	7:10	83	23:42	35	5:20	83	22:10
36	7:55	84	0:10	36	5:35	84	22:46
37	8:13	85	0:13	37	5:47	85	22:47
38	8:20	86	0:15	38	5:58	86	22:59
39	8:25	87	1:13	39	6:02	87	23:25
40	8:40	88	1:19	40	6:10	88	23:46
41	8:55	89	1:25	41	6:43	89	23:59
42	9:04	90	1:28	42	7:05	90	0:10
43	9:18	91	1:38	43	7:25	91	0:45
44	10:40	92	1:48	44	7:33	92	1:20
45	10:44	93	2:08	45	8:01	93	2:40
46	11:00	94	2:25	46	8:08	94	2:50
47	11:02	95	2:45	47	8:25	95	2:59
48	11:20	96	3:05	48	8:30	96	3:20

Варіант 9				Варіант 10			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	0:04	49	16:25	1	0:07	49	13:38
2	0:10	50	16:35	2	0:10	50	14:24
3	0:21	51	16:35	3	0:23	51	15:08
4	0:32	52	16:50	4	1:00	52	15:15
5	1:15	53	17:40	5	1:18	53	15:17
6	1:30	54	18:01	6	1:30	54	15:48
7	2:01	55	18:15	7	1:50	55	15:50
8	2:15	56	18:30	8	2:12	56	16:15
9	2:28	57	18:50	9	2:25	57	16:20
10	2:40	58	19:20	10	2:30	58	16:20
11	2:45	59	19:59	11	2:40	59	16:51
12	2:50	60	20:10	12	2:50	60	17:05
13	3:48	61	20:45	13	3:15	61	17:12
14	3:50	62	22:45	14	3:38	62	17:20
15	3:58	63	22:49	15	3:50	63	17:40
16	4:15	64	22:54	16	4:15	64	18:15
17	4:44	65	22:59	17	4:32	65	18:37
18	5:02	66	23:15	18	4:55	66	18:50
19	5:08	67	23:25	19	5:08	67	19:18
20	5:43	68	23:36	20	5:15	68	19:40
21	6:02	69	23:47	21	5:22	69	19:45
22	6:26	70	23:51	22	6:01	70	20:09
23	7:12	71	0:09	23	6:15	71	20:11
24	7:22	72	0:30	24	7:05	72	20:20
25	7:40	73	0:35	25	7:25	73	20:26
26	8:01	74	1:01	26	7:35	74	21:01
27	8:15	75	1:48	27	7:45	75	21:05
28	9:15	76	2:38	28	8:10	76	21:10
29	9:35	77	3:01	29	8:20	77	21:25
30	9:44	78	3:05	30	8:28	78	22:41
31	9:53	79	3:10	31	8:38	79	22:45
32	10:05	80	3:52	32	8:53	80	22:50
33	10:15	81	4:02	33	9:00	81	22:54
34	10:26	82	4:18	34	9:22	82	23:00
35	10:34	83	4:30	35	9:35	83	23:15
36	11:12	84	5:05	36	9:44	84	23:20
37	11:37	85	5:35	37	10:10	85	23:35
38	11:53	86	5:38	38	10:34	86	23:45
39	12:04	87	6:05	39	10:53	87	23:50
40	12:20	88	6:55	40	11:05	88	23:55
41	12:43	89	7:35	41	11:18	89	0:35
42	13:00	90	7:40	42	11:22	90	0:43
43	14:10	91	7:48	43	11:45	91	1:03
44	14:22	92	8:15	44	12:10	92	1:20
45	14:23	93	8:25	45	12:34	93	1:27
46	14:50	94	9:15	46	13:15	94	2:15
47	15:55	95	9:35	47	13:18	95	2:20
48	16:01	96	9:53	48	13:24	96	2:30

Варіант 11				Варіант 12			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	2:40	49	19:59	1	5:22	49	19:45
2	2:50	50	20:10	2	6:01	50	20:09
3	3:48	51	20:45	3	6:15	51	20:11
4	3:50	52	22:45	4	7:05	52	20:20
5	3:58	53	22:49	5	7:25	53	20:26
6	4:15	54	22:54	6	7:35	54	21:01
7	4:44	55	22:59	7	7:45	55	21:05
8	5:02	56	23:15	8	8:10	56	21:10
9	5:08	57	23:25	9	8:20	57	21:25
10	5:43	58	23:36	10	8:37	58	22:40
11	6:02	59	23:47	11	8:38	59	22:45
12	6:26	60	23:51	12	8:53	60	22:50
13	7:12	61	0:09	13	9:00	61	22:54
14	7:12	62	0:30	14	9:22	62	23:00
15	7:40	63	0:35	15	9:35	63	23:15
16	8:01	64	1:01	16	9:44	64	23:20
17	8:15	65	1:48	17	10:00	65	23:35
18	9:15	66	2:38	18	10:34	66	23:45
19	9:35	67	3:01	19	10:53	67	23:50
20	9:44	68	3:05	20	11:05	68	23:55
21	9:53	69	3:10	21	11:18	69	0:35
22	10:05	70	3:52	22	11:22	70	0:43
23	10:15	71	4:02	23	11:45	71	1:03
24	10:26	72	4:19	24	12:10	72	1:20
25	10:34	73	4:30	25	12:34	73	1:27
26	11:12	74	5:05	26	13:15	74	2:15
27	11:37	75	5:36	27	13:18	75	2:20
28	11:53	76	5:39	28	13:24	76	2:30
29	12:04	77	6:05	29	13:38	77	2:33
30	12:21	78	6:55	30	14:24	78	2:46
31	12:43	79	7:35	31	15:08	79	3:23
32	13:00	80	7:40	32	15:15	80	3:41
33	14:10	81	7:48	33	15:17	81	3:53
34	14:22	82	8:15	34	15:48	82	4:13
35	14:23	83	8:25	35	15:50	83	4:35
36	14:50	84	9:15	36	16:15	84	4:48
37	15:55	85	9:35	37	16:20	85	4:58
38	16:02	86	9:53	38	16:20	86	5:08
39	16:25	87	10:00	39	17:00	87	5:33
40	16:35	88	10:12	40	17:05	88	5:56
41	16:40	89	10:24	41	17:12	89	6:08
42	16:50	90	11:07	42	17:20	90	6:33
43	17:40	91	11:22	43	17:40	91	6:50
44	18:01	92	11:53	44	18:15	92	7:13
45	18:15	93	12:07	45	18:37	93	7:25
46	18:30	94	12:20	46	18:50	94	7:48
47	18:50	95	12:32	47	19:18	95	8:01
48	19:20	96	12:47	48	19:40	96	8:08

Варіант 13				Варіант 14			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	22:25	49	15:12	1	21:15	49	13:30
2	22:35	50	15:20	2	21:17	50	13:45
3	23:45	51	15:32	3	21:32	51	13:45
4	23:50	52	16:00	4	21:48	52	14:15
5	23:56	53	17:05	5	21:59	53	14:18
6	0:10	54	17:10	6	22:05	54	14:29
7	0:20	55	17:25	7	22:15	55	14:41
8	0:35	56	17:48	8	22:35	56	15:20
9	0:56	57	17:58	9	22:47	57	15:32
10	2:03	58	18:40	10	22:58	58	15:59
11	2:17	59	18:49	11	23:15	59	16:30
12	2:35	60	19:03	12	23:40	60	17:10
13	2:40	61	19:15	13	23:49	61	17:20
14	3:30	62	19:30	14	0:40	62	17:50
15	3:40	63	19:35	15	0:48	63	18:10
16	3:45	64	19:35	16	1:06	64	18:50
17	3:52	65	20:00	17	2:06	65	18:55
18	5:05	66	20:30	18	2:20	66	19:20
19	5:10	67	21:30	19	2:35	67	19:47
20	5:15	68	22:20	20	2:47	68	19:50
21	6:05	69	22:28	21	3:05	69	20:30
22	6:26	70	22:43	22	4:45	70	20:57
23	6:27	71	23:30	23	5:0	71	21:38
24	6:45	72	23:37	24	5:15	72	22:07
25	7:10	73	23:42	25	5:20	73	22:10
26	7:55	74	0:10	26	5:35	74	22:46
27	8:13	75	0:13	27	5:47	75	22:47
28	8:20	76	0:15	28	5:58	76	22:59
29	8:25	77	1:13	29	6:02	77	23:25
30	8:40	78	1:19	30	6:10	78	23:46
31	8:55	79	1:25	31	6:43	79	23:59
32	9:04	80	1:28	32	7:05	80	0:10
33	9:18	81	1:38	33	7:25	81	0:45
34	10:41	82	1:48	34	7:33	82	1:20
35	10:44	83	2:05	35	8:01	83	2:40
36	11:00	84	2:25	36	8:08	84	2:50
37	11:12	85	2:45	37	8:25	85	2:59
38	11:20	86	3:05	38	8:30	86	3:20
39	12:00	87	3:11	39	9:01	87	3:41
40	12:10	88	3:45	40	9:30	88	3:59
41	12:47	89	3:50	41	9:41	89	4:34
42	12:52	90	4:10	42	10:05	90	4:49
43	13:22	91	4:20	43	11:05	91	5:24
44	13:53	92	4:25	44	11:15	92	5:29
45	14:20	93	5:26	45	11:26	93	6:00
46	14:35	94	5:33	46	11:30	94	6:02
47	14:46	95	5:48	47	13:10	95	6:16
48	15:00	96	5:55	48	13:25	96	6:28

Варіант 15				Варіант 16			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	20:43	49	19:25	1	9:38	49	1:50
2	20:59	50	19:40	2	9:47	50	2:23
3	21:35	51	20:50	3	10:11	51	2:26
4	22:14	52	21:07	4	10:43	52	2:45
5	22:25	53	21:50	5	10:48	53	3:10
6	22:56	54	22:37	6	11:20	54	3:15
7	23:10	55	22:40	7	11:40	55	3:40
8	0:00	56	22:51	8	11:50	56	4:02
9	0:10	57	0:09	9	12:03	57	4:15
10	0:48	58	0:20	10	13:37	58	5:15
11	0:50	59	0:32	11	14:00	59	5:20
12	0:59	60	0:57	12	14:05	60	5:43
13	1:17	61	1:20	13	14:05	61	6:55
14	1:40	62	1:35	14	14:25	62	7:07
15	3:20	63	1:50	15	14:30	63	7:38
16	3:50	64	2:30	16	14:42	64	7:45
17	4:20	65	2:45	17	14:45	65	7:55
18	4:50	66	3:40	18	15:42	66	8:10
19	5:20	67	3:50	19	16:15	67	9:25
20	5:35	68	4:30	20	16:17	68	9:40
21	6:20	69	4:59	21	16:35	69	9:45
22	6:40	70	5:37	22	17:25	70	9:55
23	7:20	71	5:47	23	17:35	71	9:57
24	7:30	72	6:30	24	17:40	72	10:45
25	7:35	73	6:55	25	17:46	73	11:20
26	7:50	74	6:57	26	17:53	74	11:30
27	7:50	75	7:57	27	18:32	75	11:35
28	9:30	76	8:35	28	19:15	76	11:55
29	10:10	77	9:10	29	19:30	77	12:50
30	10:25	78	9:20	30	19:40	78	13:02
31	11:40	79	9:31	31	19:55	79	13:20
32	11:50	80	9:45	32	21:13	80	13:55
33	12:41	81	10:01	33	21:18	81	14:30
34	12:55	82	11:07	34	21:32	82	14:50
35	13:25	83	12:10	35	21:40	83	15:20
36	13:41	84	12:28	36	21:57	84	15:31
37	14:38	85	12:37	37	22:52	85	15:42
38	14:46	86	13:00	38	23:07	86	15:45
39	15:40	87	13:50	39	23:15	87	15:50
40	16:30	88	14:10	40	23:20	88	15:57
41	16:51	89	14:22	41	23:22	89	16:05
42	17:10	90	14:49	42	23:40	90	17:15
43	17:25	91	15:07	43	23:50	91	17:30
44	17:28	92	15:47	44	23:57	92	18:10
45	17:50	93	16:12	45	0:56	93	18:35
46	18:00	94	16:42	46	0:57	94	19:05
47	18:49	95	17:17	47	1:10	95	19:35
48	18:55	96	17:52	48	1:27	96	20:10

Варіант 17				Варіант 18			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	1:30	49	0:40	1	8:00	49	4:10
2	1:55	50	2:25	2	9:50	50	4:12
3	2:25	51	2:37	3	9:59	51	4:24
4	3:13	52	2:45	4	10:10	52	4:54
5	3:25	53	3:32	5	10:20	53	5:00
6	3:55	54	3:50	6	10:45	54	5:20
7	4:28	55	4:45	7	10:47	55	6:20
8	5:16	56	4:55	8	11:20	56	6:45
9	5:45	57	5:25	9	11:53	57	7:55
10	5:53	58	6:01	10	12:30	58	8:15
11	6:40	59	6:42	11	12:41	59	8:48
12	6:59	60	7:32	12	12:52	60	8:55
13	7:40	61	7:45	13	13:10	61	9:10
14	7:59	62	7:51	14	14:30	62	9:15
15	8:27	63	8:05	15	15:01	63	9:17
16	8:35	64	8:42	16	15:15	64	9:27
17	8:45	65	9:00	17	15:16	65	9:37
18	8:59	66	10:00	18	15:27	66	9:59
19	10:00	67	11:02	19	15:38	67	10:10
20	10:57	68	11:25	20	15:59	68	10:40
21	11:47	69	11:30	21	17:20	69	10:58
22	12:25	70	11:55	22	17:20	70	11:20
23	13:17	71	12:15	23	17:40	71	11:59
24	15:09	72	12:57	24	18:35	72	12:06
25	16:03	73	13:22	25	18:40	73	12:18
26	16:15	74	13:32	26	18:50	74	12:30
27	16:28	75	14:07	27	18:59	75	12:41
28	16:40	76	14:25	28	19:41	76	12:49
29	16:52	77	15:57	29	19:58	77	12:59
30	17:37	78	16:02	30	20:25	78	13:08
31	17:50	79	16:50	31	20:37	79	13:48
32	18:30	80	16:57	32	20:48	80	13:54
33	18:57	81	16:58	33	20:55	81	14:10
34	19:10	82	17:30	34	22:20	82	14:25
35	19:37	83	17:47	35	22:31	83	14:55
36	19:47	84	18:47	36	22:42	84	15:40
37	19:57	85	18:57	37	23:58	85	15:50
38	20:22	86	20:12	38	0:15	86	15:59
39	20:22	87	20:22	39	0:19	87	16:30
40	20:50	88	20:32	40	0:22	88	16:41
41	21:00	89	20:50	41	0:50	89	16:53
42	21:40	90	20:57	42	0:57	90	17:07
43	22:00	91	22:10	43	1:59	91	18:10
44	22:35	92	22:37	44	2:10	92	18:35
45	22:58	93	23:10	45	2:20	93	18:55
46	23:42	94	23:57	46	2:31	94	19:00
47	0:15	95	0:10	47	2:58	95	19:15
48	0:30	96	0:40	48	3:41	96	19:26

Варіант 19				Варіант 20			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	19:03	49	18:28	1	8:40	49	0:57
2	19:40	50	18:50	2	9:53	50	1:56
3	20:05	51	19:03	3	9:55	51	1:57
4	20:35	52	19:49	4	10:00	52	2:10
5	21:10	53	19:55	5	10:17	53	2:27
6	21:46	54	20:25	6	10:38	54	2:50
7	21:59	55	20:40	7	10:47	55	3:23
8	22:35	56	21:50	8	11:10	56	3:25
9	23:14	57	22:10	9	11:43	57	3:45
10	23:28	58	22:50	10	11:48	58	4:10
11	23:55	59	23:35	11	12:20	59	4:15
12	0:10	60	23:40	12	12:40	60	4:40
13	1:00	61	23:51	13	12:50	61	5:02
14	1:10	62	1:09	14	13:03	62	5:15
15	1:48	63	1:20	15	14:37	63	6:15
16	1:50	64	1:32	16	15:00	64	6:20
17	1:59	65	1:57	17	15:05	65	6:43
18	2:17	66	2:22	18	15:05	66	7:55
19	2:40	67	2:35	19	15:25	67	8:07
20	4:20	68	2:50	20	15:30	68	8:38
21	4:50	69	3:30	21	15:42	69	8:45
22	5:20	70	3:45	22	15:45	70	8:55
23	5:50	71	4:40	23	16:42	71	9:10
24	6:20	72	4:50	24	17:15	72	10:18
25	6:35	73	5:30	25	17:17	73	10:40
26	7:20	74	5:59	26	17:35	74	10:45
27	7:40	75	6:37	27	18:22	75	10:55
28	8:20	76	6:47	28	18:35	76	10:57
29	8:30	77	7:30	29	18:40	77	11:45
30	8:35	78	7:55	30	18:46	78	12:20
31	8:50	79	7:57	31	18:53	79	12:30
32	8:50	80	8:57	32	19:30	80	12:35
33	10:30	81	9:35	33	20:15	81	12:55
34	11:10	82	10:10	34	20:30	82	13:50
35	11:25	83	10:20	35	20:40	83	14:02
36	12:40	84	10:31	36	20:55	84	14:20
37	12:55	85	10:45	37	22:15	85	14:55
38	13:41	86	11:01	38	22:18	86	15:30
39	13:55	87	12:07	39	22:30	87	15:50
40	14:25	88	13:10	40	22:40	88	16:20
41	14:43	89	13:28	41	22:57	89	16:30
42	15:38	90	13:37	42	23:50	90	16:40
43	15:46	91	14:00	43	0:07	91	16:45
44	16:40	92	14:50	44	0:15	92	16:50
45	17:30	93	15:10	45	0:20	93	16:57
46	17:51	94	15:22	46	0:22	94	17:06
47	18:13	95	15:49	47	0:40	95	18:15
48	18:25	96	16:07	48	0:50	96	18:30

Варіант 21				Варіант 22			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	2:03	49	21:47	1	23:30	49	15:15
2	2:26	50	22:08	2	1:45	50	15:30
3	2:33	51	22:27	3	1:50	51	16:35
4	2:43	52	22:40	4	2:20	52	16:37
5	2:57	53	22:53	5	3:05	53	17:03
6	3:05	54	23:02	6	3:12	54	17:10
7	3:32	55	23:19	7	3:23	55	17:21
8	4:01	56	23:30	8	3:30	56	17:32
9	4:15	57	23:30	9	3:45	57	17:35
10	4:42	58	0:45	10	4:45	58	17:55
11	5:20	59	1:06	11	5:00	59	19:01
12	5:38	60	1:24	12	5:03	60	19:08
13	6:01	61	1:42	13	5:05	61	20:09
14	6:24	62	2:05	14	5:28	62	20:20
15	7:35	63	2:25	15	5:39	63	20:35
16	8:15	64	2:55	16	5:39	64	21:06
17	9:40	65	3:17	17	5:45	65	21:11
18	10:08	66	3:51	18	6:07	66	21:23
19	10:16	67	4:10	19	6:18	67	21:50
20	11:00	68	4:32	20	6:20	68	23:15
21	11:03	69	5:12	21	6:33	69	23:35
22	11:20	70	6:08	22	6:45	70	0:58
23	11:30	71	6:31	23	7:05	71	2:09
24	11:48	72	7:10	24	7:12	72	2:59
25	12:12	73	7:23	25	7:25	73	3:40
26	13:35	74	7:48	26	7:30	74	3:50
27	13:53	75	8:15	27	7:36	75	3:55
28	14:15	76	9:57	28	8:20	76	5:35
29	14:25	77	10:18	29	9:01	77	6:50
30	14:40	78	10:34	30	9:05	78	6:55
31	14:58	79	11:07	31	9:45	79	7:10
32	15:57	80	11:48	32	9:56	80	7:59
33	16:22	81	12:12	33	10:10	81	8:19
34	17:27	82	12:15	34	11:10	82	8:50
35	17:32	83	12:42	35	12:15	83	8:55
36	18:06	84	13:20	36	12:20	84	9:05
37	18:35	85	13:38	37	12:30	85	9:40
38	18:45	86	14:17	38	12:31	86	9:49
39	18:55	87	14:30	39	12:41	87	10:49
40	19:02	88	14:46	40	12:45	88	11:20
41	19:21	89	14:59	41	12:56	89	11:31
42	19:35	90	15:27	42	13:01	90	11:45
43	20:04	91	15:52	43	13:12	91	11:57
44	20:20	92	16:12	44	13:30	92	12:05
45	20:33	93	16:30	45	13:45	93	12:17
46	20:47	94	17:01	46	13:55	94	12:25
47	20:58	95	17:10	47	14:25	95	12:30
48	21:32	96	18:10	48	15:01	96	12:49

Варіант 23				Варіант 24			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	19:33	49	12:35	1	19:01	49	10:01
2	19:41	50	13:10	2	19:22	50	10:30
3	21:15	51	13:47	3	19:40	51	10:41
4	21:20	52	13:52	4	20:15	52	11:05
5	21:40	53	14:22	5	20:30	53	12:05
6	21:50	54	14:52	6	21:05	54	12:15
7	21:55	55	15:20	7	21:10	55	12:26
8	22:56	56	15:35	8	21:40	56	12:30
9	23:03	57	15:46	9	21:42	57	14:10
10	23:18	58	16:00	10	21:56	58	14:25
11	23:25	59	16:02	11	22:15	59	14:30
12	23:35	60	16:20	12	22:17	60	14:45
13	0:45	61	16:22	13	22:32	61	14:45
14	0:50	62	17:40	14	22:48	62	15:15
15	0:56	63	18:05	15	22:59	63	15:18
16	1:10	64	18:10	16	23:05	64	15:29
17	1:20	65	18:25	17	23:15	65	15:41
18	1:35	66	18:48	18	23:35	66	16:20
19	1:44	67	18:58	19	23:47	67	16:32
20	3:03	68	19:40	20	23:58	68	16:59
21	3:17	69	19:49	21	0:15	69	17:30
22	3:35	70	20:03	22	0:40	70	18:10
23	3:40	71	20:15	23	0:49	71	18:20
24	4:30	72	20:30	24	1:40	72	18:50
25	4:40	73	20:35	25	1:48	73	19:10
26	4:45	74	20:35	26	2:06	74	19:50
27	4:52	75	21:03	27	3:06	75	19:55
28	6:05	76	21:08	28	3:20	76	20:20
29	6:10	77	22:30	29	3:35	77	20:47
30	6:15	78	23:20	30	3:47	78	20:50
31	7:05	79	23:28	31	4:05	79	21:30
32	7:26	80	23:43	32	5:45	80	21:57
33	7:27	81	0:30	33	6:00	81	22:38
34	7:45	82	0:37	34	6:15	82	23:07
35	8:10	83	0:42	35	6:20	83	23:10
36	8:55	84	1:10	36	6:35	84	23:46
37	9:13	85	1:13	37	6:47	85	23:47
38	9:20	86	1:15	38	6:58	86	23:59
39	9:25	87	2:13	39	7:02	87	0:25
40	9:40	88	2:19	40	7:10	88	0:46
41	9:55	89	2:25	41	7:43	89	0:59
42	10:04	90	2:28	42	8:05	90	1:10
43	10:18	91	2:38	43	8:25	91	1:45
44	11:40	92	2:48	44	8:33	92	2:20
45	11:44	93	3:08	45	9:01	93	3:40
46	12:00	94	3:25	46	9:08	94	3:50
47	12:02	95	3:45	47	9:25	95	3:59
48	12:20	96	4:08	48	9:30	96	4:20

Варіант 25				Варіант 26			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	1:05	49	17:25	1	1:07	49	14:38
2	1:10	50	17:35	2	1:10	50	15:24
3	1:21	51	17:35	3	1:23	51	16:08
4	1:32	52	17:50	4	2:00	52	16:15
5	2:15	53	18:40	5	2:18	53	16:17
6	2:30	54	19:01	6	2:30	54	16:48
7	3:01	55	19:15	7	2:50	55	16:50
8	3:15	56	19:30	8	3:12	56	17:15
9	3:28	57	19:50	9	3:25	57	17:20
10	3:40	58	20:20	10	3:30	58	17:20
11	3:45	59	20:59	11	3:40	59	17:51
12	3:50	60	21:10	12	3:50	60	18:05
13	4:48	61	21:45	13	4:15	61	18:12
14	4:50	62	23:45	14	4:38	62	18:20
15	4:58	63	23:49	15	4:50	63	18:40
16	5:15	64	23:54	16	5:15	64	19:15
17	5:44	65	23:59	17	5:32	65	19:37
18	6:02	66	0:15	18	5:55	66	19:50
19	6:08	67	0:25	19	6:08	67	20:18
20	6:43	68	0:36	20	6:15	68	20:40
21	7:02	69	0:47	21	6:22	69	20:45
22	7:26	70	0:51	22	7:01	70	21:09
23	8:12	71	1:09	23	7:15	71	21:11
24	8:22	72	1:30	24	8:05	72	21:20
25	8:40	73	1:35	25	8:25	73	21:26
26	9:01	74	2:01	26	8:35	74	22:01
27	9:15	75	2:48	27	8:45	75	22:05
28	10:15	76	3:38	28	9:10	76	22:10
29	10:35	77	4:01	29	9:20	77	22:25
30	10:44	78	4:05	30	9:28	78	23:40
31	10:53	79	4:10	31	9:38	79	23:45
32	11:05	80	4:52	32	9:53	80	23:50
33	11:15	81	5:02	33	10:00	81	23:54
34	11:26	82	5:18	34	10:22	82	0:00
35	11:34	83	5:30	35	10:35	83	0:15
36	12:12	84	6:05	36	10:44	84	0:20
37	12:37	85	6:35	37	11:10	85	0:35
38	12:53	86	6:38	38	11:34	86	0:45
39	13:04	87	7:05	39	11:53	87	0:50
40	13:20	88	7:55	40	12:05	88	0:55
41	13:43	89	8:35	41	12:18	89	1:35
42	14:00	90	8:40	42	12:22	90	1:43
43	15:10	91	8:48	43	12:45	91	2:03
44	15:22	92	9:15	44	13:10	92	2:20
45	15:23	93	9:25	45	13:34	93	2:27
46	15:50	94	10:15	46	14:15	94	3:15
47	16:55	95	10:35	47	14:18	95	3:20
48	17:01	96	10:53	48	14:24	96	3:30

Варіант 27				Варіант 28			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	3:46	49	20:59	1	6:25	49	20:45
2	3:50	50	21:10	2	7:01	50	21:09
3	4:48	51	21:45	3	7:15	51	21:11
4	4:50	52	23:45	4	8:05	52	21:20
5	4:58	53	23:49	5	8:25	53	21:26
6	5:15	54	23:54	6	8:35	54	22:01
7	5:44	55	23:59	7	8:45	55	22:05
8	6:02	56	0:15	8	9:10	56	22:10
9	6:08	57	0:25	9	9:20	57	22:25
10	6:43	58	0:36	10	9:28	58	23:40
11	7:02	59	0:47	11	9:38	59	23:45
12	7:26	60	0:51	12	9:53	60	23:50
13	8:12	61	1:09	13	10:00	61	23:54
14	8:12	62	1:30	14	10:22	62	0:00
15	8:40	63	1:35	15	10:35	63	0:15
16	9:01	64	2:01	16	10:44	64	0:20
17	9:15	65	2:48	17	11:10	65	0:35
18	10:15	66	3:38	18	11:34	66	0:45
19	10:35	67	4:01	19	11:53	67	0:50
20	10:44	68	4:05	20	12:05	68	0:55
21	10:53	69	4:10	21	12:18	69	1:35
22	11:05	70	4:52	22	12:22	70	1:43
23	11:15	71	5:02	23	12:45	71	2:03
24	11:26	72	5:19	24	13:10	72	2:20
25	11:34	73	5:30	25	13:34	73	2:27
26	12:12	74	6:05	26	14:15	74	3:15
27	12:37	75	6:36	27	14:18	75	3:20
28	12:53	76	6:39	28	14:24	76	3:30
29	13:04	77	7:05	29	14:38	77	3:33
30	13:21	78	7:55	30	15:24	78	3:46
31	13:43	79	8:35	31	16:08	79	4:23
32	14:00	80	8:40	32	16:15	80	4:41
33	15:10	81	8:48	33	16:17	81	4:53
34	15:22	82	9:15	34	16:48	82	5:13
35	15:23	83	9:25	35	16:50	83	5:35
36	15:50	84	10:15	36	17:15	84	5:48
37	16:55	85	10:35	37	17:20	85	5:58
38	17:02	86	10:53	38	17:20	86	6:08
39	17:25	87	11:00	39	17:51	87	6:33
40	17:35	88	11:12	40	18:05	88	6:56
41	17:45	89	11:24	41	18:12	89	7:08
42	17:50	90	12:07	42	18:20	90	7:33
43	18:40	91	12:22	43	18:40	91	7:50
44	19:01	92	12:53	44	19:15	92	8:13
45	19:15	93	13:07	45	19:37	93	8:25
46	19:30	94	13:20	46	19:50	94	8:48
47	19:50	95	13:32	47	20:18	95	9:01
48	20:20	96	13:47	48	20:40	96	9:08

Варіант 29				Варіант 30			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	23:25	49	16:02	1	22:15	49	14:35
2	23:35	50	16:20	2	22:17	50	14:45
3	0:45	51	16:22	3	22:32	51	14:45
4	0:50	52	17:40	4	22:48	52	15:15
5	0:56	53	18:05	5	22:59	53	15:18
6	1:10	54	18:10	6	23:05	54	15:29
7	1:20	55	18:25	7	23:15	55	15:41
8	1:35	56	18:48	8	23:35	56	16:20
9	1:44	57	18:58	9	23:47	57	16:32
10	2:14	58	19:40	10	23:58	58	16:59
11	3:17	59	19:49	11	0:15	59	17:30
12	3:35	60	20:03	12	0:40	60	18:10
13	3:40	61	20:15	13	0:49	61	18:20
14	4:30	62	20:30	14	1:40	62	18:50
15	4:40	63	20:35	15	1:48	63	19:10
16	4:45	64	20:35	16	2:06	64	19:50
17	4:52	65	22:03	17	3:06	65	19:55
18	6:05	66	22:08	18	3:20	66	19:55
19	6:10	67	22:30	19	3:35	67	20:20
20	6:15	68	23:20	20	3:47	68	20:47
21	7:05	69	23:28	21	4:05	69	20:50
22	7:26	70	23:43	22	5:45	70	21:30
23	7:27	71	0:30	23	6:00	71	21:57
24	7:45	72	0:37	24	6:15	72	22:38
25	8:10	73	0:42	25	6:20	73	23:07
26	8:55	74	1:10	26	6:35	74	23:10
27	9:13	75	1:13	27	6:47	75	23:46
28	9:20	76	1:15	28	6:58	76	23:47
29	9:25	77	2:13	29	7:02	77	23:59
30	9:40	78	2:19	30	7:10	78	0:25
31	9:55	79	2:25	31	7:43	79	0:46
32	10:04	80	2:28	32	8:05	80	0:59
33	10:18	81	2:38	33	8:25	81	1:10
34	10:46	82	2:48	34	8:33	82	1:45
35	11:44	83	3:05	35	9:01	83	2:20
36	12:00	84	3:25	36	9:08	84	3:40
37	12:02	85	3:45	37	9:25	85	3:50
38	12:20	86	4:05	38	9:30	86	3:59
39	12:35	87	4:11	39	10:01	87	4:20
40	13:10	88	4:45	40	10:30	88	4:41
41	13:47	89	4:50	41	10:41	89	4:59
42	13:52	90	5:10	42	11:05	90	5:34
43	14:22	91	5:20	43	12:05	91	5:49
44	14:53	92	5:25	44	12:15	92	6:24
45	15:20	93	6:26	45	12:26	93	6:29
46	15:35	94	6:33	46	12:30	94	7:00
47	15:46	95	6:48	47	13:14	95	7:02
48	16:00	96	6:55	48	14:25	96	7:16

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою розробки та дослідження лінійної кореляційної моделі на основі статистичних даних.

1.2. Вивчення функціональних можливостей *Microsoft Excel* та набування практичних навичок застосування електронної таблиці.

2. Постановка задачі

Виконати кореляційний аналіз за даними спостережень змін значень двох економічних показників, які наведені в кореляційній таблиці. Передбачається лінійний зв'язок між показниками, який має вигляд:

$$y = a_0 + a_1 x. \quad (2.1)$$

3. Порядок виконання роботи

3.1. Визначити коефіцієнт кореляції між показниками y і x .

3.2. Визначити умовні середні \bar{y}_x .

3.3. За методом найменших квадратів визначити коефіцієнти a_0 і a_1 моделі регресії. $\bar{y}_x = a_0 + a_1 x$.

3.4. У системі координат xu побудувати суміщений графік умовних середніх \bar{y}_x та їх розрахункових значень $\bar{y}_{xp} = f(x)$.

3.5. Визначити розрахункове значення критерію Фішера F_p і порівняти його з теоретичним F_t .

3.6. Усі розрахунки в *Excel* виконати у табличній формі.

3.7. У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу.

4. Навчальний матеріал

4.1 Визначення коефіцієнта кореляції і умовних середніх

Кореляційна таблиця початкових даних в *Excel* має вигляд, рис. 4.1.

y	x					m _y
	1	2	3	4	5	
1	4	6	3			13
2		7	10	7		24
3			2	8	3	13
m _x	4	13	15	15	3	50

Рис. 4.1. Кореляційна таблиця (кореляційна решітка)

На перетині кожного стовпця і кожного рядка кореляційної таблиці частота m_{xy} , яка показує скільки разів при заданих значеннях x зустрілися значення y .

В останньому стовпці таблиці 1 наведені часткові суми $m_y = \sum_x m_{xy}$, а в останньому рядку – часткові суми $m_x = \sum_y m_{xy}$.

Коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$r = \frac{\sum m_{xy} \delta_x \delta_y}{n \sigma_x \sigma_y}, \quad (4.1)$$

де δ_x, δ_y – відхилення x і y відповідно їхніх загальних середніх $M(x)$ і $M(y)$:

$$\delta_x = x - M(x); \quad \delta_y = y - M(y); \quad (4.2)$$

n – загальне число спостережень;

σ_x, σ_y – середні квадратичні відхилення x і y відповідно:

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}; \quad \sigma_y = \sqrt{D(y)}. \quad (4.3)$$

Загальні середні (математичні сподівання) обчислюються у такий спосіб:

$$M(x) = \frac{\sum m_x x}{n}; \quad M(y) = \frac{\sum m_y y}{n}. \quad (4.4)$$

Дисперсії x і y визначаються за формулами:

$$D(x) = \frac{\sum (x - M(x))^2 m_x}{n}; \quad D(y) = \frac{\sum (y - M(y))^2 m_y}{n}. \quad (4.5)$$

Умовні середні дозволяють оцінити характер зміни y від зміни x і обчислюються за формулою:

$$\bar{y}_x = \frac{\sum m_{xy} y}{m_x}. \quad (4.6)$$

4.2. Визначення коефіцієнтів лінійної моделі

Коефіцієнти лінійної регресійної моделі a_0 і a_1 визначаються за методом найменших квадратів і відповідна система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_0 \sum m_x + a_1 \sum m_x x = \sum m_x \bar{y}_x \\ a_0 \sum m_x x + a_1 \sum m_x x^2 = \sum m_x \bar{y}_x x \end{cases} \quad (4.7)$$

Для спрощеного вигляду системи (4.7) запровадимо умовні позначення:

$$S_0 = \sum m_x; \quad S_1 = \sum m_x x; \quad S_2 = \sum m_x \bar{y}_x; \quad S_3 = \sum m_x x^2; \quad S_4 = \sum m_x \bar{y}_x x. \quad (4.8)$$

З урахуванням (4.8) система (4.7) матиме вигляд:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 = S_2 \\ S_1 a_0 + S_3 a_1 = S_4 \end{cases} \quad (4.9)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 системи (4.9) розраховуються за допомогою визначника другого порядку

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_1 \\ S_4 & S_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_3 - S_4 S_1}{S_0 S_3 - S_1^2};$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_1 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_4 - S_1 S_2}{S_0 S_3 - S_1^2}. \quad (4.10)$$

Для визначення коефіцієнтів регресійної моделі в *Excel* доцільно користуватися таблицею, рис. 4.2.

x	\bar{y}_x	m_x	$m_x x$	$m_x \bar{y}_x$	$m_x x^2$	$m_x \bar{y}_x x$	\bar{y}_{xp}
1		4					
2		13					
...		...					
		$\sum m_x$	$\sum m_x x$	$\sum m_x \bar{y}_x$	$\sum m_x x^2$	$\sum m_x \bar{y}_x x$	

Рис. 4.2. Таблиця розрахунку сум в *Excel*

В останньому стовпці таблиці (рис. 4.2) потрібно навести розрахункові значення умовних середніх \bar{y}_{xp} , які визначаються на основі розрахованих коефіцієнтів a_0 і a_1 за формулою:

$$\bar{y}_{xp} = a_0 + a_1 x. \quad (4.11)$$

4.3. Побудова суміщеного графіка

У системі координат xu в *Excel* будується суміщений графік умовних середніх \bar{y}_x , розрахованих за формулою (4.6), та їхніх значень \bar{y}_{xp} , отриманих на основі дослідження моделі лінійної регресії (4.11).

4.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками

Якщо коефіцієнт кореляції відмінний від нуля, то він своїм значенням характеризує не тільки наявність, а й тісноту зв'язку між показниками.

Для перевірки гіпотези про наявність лінійного зв'язку в математичній статистиці використовується критерій Фішера. Така перевірка має сенс при незначних величинах коефіцієнта кореляції.

Критерій Фішера розраховується за формулою:

$$F = \frac{a_1 D(xy)}{D(y) - a_1 D(xy)} \frac{k_2}{k_1}, \quad (4.12)$$

де a_1 – коефіцієнт лінійної моделі;

$D(xy)$ – дисперсія, що обумовлена змінною x , визначається за формулою:

$$D(xy) = \frac{\sum (x - M(x))(\bar{y}_x - M(y))m_x}{n}, \quad (4.13)$$

де n – кількість спостережень, $n = \sum m_x$;

$D(y)$ – дисперсія \bar{y}_x , що обумовлена змінною всіх факторів, під впливом яких перебуває y , визначається за формулою:

$$D(y) = \frac{\sum (\bar{y}_x - M(y))^2 m_x}{n}; \quad (4.14)$$

k_1 – кількість факторів кореляційної моделі;

k_2 – кількість спостережень, яка визначається за формулою: $k_2 = n-2$.

Для розрахунку складових формули (4.12) розробляється таблиця, рис. 4.3.

x	\bar{y}_x	m_x	$(\bar{y}_x - M(y))^2 m_x$	$(x - M(x))(\bar{y}_x - M(y))m_x$
1		4		
2		13		
....		...		
			$\sum (\bar{y}_x - M(y))^2 m_x$	$\sum (x - M(x))(\bar{y}_x - M(y))m_x$

Рис. 4.3. Таблиця розрахунку коефіцієнта кореляції в Excel

Гіпотеза про наявність зв'язку між показниками приймається, якщо розрахункове значення критерію Фішера F більше теоретичного (або нормованого) значення F_t , яке визначається за статистичними таблицями для конкретного числа спостережень і прийнятого рівня значущості α ($\alpha=1-p$)

$$F > F_t \quad (4.15)$$

5. Контрольні запитання та завдання

- 5.1. Дати визначення кореляційної моделі.
- 5.2. Як оцінюється зв'язок між показниками?
- 5.3. Навести основні задачі кореляційного аналізу.
- 5.4. У яких межах змінюється коефіцієнт кореляції?
- 5.5. Як перевіряється гіпотеза про наявність лінійного зв'язку між досліджуваними показниками?

6. Варіанти індивідуальних завдань

У таблиці 6.1 наведено фрагмент статистичної таблиці для визначення теоретичних значень критерію Фішера щодо моделей, створених за індивідуальними варіантами.

Таблиця 6.1.

F -критерій для $\alpha=0,05$

n	16	20	24	30	40	50	70	100	200
F	4,49	4,35	4,26	4,17	4,08	4,03	3,98	3,94	3,89

У таблиці 6.2 подані варіанти індивідуальних завдань. Кожному варіантові відповідає номер задачі і номер таблиці, яка містить початкові дані задачі.

У таблицях 6.3–6.32 наведені дані для розв'язку конкретних задач індивідуального варіанта.

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних	Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних
1	Задача № 1	Таблиця 6.3	16	Задача № 3	Таблиця 6.18
2	Задача № 1	Таблиця 6.4	17	Задача № 3	Таблиця 6.19
3	Задача № 1	Таблиця 6.5	18	Задача № 3	Таблиця 6.20
4	Задача № 1	Таблиця 6.6	19	Задача № 3	Таблиця 6.21
5	Задача № 1	Таблиця 6.7	20	Задача № 3	Таблиця 6.22
6	Задача № 1	Таблиця 6.8	21	Задача № 3	Таблиця 6.23
7	Задача № 1	Таблиця 6.9	22	Задача № 3	Таблиця 6.24
8	Задача № 1	Таблиця 6.10	23	Задача № 3	Таблиця 6.25
9	Задача № 2	Таблиця 6.11	24	Задача № 4	Таблиця 6.26
10	Задача № 2	Таблиця 6.12	25	Задача № 4	Таблиця 6.27
11	Задача № 2	Таблиця 6.13	26	Задача № 4	Таблиця 6.28
12	Задача № 2	Таблиця 6.14	27	Задача № 4	Таблиця 6.29
13	Задача № 2	Таблиця 6.15	28	Задача № 4	Таблиця 6.30
14	Задача № 2	Таблиця 6.16	29	Задача № 4	Таблиця 6.31
15	Задача № 2	Таблиця 6.17	30	Задача № 4	Таблиця 6.32

Задача № 1. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок між довжиною і масою поїздів за даними, наведеними в таблицях 6.3–6.10.

Таблиця 6.3

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	3	6	2					11
3200–3400	1	4	8	4	2			19
3400–3600			1	6	12	7	1	27
3600–3800					1	3	4	8
m_x	4	10	11	10	15	10	5	65

Таблиця 6.4

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	5	3	1					9
3200–3400	2	7	6	3	1			19
3400–3600			2	6	13	6	2	29
3600–3800					1	4	4	9
m_x	7	10	9	9	15	10	6	66

Таблиця 6.5

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	7	1						8
3200–3400	2	9	8	4	2			25
3400–3600			4	7	11	8	4	34
3600–3800					2	4	5	11
m_x	9	10	12	11	15	12	9	78

Таблиця 6.6

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	6	2	1					9
3200–3400	3	8	8	5	2			26
3400–3600			3	8	13	8	2	34
3600–3800					1	4	6	11
m_x	9	10	12	13	16	12	8	80

Таблиця 6.7

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	2	4	1					7
3200–3400	1	4	7	5	2			19
3400–3600		1	2	8	12	7	1	31
3600–3800					2	3	5	10
m_x	3	9	10	13	16	10	6	67

Таблиця 6.8

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	4	2	2					8
3200–3400	3	7	8	5	1			24
3400–3600		1	3	9	13	5	1	32
3600–3800					2	4	3	9
m_x	7	10	13	14	16	9	4	73

Таблиця 6.9

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	4	1						5
3200–3400	5	10	9	4	2			30
3400–3600		1	5	9	12	8	4	39
3600–3800				3	3	5	6	17
m_x	9	12	14	16	17	13	10	91

Таблиця 6.10

Маса Q , т	Число вагонів у складі поїзда, m							m_y
	38–40	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50	50–52	
3000–3200	5	3						8
3200–3400	4	9	8	5	1			27
3400–3600		1	6	10	14	8	2	41
3600–3800					2	5	6	13
m_x	9	13	14	15	17	13	8	89

Задача 2. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок між випадковими величинами y і x за даними, наведеними у таблицях 6.11–6.17.

Таблиця 6.11

y	x					m_y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	4					4
3–5	9	8	2	1		20
5–7		5	9	8	3	25
7–9			4	6	2	12
m_x	13	13	15	15	5	61

Таблиця 6.12

y	x					m_y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	10	1				11
3–5	18	15	5	1		39
5–7		6	15	14	4	39
7–9			3	5	8	16
m_x	28	22	23	20	12	105

Таблиця 6.13

y	x					m_y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	5					5
3–5	8	9	2	1		20
5–7		6	10	8	2	26
7–9			4	3	6	13
m_x	13	15	16	12	8	64

Таблиця 6.14

y	x					m_y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	6	1				7
3–5	9	5	4	1		19
5–7		12	17	12	4	45
7–9			1	6	6	13
m_x	15	18	22	19	10	84

Таблиця 6.15

y	x					m_y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	3					3
3–5	8	9	1	1		19
5–7		6	10	11	5	32
7–9			4	5	6	15
m_x	11	15	15	17	11	69

Таблиця 6.16

y	x					m _y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	9					9
3–5	12	13	4	2		31
5–7		8	15	14	4	41
7–9			2	6	9	17
m _x	21	21	21	22	13	98

Таблиця 6.17

y	x					m _y
	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	
1–3	4					4
3–5	8	10	1	1		20
5–7		6	12	13	2	33
7–9			3	4	7	14
m _x	12	16	16	18	9	71

Задача № 3. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок частоти надходження різних за величиною груп від потужності призначень за даними таблиць 6.18–6.25.

Таблиця 6.18

Потужність призначень, N _п	Умовні вагони						m _y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	9	5	3	1			18
200–300	6	8	3	2	1		20
300–400	4	12	5	2	1		24
400–500	3	7	6	5	3	2	26
500–600		5	5	6	4	3	23
m _x	22	37	22	16	9	5	111

Таблиця 6.19

Потужність призначень, N _п	Умовні вагони						m _y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	8	1	1				10
200–300	5	8	4	2			19
300–400	3	9	10	7	1		30
400–500		1	8	10	11	4	34
500–600			2	3	5	6	16
m _x	16	19	25	22	17	10	109

Таблиця 6.20

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	7	6					13
200–300	5	8	4	1			18
300–400	3	5	10	5	4		27
400–500	1	1	6	9	7	4	28
500–600			3	2	3	7	15
m_x	16	20	23	17	14	11	101

Таблиця 6.21

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	10						10
200–300	7	8	6				21
300–400	5	12	15	6	1		39
400–500		6	7	11	10	4	38
500–600			1	5	6	5	17
m_x	22	26	29	22	17	9	125

Таблиця 6.22

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	9						9
200–300	6	7	3	2			18
300–400	4	12	5	4	1		26
400–500		7	8	7	4	2	28
500–600		5	5	6	4	3	23
m_x	19	31	21	19	9	5	104

Таблиця 6.23

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	7	1					8
200–300	5	8	4	2			19
300–400	2	10	13	7	1		33
400–500		1	8	10	11	4	34
500–600			2	3	5	6	16
m_x	14	20	27	22	17	10	110

Таблиця 6.24

Потужність призначень, $N_{\text{п}}$	Умовні вагони						m_y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	6	3					9
200–300	5	9	4	1			19
300–400	3	5	10	5	3		26
400–500		1	6	9	8	4	28
500–600			1	2	3	8	14
m_x	14	18	21	17	14	12	96

Таблиця 6.25

Потужність призначень, $N_{\text{п}}$	Умовні вагони						m_y
	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	
100–200	9						9
200–300	6	7	5				18
300–400	3	13	15	7	1		39
400–500		6	6	12	8	3	35
500–600			1	5	6	5	17
m_x	18	26	27	24	15	8	118

Задача № 4. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок між дослідними даними y і x , значення яких наведені в таблицях 6.26–6.32.

Таблиця 6.26

$y \backslash x$	10	15	20	25	30	m_y
1	4	1				5
2	2	5	3	1		11
3		2	9	7	3	21
4			2	3	6	11
m_x	6	8	14	11	9	48

Таблиця 6.27

$y \backslash x$	10	20	30	40	50	m_y
1	7	1				8
2	5	9	2	1		17
3	1	5	10	6	3	25
4			1	3	5	9
m_x	13	15	13	10	8	59

Таблица 6.28

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	8	4				12
2	5	10	5	1		21
3	3	5	7	6	2	23
4	1		3	2	4	10
m_x	17	19	15	9	6	66

Таблица 6.29

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	5	1				6
2	3	4	2	1		10
3	1	8	6	4		19
4		1	1	2	3	7
m_x	9	14	9	7	3	42

Таблица 6.30

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	m_y
1	5	2				7
2	3	7	2	1		13
3		3	10	11	3	27
4			5	6	6	17
m_x	8	12	17	18	9	64

Таблица 6.31

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	6	1				7
2	8	10	3	1		22
3	1	4	12	9	3	29
4			2	3	5	10
m_x	15	15	17	13	8	68

Таблица 6.32

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	8	3				11
2	5	10	5	1		21
3	3	4	12	7	3	29
4	1		3	2	5	11
m_x	17	17	20	10	8	72

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою розробки та дослідження нелінійної регресійно-кореляційної моделі на основі статистичних даних.

1.2. Вивчення функціональних можливостей *Microsoft Excel* та набуття практичних навичок застосування електронної таблиці.

2. Постановка задачі

Розробити нелінійну регресійно-кореляційну модель і виконати кореляційний аналіз за даними спостережень змін значень двох економічних показників. Передбачається параболічний зв'язок між показниками

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (2.1)$$

3. Порядок виконання роботи

3.1. Визначити коефіцієнти a_0 , a_1 і a_2 регресійної моделі (2.1), скориставшись можливостями *Excel* для розрахунку параметрів поліноміальної трендової моделі.

3.2. Обчислити числові характеристики регресійної моделі.

3.3. Розрахувати кореляційне співвідношення R .

3.4. Визначити розрахункове значення критерію Стюдента t_p і порівняти його з теоретичним (нормативним) t_T .

3.5. У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу

4. Навчальний матеріал

4.1. Визначення коефіцієнтів параболічної моделі

На відміну від методики розрахунку коефіцієнтів параболічної моделі за методом найменших квадратів, яка наведена у лабораторній роботі № 1, коефіцієнти a_0 , a_1 і a_2 визначаються з використанням можливостей *Excel*.

4.2. Розрахунок дисперсій

Дисперсія $D(x)$, обумовлена впливом на y фактора x , розраховується за формулою:

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2}{n}. \quad (4.1)$$

Дисперсія $D(y)$, обумовлена зміною усіх факторів, які впливають на y , визначається за формулою:

$$D(y) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - M(y))^2}{n}, \quad (4.2)$$

де $M(y)$ – математичне сподівання, яке розраховується як середнє арифметичне:

$$M(y) = \frac{\sum_{i=1}^n y}{n}. \quad (4.3)$$

Для розрахунку дисперсій в *Excel* створюється таблиця, рис. 4.1.

x	y	y_p	$(y-y_p)^2$	$(y-M(y))^2$
			$\Sigma(y-y_p)^2$	$\Sigma(y-M(y))^2$

Рис. 4.1. Таблиця розрахунку дисперсій в *Excel*

4.3. Визначення кореляційного співвідношення

Кореляційне співвідношення визначається на основі обчислених за формулами (4.2) і (4.3) дисперсій $D(y)$ і $D(x)$:

$$R = \sqrt{\frac{D(y) - D(x)}{D(y)}} = \sqrt{1 - \frac{D(x)}{D(y)}}. \quad (4.4)$$

Якщо $D(x)=D(y)$, то $R=0$ і зв'язок між показниками, що досліджуються, відсутній.

Якщо $D(x)=0$, то $R=1$ і зв'язок між показниками має характер функціональної залежності.

4.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками

Для перевірки гіпотези про існування зв'язку між показниками x і y застосовується така методика обчислень.

Визначається стандартна помилка S_R кореляційного співвідношення R за формулою:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m}}, \quad (4.5)$$

де n – число спостережень;

m – число факторів рівняння регресії; $m=1$.

Довірча межа випадкових коливань R обчислюється за формулою:

$$\varepsilon_R = t_T S_R, \quad (4.6)$$

де t_T – теоретичне нормоване відхилення t -розподілу Стюдента (знаходиться за статистичною таблицею при $\nu=n-m$ і $\alpha=0,05$).

Достовірність кореляційного співвідношення визначається за умовою:

$$t_p = \frac{R}{S_R} > t_0. \quad (4.7)$$

Якщо умова (4.7) додержується, то зв'язок між показниками існує. Якщо $t_p < t_T$, то зв'язку між показниками немає.

5. Контрольні запитання та завдання

5.1. У яких випадках використовується кореляційне співвідношення?

5.2. Навести формули для визначення дисперсій $D(x)$ і $D(y)$.

5.3. За якими формулами обчислюється кореляційне співвідношення?

5.4. Навести методику перевірки гіпотези про наявність кореляційного зв'язку з використанням критерію Стюдента.

6. Варіанти індивідуальних завдань

У таблиці 6.1 наведено фрагмент статистичної таблиці для визначення теоретичного значення критерію Стьюдента для даних індивідуальних завдань.

Таблиця 6.1

t -критерій для $\alpha=0,05$

ν	15	16	17	18	19	20	25
t_{τ}	2,13	2,12	2,11	2,10	2,093	2,086	2,064

У таблиці 6.2 подані варіанти індивідуальних завдань. Кожному варіантові відповідає номер задачі і таблиці початкових даних (табл. 6.3–6.7).

Таблиця 6.2

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних	Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних
1	Задача № 1	Таблиця 6.3 (гр.1)	16	Задача № 3	Таблиця 6.5 (гр.5)
2	Задача № 1	Таблиця 6.3 (гр.2)	17	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.1)
3	Задача № 1	Таблиця 6.3 (гр.3)	18	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.2)
4	Задача № 1	Таблиця 6.3 (гр.4)	19	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.3)
5	Задача № 1	Таблиця 6.3 (гр.5)	20	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.4)
6	Задача № 2	Таблиця 6.4 (гр.1)	21	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.5)
7	Задача № 2	Таблиця 6.4 (гр.2)	22	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.6)
8	Задача № 2	Таблиця 6.4 (гр.3)	23	Задача № 4	Таблиця 6.6 (гр.7)
9	Задача № 2	Таблиця 6.4 (гр.4)	24	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.1)
10	Задача № 2	Таблиця 6.4 (гр.5)	25	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.2)
11	Задача № 2	Таблиця 6.4 (гр.6)	26	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.3)
12	Задача № 3	Таблиця 6.5 (гр.1)	27	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.4)
13	Задача № 3	Таблиця 6.5 (гр.2)	28	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.5)
14	Задача № 3	Таблиця 6.5 (гр.3)	29	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.6)
15	Задача № 3	Таблиця 6.5 (гр.4)	30	Задача № 5	Таблиця 6.7 (гр.7)

Задача № 1. Скласти рівняння залежності між фондоємністю і густиною перевезень вантажів і визначити наявність зв'язку між показниками.

Таблиця 6.3

№ з/п	Фондоємність, y	Густина перевезень, x				
		1	2	3	4	5
1	6,4	15,0	14,0	13,0	16,0	11,0
2	9,4	11,0	10,0	10,0	12,0	11,0
3	8,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
4	11,0	30,0	25,0	20,0	22,0	24,0
5	8,8	9,0	8,0	10,0	11,0	12,0
6	8,2	7,0	8,0	9,0	10,0	9,0
7	7,8	6,0	7,0	7,0	8,0	6,0
8	9,2	9,0	8,0	7,0	6,0	10,0
9	8,6	11,0	10,0	10,0	10,0	12,0
10	6,5	14,0	13,0	12,0	11,0	10,0
11	7,0	18,0	18,0	17,0	17,0	18,0
12	7,4	12,0	13,0	14,0	13,0	12,0
13	11,0	11,0	8,0	8,0	8,0	7,0
14	8,0	24,0	22,0	20,0	18,0	18,0
15	9,2	24,0	18,0	12,0	16,0	7,0
16	11,0	12,0	22,0	7,0	12,0	21,0
17	12,0	16,0	28,0	17,0	14,0	13,0

Задача № 2. Скласти рівняння залежності між експлуатаційними витратами на пересування транзитних поїздів і розмірами руху вантажних поїздів на дільницях залізниці і визначити наявність зв'язку між показниками.

Таблиця 6.4

№ з/п	Експлуатаційні витрати, у	Розмір руху вантажних поїздів (у парах поїздів), х					
		1	2	3	4	5	6
1	1,1	90	50	60	70	80	90
2	1,0	40	50	40	50	40	50
3	1,2	35	30	40	45	35	30
4	1,1	20	25	30	35	40	25
5	1,4	40	45	40	35	30	30
6	1,0	60	70	80	65	75	80
7	1,0	15	20	25	30	25	20
8	1,5	10	15	10	15	10	15
9	1,5	40	45	50	45	40	50
10	1,3	30	40	35	45	50	40
11	0,9	40	45	50	60	70	60
12	0,6	90	50	60	70	80	90
13	1,6	15	20	15	25	20	15
14	1,4	15	10	15	20	25	20
15	1,7	10	15	20	25	20	15
16	1,5	25	30	30	30	30	25
17	1,8	10	15	20	25	30	25

Задача № 3. Скласти рівняння залежності між експлуатаційними витратами залізниці на 1 км експлуатаційної довжини та середньодобовою продуктивністю локомотива. Визначити, чи існує зв'язок між цими показниками.

Таблиця 6.5

№ з/п	Експлуатаційні витрати, у	Продуктивність локомотива, х				
		1	2	3	4	5
1	33,5	920	910	890	910	860
2	22,2	740	710	700	710	670
3	34,5	880	880	750	780	750
4	52,4	1030	1000	960	990	930
5	55,3	1400	1410	1390	1400	1320
6	61,8	1370	1320	1250	1300	1180
7	38,0	1170	1140	1090	1120	1050
8	49,8	1000	995	1000	1000	1010
9	51,7	1100	1070	1050	1050	1000
10	85,0	1080	1070	1030	1060	1010
11	56,9	1090	1080	1010	1040	1000
12	58,5	1170	1170	1120	1140	1100
13	42,5	930	930	850	840	910
14	43,1	440	450	440	440	430
15	69,3	1340	1330	1290	1320	1230
16	75,6	1240	1220	1200	1190	1170
17	50,7	1230	1220	1170	1190	1060
18	42,7	1210	1210	1220	1220	1170
19	38,1	1080	1060	970	1010	990

Задача № 4. Скласти рівняння залежності між прибутком залізниці й питомою вагою одного з вантажів у вантажообігу залізниці та визначити наявність зв'язку між цими показниками.

Таблиця 6.6

№ з/п	Прибуток, у	Структура вантажообігу, х						
		1	2	3	4	5	6	7
1	129,6	34,0	13,7	15,0	2,9	7,2	15,8	11,4
2	34,2	23,8	12,0	15,0	6,6	10,2	24,6	7,8
3	62,8	33,6	11,8	15,0	6,5	10,3	14,7	8,1
4	197,5	30,4	14,9	15,8	5,2	10,2	10,6	12,9
5	249,1	32,8	21,0	11,1	4,7	9,2	6,7	14,5
6	145,4	16,8	20,2	6,4	1,7	32,2	13,3	9,4
7	112,3	27,0	8,5	17,8	4,7	11,0	9,6	21,4
8	47,3	22,3	8,6	15,6	4,5	13,8	8,4	26,8
9	83,7	21,7	4,7	14,2	4,5	16,3	13,8	24,8
10	89,8	24,8	6,4	16,4	3,9	18,6	12,7	17,2
11	148,0	17,1	3,0	13,1	2,1	37,5	7,1	20,1
12	118,2	19,0	2,1	14,0	2,0	20,	6,5	36,4
13	204,8	24,5	7,7	16,2	5,7	5,3	32,8	7,8
14	50,1	28,6	8,9	19,1	5,1	2,8	23,7	11,8
15	136,1	22,5	9,0	12,8	5,1	12,2	21,0	17,4
16	246,0	23,9	8,5	11,1	6,1	9,1	25,9	15,4
17	163,3	25,9	11,4	13,8	6,2	4,5	23,5	14,7
18	358,2	27,1	10,9	12,1	5,7	21,9	8,9	13,4
19	89,2	26,4	7,6	21,8	5,3	5,3	29,9	3,7
20	24,8	25,6	10,1	13,0	4,2	23,6	7,9	16,1
21	308,3	20,9	9,2	9,3	5,6	25,5	6,9	22,6
22	409,3	19,9	13,7	8,4	3,2	37,8	7,6	9,4
23	224,9	24,8	20,0	9,3	3,9	12,7	15,8	13,5
24	143,9	27,4	9,1	8,2	5,9	15,1	26,3	8,0
25	50,0	21,5	16,8	10,0	4,6	20,5	21,1	5,5
26	62,8	30,5	22,3	12,9	6,8	23,8	30,2	6,6
27	120,9	25,7	13,5	10,5	5,2	22,5	19,7	9,8
28	220	23,7	10,5	11,3	5,8	20,6	20,5	12,9
29	170,6	21,6	9,5	13,1	5,9	19,9	18,9	11,8

Задача № 5. Скласти рівняння залежності між прибутком залізниці й питомою вагою одного з вантажів у вантажообігу залізниці та визначити наявність зв'язку між цими показниками.

Таблиця 6.7

№ з/п	Прибуток, у	Структура вантажообігу, х						
		1	2	3	4	5	6	7
1	129,6	23,1	23,9	10,8	7,4	3,1	6,6	0,3
2	34,2	18,3	30,2	9,6	3,0	6,2	4,0	7,7
3	62,8	17,2	24,2	11,0	8,4	5,8	9,0	0,6
4	197,5	22,0	25,4	10,2	3,7	4,7	12,0	1,0
5	249,1	15,6	29,8	15,8	3,9	4,5	9,5	0,3
6	145,4	22,0	22,9	8,6	5,0	5,1	10,7	0,9
7	112,3	13,4	19,6	18,7	2,8	2,9	18,4	0,2
8	47,3	20,7	17,2	8,5	5,2	4,3	12,6	1,3
9	83,7	18,2	20,2	4,7	3,1	5,1	12,5	1,2
10	89,8	17,9	21,6	7,1	2,5	3,8	14,1	1,6
11	148,0	13,3	14,2	2,4	1,2	1,7	22,6	2,7
12	118,2	15,7	14,8	1,7	1,0	2,0	18,0	2,1
13	204,8	20,4	20,1	7,3	1,1	6,6	11,8	0,4
14	50,1	25,7	24,0	6,5	1,9	4,6	1,5	0,3
15	136,1	18,1	21,8	8,2	1,1	5,1	11,2	1,7
16	246,0	16,0	22,2	8,3	1,6	5,9	7,4	0,6
17	163,3	15,9	23,5	10,4	0,7	6,1	4,4	0,7
18	358,2	19,2	17,4	6,5	2,7	5,4	25,4	1,0
19	89,2	33,6	22,0	7,0	5,0	5,1	6,6	0,1
20	24,8	18,3	18,7	9,0	2,5	3,0	19,6	1,5
21	308,3	13,3	18,5	6,1	0,9	5,2	22,8	1,8
22	409,3	12,4	15,2	9,5	0,5	3,1	36,0	1,3
23	224,9	14,4	16,2	18,2	0,9	3,0	23,3	0,6
24	143,9	12,8	19,0	9,6	1,4	4,8	30,1	0,4
25	50,0	18,4	16,3	14,6	1,2	3,9	25,9	0,3
26	226,7	17,9	19,6	10,8	1,8	6,9	7,9	1,2
27	132,5	15,7	17,8	11,9	2,1	5,3	4,8	1,1

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5 РОЗРОБКА ПРОГРАМИ ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ НА МОВІ *QBASIC*

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою застосування числових методів обчислення функцій на прикладі інтерполяційних формул Ньютона і Лагранжа.

1.2. Використання набутих навичок розробки алгоритмів і програм на алгоритмічній мові *QBasic* для реалізації задач інтерполяції.

2. Постановка задачі

За даними зміни вантажопотоку Q (млн т) на одному з напрямків по роках експлуатації t (років) визначити вантажопотоки за заданими роками експлуатації використовуючи інтерполяційні формули Ньютона і Лагранжа.

Для розв'язку задачі розробити програму на мові *QBasic*.

3. Порядок виконання роботи

3.1. Розробити алгоритм програми реалізації інтерполяційних поліномів Ньютона і Лагранжа.

3.2. На базі алгоритму розробити і налагодити програму на мові *QBasic*.

3.3. Початкові дані для розв'язку задачі обрати за індивідуальним варіантом (табл. 6.1).

3.4. Порівняти отримані результати розрахунків програми за формулами Ньютона і Лагранжа.

3.5. Зробити висновки за результатами роботи програми.

3.6. У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу.

4. Навчальний матеріал

4.1. Задача інтерполювання

На відрізку $[a, b]$ задані $n+1$ точки x_0, x_1, \dots, x_n , які дістали назву вузлів інтерполяції, а також значення деякої функції $f(x)$ у цих точках:

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n. \quad (4.1)$$

Потрібно побудувати функцію $F(x)$ – інтерполяційну функцію, яка належить до відомого класу і приймає у вузлах інтерполяції такі самі значення, що й функція $f(x)$:

$$F(x_0)=y_0, F(x_1)=y_1, \dots, F(x_n)=y_n. \quad (4.2)$$

У такій загальній постановці задача може мати безліч рішень або не мати жодного. Проте задача буде мати єдине рішення, якщо замість довільної функції $F(x)$ шукати поліном $P(x)$ ступеня не вище за n , який задовольняє умові (4.2):

$$P_n(x_0)=y_0, P_n(x_1)=y_1, \dots, P_n(x_n)=y_n. \quad (4.3)$$

Інтерполяційну формулу використовують для наближеного обчислювання заданої функції $f(x)$ для значень аргументів x , відмінних від вузлів інтерполяції. Така операція дістала назву інтерполювання.

4.2. Інтерполяційна формула Ньютона

4.2.1. Скінченні різниці

Задана функція $y=f(x)$. Позначимо приріст аргументу Δx через h , $\Delta x=h$.

Тоді:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x). \quad (4.4)$$

Приріст функції y називається першою скінченною різницею функції y .

Аналогічно визначаються скінченні різниці вищих порядків:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y); \quad (n=2, 3, \dots). \quad (4.5)$$

Для рівновіддалених точок $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ скінченні різниці визначаються за співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{i+1} - y_i; \\ \Delta^2 y &= \Delta(\Delta y) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \\ &\vdots \\ \Delta^n y &= \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2.2. Перша інтерполяційна формула Ньютона

Перша інтерполяційна формула Ньютона застосовується для рівновіддалених вузлів інтерполяції.

Для функції $f(x)$ задані значення $y_i = f(x_i)$ для рівновіддалених незалежних змінних

$$x_i = x_0 + ih; \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad (4.7)$$

де h – крок інтерполяції.

Потрібно підшукати поліном $P_n(x)$ ступеня не вище n , який набуває у точках x_i значення:

$$P_n(x_i) = y_i. \quad (4.8)$$

Умова (4.8) еквівалентна:

$$\Delta^m P_n(x_i) = \Delta^m y_i; \quad (m=0, 1, \dots, n). \quad (4.9)$$

Поліном Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \quad (4.10)$$

Тобто, треба знайти коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_n полінома $P_n(x)$. Коефіцієнт при змінній x ступеня n визначається за формулою:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}. \quad (4.11)$$

Якщо ввести в поліном (4.10) значення (4.11) і включити нову змінну $q = \frac{x-x_0}{h}$, отримаємо остаточний вигляд першої інтерполяційної формули Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (4.12)$$

4.3 Інтерполяційна формула Лагранжа

Розглянемо окремий випадок, коли в точці $x=x_0$ значення $y_0=1$, а в інших точках $x=x_1, x=x_2, \dots, x=x_n$ значення функцій $y_1=y_2=\dots=y_n=0$.

Такий поліном має вигляд:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}. \quad (4.13)$$

Корені полінома x_1, x_2, \dots, x_n і при $x=x_0$ чисельник дорівнює знаменнику.

Побудуємо аналогічний поліном, який набуває у точці $x=x_0$ значення y_0 і значення 0 для усіх $x=x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0. \quad (4.14)$$

При $x=x_0$ значення полінома $L_0(x)=y_0$.

Для полінома, який набуває в усіх вузлах інтерполювання заданих значень $L(x_i)=y_i$, маємо:

$$L(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}, \quad (4.15)$$

або у скороченому вигляді:

$$L(x) = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}. \quad (4.16)$$

Наведені поліноми (4.15) і (4.16) називаються інтерполяційними поліномами Лагранжа або формулами Лагранжа.

Застосування формули Лагранжа не потребує визначення коефіцієнтів полінома і виконання умови рівновіддалених вузлів інтерполяції.

5. Контрольні запитання та завдання

- 5.1. Навести постановку задачі інтерполяції функції.
- 5.2. Що означають поняття інтерполяція і екстраполяція?
- 5.3. Дати визначення скінченної різниці.
- 5.4. Навести форму запису полінома Ньютона.
- 5.5. Навести форму запису полінома Лагранжа.
- 5.6. У яких випадках використовуються формули Ньютона і Лагранжа?

6. Варіанти індивідуальних завдань

Кожен варіант містить значення зміни вантажопотоку для чотирьох різних періодів часу (вузлів інтерполяції) і передбачає визначення зміни вантажопотоку для трьох заданих періодів.

У таблиці 6.1 наведені початкові дані для розв'язку задачі відповідно до варіантів індивідуальних завдань.

Варіанти завдань і початкові дані

№ варіанта	Початкові дані		Визначити Q	№ варіанта	Початкові дані		Визначити Q	№ варіанта	Початкові дані		Визначити Q
	t (років)	Q (млн т)			t (років)	Q (млн т)			t (років)	Q (млн т)	
1	4	8	$t=5$ $t=9$ $t=11$	11	2	8	$t=5$ $t=13$ $t=15$	21	2	10	$t=5$ $t=13$ $t=15$
	6	10			6	10			6	18	
	8	18			10	17			10	23	
	10	28			14	26			14	34	
2	2	12	$t=3$ $t=11$ $t=15$	12	4	4	$t=5$ $t=9$ $t=11$	22	4	8	$t=5$ $t=7$ $t=12$
	6	20			6	10			6	22	
	10	32			8	18			8	34	
	14	51			10	32			10	52	
3	3	6	$t=5$ $t=11$ $t=19$	13	3	2	$t=5$ $t=11$ $t=19$	23	3	5	$t=4$ $t=12$ $t=19$
	8	10			8	10			8	10	
	13	18			13	22			13	28	
	18	29			18	39			18	48	
4	4	3	$t=5$ $t=9$ $t=11$	14	4	8	$t=5$ $t=9$ $t=11$	24	4	12	$t=5$ $t=7$ $t=11$
	6	10			6	10			6	15	
	8	24			8	18			8	23	
	10	45			10	28			10	31	
5	5	8	$t=5$ $t=14$ $t=21$	15	4	2	$t=5$ $t=9$ $t=11$	25	4	6	$t=5$ $t=9$ $t=11$
	10	15			6	12			6	18	
	15	28			8	30			8	24	
	20	43			10	58			10	48	
6	4	8	$t=5$ $t=9$ $t=11$	16	5	8	$t=7$ $t=14$ $t=21$	26	5	4	$t=7$ $t=14$ $t=21$
	6	10			10	18			10	16	
	8	18			15	32			15	28	
	10	28			20	51			20	42	
7	4	7	$t=5$ $t=9$ $t=11$	17	5	8	$t=9$ $t=15$ $t=24$	27	4	8	$t=5$ $t=9$ $t=14$
	6	12			11	20			7	20	
	8	22			17	39			10	39	
	10	36			23	62			13	62	
8	4	8	$t=8$ $t=20$ $t=23$	18	4	3	$t=5$ $t=9$ $t=11$	28	3	4	$t=5$ $t=10$ $t=13$
	10	12			6	10			6	10	
	16	22			8	20			9	18	
	22	39			10	48			12	34	
9	3	7	$t=5$ $t=12$ $t=16$	19	2	9	$t=3$ $t=7$ $t=9$	29	4	12	$t=5$ $t=9$ $t=11$
	7	12			4	14			6	18	
	11	18			6	19			8	28	
	15	28			8	24			10	34	
10	2	8	$t=4$ $t=9$ $t=12$	20	5	7	$t=8$ $t=10$ $t=12$	30	3	6	$t=6$ $t=9$ $t=10$
	5	16			7	15			5	12	
	8	28			9	26			7	18	
	11	34			11	31			9	24	

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

ОПТИМАЛЬНЕ ЗАВАНТАЖЕННЯ ВАНТАЖНИХ ФРОНТІВ

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою розробки та дослідження моделей оптимізації із застосуванням симплекс-методу.

1.2. Вивчення функціональних можливостей електронної таблиці *Microsoft Excel* для розв'язку задач оптимізації та набування практичних навичок їхнього застосування.

2. Постановка задачі

На станції необхідно розвантажити маршрут однорідного вантажу із визначеної кількості вагонів. Кожен з трьох наявних вантажних фронтів (ВФ), може вмістити деяку кількість вагонів. Відомі такі характеристики ВФ: локомотиво-години, які витрачаються на кожний вагон, і прибуток, який забезпечує розвантаження одного вагона.

Усі операції виконуються одним локомотивом, який працює 23 години на добу.

Необхідно таким чином розподілити вагони по вантажних фронтах, щоб забезпечити станції *максимальний* прибуток.

3. Порядок виконання роботи

3.1 За даними індивідуального варіанта скласти математичну модель задачі (цільову функцію і систему обмежень).

3.2 Розробити електронну модель оптимального розподілу вагонів у середовищі *Microsoft Excel*.

3.3 Виконати аналіз отриманого результату.

3.4 У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу.

4. Методичний матеріал

4.1. Розробка математичної моделі

Для розробки математичної моделі задачі оптимального розподілу вагонів по вантажних фронтах запровадимо такі позначення:

x_1 – кількість вагонів, що розвантажуються на першому вантажному фронті (1ВФ);

x_2 – кількість вагонів, що розвантажуються на другому вантажному фронті (2ВФ);

x_3 – кількість вагонів, що розвантажуються на третьому вантажному фронті (3ВФ);

D_1 – прибуток станції від розвантаження одного вагона на 1ВФ;

D_2 – прибуток станції від розвантаження одного вагона на 2ВФ;

D_3 – прибуток станції від розвантаження одного вагона на 3ВФ;

C_1 – загальна кількість вагонів, що надходять під розвантаження;

C_2 – добовий час роботи локомотива ($C_2=23$);

C_3 – загальна місткість 1ВФ;

C_4 – загальна місткість 2ВФ;

C_5 – загальна місткість 3ВФ;

L_1 – витрати локомотиво-годин на один вагон на 1 ВФ;

L_2 – витрати локомотиво-годин на один вагон на 2 ВФ.

L_3 – витрати локомотиво-годин на один вагон на 3 ВФ.

На підставі наведених позначень загальний дохід станції становитиме:

$$F=D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3. \quad (4.1)$$

Система обмежень складається за умовами:

– загальна кількість вагонів, поданих під розвантаження, не перевищує їхньої загальної кількості C_1

$$x_1+x_2+x_3\leq C_1; \quad (4.2)$$

– час роботи локомотива не перевищує добового C_2

$$L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3\leq C_2; \quad (4.3)$$

– кількість вагонів, розвантажених на кожному вантажному фронті, не перевищує їхньої місткості

$$x_1\leq C_3, \quad x_2\leq C_4, \quad x_3\leq C_5; \quad (4.4)$$

У форматі лінійного програмування математична модель задачі матиме вигляд:

Цільова функція: $F=D_1x_1+D_2x_2+ D_3x_3\rightarrow \max$ (4.5)

Обмеження:
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leq C_1; \\ L_1x_1+L_2x_2+L_3x_3\leq C_2; \\ x_1\leq C_3; \\ x_2\leq C_4; \\ x_3\leq C_5. \end{cases} \quad (4.6)$$

Системі обмежень (4.6) можна надати канонічного вигляду, якщо ввести додаткові невідомі:

y_1 – кількість неподаних під розвантаження вагонів;

y_2 – невикористаний час локомотива;

y_3 – невикористана місткість 1ВФ;

y_4 – невикористана місткість 2ВФ.

y_5 – невикористана місткість 3ВФ.

Тоді систему обмежень (4.6) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+y_1=C_1; \\ L_1x_1+L_2x_2 +L_3x_3+y_2=C_2; \\ x_1+y_3=C_3; \\ x_2+y_4=C_4; \\ x_3+y_5=C_5 \end{cases} \quad (4.7)$$

4.2. Використання симплекс-методу для рішення задачі

Система (4.7) складається з чотирьох рівнянь, містить шість невідомих змінних і має безліч рішень, тобто є невизначеною. Єдиний розв’язок такої системи пропонує симплекс-метод. Усі невідомі поділяються на базисні і

вільні. Кількість базисних змінних визначається кількістю рівнянь (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), а решта змінних – вільні (x_1, x_2, x_3). Якщо вільним змінним надати будь-якого значення, то система (4.7) із невизначеної перетвориться на визначену.

Якщо всі вільні невідомі дорівняти до нуля, то рішення буде складатися тільки з базисних змінних і таке рішення дістало назву *базисного*. Теорія лінійного програмування стверджує, що серед базисних рішень завжди можна знайти оптимальне або декілька оптимальних рішень. Якщо знайти будь-який базисний план, а потім поліпшити його, то зрештою отримаємо оптимальне рішення. На цьому принципі і базується симплекс-метод.

4.3. Програмування задач у середовищі *Excel*

Для моделювання задач лінійного програмування у середовищі *Microsoft Excel* необхідно попередньо виконати завантаження інструменту «Поиск решения». Для цього потрібно виконати команду «Сервис/Надстройка» і у вікні діалогу «Надстройка» встановити прапорець у рядок «Поиск решения» та натиснути кнопку **ОК**.

Подальші дії здійснюються в *Excel* у режимі діалогу відповідно до математичної моделі задачі й архітектури розроблених студентом таблиць.

5. Контрольні запитання та завдання

5.1. У чому полягає основна ідея задач лінійного програмування?

5.2. Що означає цільова функція у математичній моделі задачі лінійного програмування?

5.3. Який сенс має введення в математичну модель базисних змінних?

5.4. Викласти сутність симплекс-методу.

5.5. Пояснити, як реалізується функція пошуку оптимального плану у середовищі *Microsoft Excel*.

6. Варіанти індивідуальних завдань

Для всіх варіантів час роботи локомотива складає 23 години. Інші показники, необхідні для розв'язку задачі, наведені у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Початкові дані до задачі

Номер варіанта	Місткість ВФ (вагони)			Витрати локомотиво-годин на 1 вагон			Прибуток на 1 вагон			Маршрут (вагони)
	1ВФ	2ВФ	3ВФ	1ВФ	2ВФ	3ВФ	1ВФ	2ВФ	3ВФ	
1	35	40	25	0,3	0,4	0,2	10	12	10	75
2	25	35	40	0,3	0,3	0,2	11	12	13	80
3	35	40	30	0,4	0,3	0,3	11	15	13	70
4	30	40	20	0,3	0,3	0,4	11	15	15	65
5	40	25	30	0,3	0,2	0,4	14	12	13	80
6	40	35	25	0,2	0,5	0,3	12	10	14	80
7	45	35	25	0,2	0,4	0,2	16	10	11	80
8	40	30	30	0,3	0,2	0,3	18	16	12	75
9	30	40	30	0,3	0,5	0,4	18	16	18	70
10	45	40	25	0,3	0,5	0,3	16	12	13	80
11	30	40	20	0,5	0,4	0,4	14	14	15	82
12	35	25	40	0,2	0,3	0,5	14	14	15	78
13	35	25	42	0,3	0,5	0,4	14	13	14	77
14	35	40	30	0,3	0,5	0,3	11	13	14	68
15	35	40	30	0,5	0,3	0,3	11	13	11	70
16	40	25	30	0,3	0,4	0,3	14	13	12	80
17	40	25	35	0,3	0,4	0,2	14	13	12	82
18	40	30	25	0,2	0,4	0,3	15	13	13	80
19	35	30	40	0,2	0,4	0,3	14	13	14	75
20	35	25	40	0,5	0,3	0,4	14	13	12	70
21	40	35	35	0,3	0,2	0,4	14	14	14	76
22	40	35	25	0,4	0,2	0,2	12	13	14	78
23	25	30	40	0,4	0,2	0,2	12	13	14	80
24	25	30	40	0,2	0,3	0,5	15	13	12	82
25	40	35	25	0,3	0,3	0,3	14	13	14	80
26	40	35	30	0,3	0,4	0,2	14	13	15	76
27	40	35	30	0,2	0,4	0,1	15	13	12	76
28	40	30	40	0,3	0,2	0,3	14	12	12	82
29	25	30	30	0,3	0,3	0,2	15	14	15	80
30	40	35	45	0,3	0,2	0,3	15	16	14	80

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

1. Мета роботи

1.1. Опанування методикою розробки та дослідження транспортної задачі із застосуванням методу потенціалів.

1.2. Вивчення функціональних можливостей електронної таблиці *Microsoft Excel* для розв'язку задач лінійної оптимізації та набуття практичних навичок їхнього застосування.

2. Постановка задачі

Три станції відправлення A_1, A_2 і A_3 мають деяку кількість однорідного вантажу a_1, a_2 і a_3 відповідно, який треба перевезти залізницею до дев'яти станцій призначення B_1, B_2, \dots, B_9 . Обсяг прибуття вантажу на відповідну станцію призначення дорівнює b_1, b_2, \dots, b_9 .

Із кожної станції відправлення A_i ($i=1, 2, 3$) є можливість перевезення вантажу до кожної станції призначення B_j ($j=1, \dots, 9$).

Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу зі станції A_i до станції B_j складають c_{ij} одиниць.

Задача полягає у тому, щоб визначити такий план перевезень, при якому попит усіх споживачів вантажу був задоволений, увесь вантаж вивезений і сумарні транспортні витрати при цьому були мінімальними.

3. Порядок виконання роботи

3.1. У відповідності з індивідуальним завданням скласти математичну модель транспортної задачі (цільову функцію та обмеження).

3.2. Розробити електронну модель транспортної задачі в *Excel*.

3.3. Виконати аналіз отриманого результату.

3.4. У середовищі *Microsoft Word* розробити звіт про виконану роботу.

4. Навчальний матеріал

4.1. Математична модель транспортної задачі

Позначимо через x_{ij} ($x_{ij} \geq 0$) обсяг вантажу, що перевозиться зі станції A_i до станції B_j . Відтак цільова функція набуває вигляду:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

де $c_{ij}x_{ij}$ – транспортні витрати на перевезення вантажу x_{ij} .

Обмеження для станцій відправлення:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (4.2)$$

Обмеження для станцій призначення:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (4.3)$$

Набір x_{ij} , можна відобразити у вигляді матриці

$$X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Матрицю X називають планом перевезень. Будь-який набір x_{ij} , що задовольняє умовам (4.2) і (4.3), дістав назву опорного плану.

План X , при якому цільова функція $F(x_{ij})$ досягає мінімуму, називається **оптимальним**.

Умови транспортної задачі відображають у вигляді таблиці (табл. 4.1), яка дістала назву матриці перевезень.

Кожний рядок матриці перевезень відповідає певній станції відправлення, а кожний стовпець – певній станції призначення. Клітинки матриці, поділені на дві частини – верхню та нижню, відповідають маршрутам перевезень (кількість маршрутів $m \times n$). У верхній частині клітинки записується вартість перевезень c_{ij} одиниці вантажу по відповідному маршрутові, а в нижній частині клітинки – елемент рішення x_{ij} , який вказує, яка кількість вантажу планується до перевезення від i -ї станції відправлення до j -ї станції призначення.

Таблиця 4.1

Матриця перевезень

Станції відправлення	Станції призначення						Обсяг вантажу (a_i)
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1j} X_{1j}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2j} X_{2j}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
\cdot	\cdot	\cdot	...	\cdot	...	\cdot	\cdot
A_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	...	C_{ij} X_{ij}	...	C_{in} X_{in}	a_i
\cdot	\cdot	\cdot	...	\cdot	...	\cdot	\cdot
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mj} X_{mj}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреба у вантажі (b_j)	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Сутність пошуку оптимального плану транспортної задачі полягає в тому, щоб, виходячи з будь-якого опорного плану, поступово поліпшуючи його, перейти до оптимального. Чим краще вибрано опорний план, тим менше ітерацій потрібно для переходу до оптимального плану.

Алгоритм розв'язку транспортної задачі потребує виконання таких етапів:

- пошук опорного плану;
- перевірка опорного плану на оптимальність;

– перехід до наступного поліпшеного плану, якщо план не оптимальний, або отримання кінцевого результату, якщо план оптимальний.

Існують спеціальні методи побудови опорного плану, серед яких виділяються методи північно-західного кута, мінімальної вартості та подвійної переваги. Від обраного методу залежить, у якому ступені отриманий опорний план буде ближче до оптимального.

Перевірка плану на оптимальність здійснюється за теоремою Канторовича, яка стверджує, що план X буде оптимальним тільки тоді, коли для кожного рядка i ($i=1, 2, \dots, m$) і кожного стовпця j ($j=1, 2, \dots, n$) матриці перевезень знайдуться такі числа – потенціали рядків і стовців відповідно u_1, u_2, \dots, u_m і v_1, v_2, \dots, v_n , для яких виконуються умови:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = 0; \quad (4.5)$$

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0. \quad (4.6)$$

Метод знаходження оптимального плану транспортної задачі за теоремою Канторовича дістав назву методу потенціалів.

4.2. Алгоритм пошуку оптимального плану в Excel

Моделювання транспортної задачі в середовищі *Excel* відбувається на основі придбаних навичок розв'язку задачі дослідження операцій при виконанні лабораторної задачі № 6.

Варто мати на увазі, що на відміну від попередньої задачі, транспортна задача пов'язана з пошуком мінімуму цільової функції.

Що стосується моделювання табличних форм в *Excel* для початкових даних, введення цільової функції, обмежень і результатів розрахунку, то загальноприйнятої архітектури форм не існує і кожен студент робить це індивідуально.

5. Контрольні запитання

5.1. Дати визначення транспортній задачі.

5.2. Навести математичну модель транспортної задачі.

5.3. Яким умовам постановки задачі повинен задовільняти опорний план?

5.4. Навести методи побудови опорного плану.

5.5. Який план перевезень називається оптимальним?

5.6. За яких умов за теоремою Канторовича слід вважати план оптимальним?

6. Варіанти індивідуальних завдань

Початкові дані до транспортної задачі наведені в таблицях 6.1, 6.2 і 6.3.

Таблиця 6.1

Обсяг вантажів станції відправлення

Номер станції відправлення	Остання цифра порядкового номера студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	100	200	200	150	125	175	100	100	125
2	250	150	100	200	100	100	225	275	200	200
3	150	250	200	100	250	275	100	125	200	175
Разом	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Таблиця 6.2

Обсяг прибуття вантажів на станції призначення

Номер станції призначення	Остання цифра порядкового номера студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40	40	40	40	50	65	75	40	55
2	45	50	55	65	60	55	60	70	45	65
3	50	55	65	60	75	65	75	40	40	60
4	55	65	60	75	70	60	70	45	50	70
5	65	60	75	70	40	75	40	40	55	75
6	60	75	70	40	45	70	45	50	65	40
7	75	70	40	45	50	40	40	55	60	45
8	70	40	45	50	55	45	50	65	75	40
9	40	45	50	55	65	40	55	60	70	50
Разом	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Таблиця 6.3

Варіанти матриці вартостей

Варіант 1	12	11	9	7	12	10	11	7	9
	9	15	4	5	11	13	8	6	16
	3	3	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 2	1	7	9	14	12	7	10	2	21
	15	14	13	3	14	12	7	10	17
	6	21	12	8	13	9	7	18	1
Варіант 3	12	1	19	7	16	10	11	8	9
	9	15	12	5	17	13	8	6	22
	3	4	6	8	14	3	12	15	2
Варіант 4	8	18	9	17	12	10	11	7	9
	9	15	4	25	11	13	28	26	16
	3	1	6	8	19	14	5	15	12
Варіант 5	2	11	19	27	20	11	16	7	9
	19	5	4	7	21	13	8	15	3
	1	2	6	17	9	18	25	22	27
Варіант 6	17	12	24	14	11	10	16	7	9
	20	15	4	5	1	13	3	6	18
	3	13	6	18	19	14	25	15	21
Варіант 7	11	18	9	7	12	10	3	27	9
	29	15	4	25	21	13	8	6	16
	17	16	6	8	9	14	5	15	2
Варіант 8	2	1	19	7	12	10	11	8	9
	21	4	5	14	13	18	6	16	6
	17	3	16	23	9	14	25	15	12
Варіант 9	21	18	9	7	12	14	11	2	29
	9	13	14	5	4	13	8	26	2
	17	23	9	6	21	17	24	12	1
Варіант 10	12	11	7	9	10	15	11	27	9
	15	9	4	11	5	13	8	6	16
	19	16	6	8	14	9	5	18	21

Варіант 11	11	12	27	14	21	10	22	7	9
	9	15	4	25	17	13	8	6	16
	3	23	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 12	9	7	10	17	11	16	1	7	9
	12	15	4	5	18	13	8	6	19
	27	3	6	8	9	14	5	15	2
Варіант 13	21	14	9	27	12	10	11	7	1
	17	15	4	5	11	13	8	6	16
	2	3	6	8	9	14	5	12	17
Варіант 14	2	11	9	7	12	10	16	17	29
	19	15	4	5	18	13	8	6	16
	13	1	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 15	12	11	9	27	12	10	21	7	9
	9	15	4	5	18	13	8	6	16
	3	19	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 16	11	15	9	17	12	10	11	7	9
	19	15	4	11	13	8	6	5	16
	23	3	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 17	10	9	11	2	8	6	7	12	18
	5	3	14	16	1	9	19	13	4
	20	17	4	9	14	17	6	20	9
Варіант 18	1	9	10	6	8	2	11	16	18
	7	3	5	9	12	11	17	6	8
	12	16	8	7	2	7	10	19	17
Варіант 19	12	20	17	19	10	14	13	18	17
	21	6	9	5	20	10	14	18	13
	22	5	9	10	17	13	19	5	7
Варіант 20	8	2	10	21	23	18	8	12	16
	9	5	25	23	22	24	19	10	11
	14	15	1	6	8	3	18	5	9
Варіант 21	19	2	15	16	24	8	24	19	17
	2	5	17	12	13	6	21	7	11
	23	19	8	7	2	22	9	17	6
Варіант 22	7	12	19	28	24	13	18	14	9
	22	24	19	11	16	7	3	4	19
	9	4	3	21	1	24	11	18	8
Варіант 23	6	15	21	5	8	17	4	19	23
	13	14	27	21	5	4	12	7	4
	4	8	24	20	17	11	16	18	8
Варіант 24	10	21	23	25	14	7	13	4	9
	12	7	19	6	28	15	19	9	24
	9	25	21	27	5	8	3	19	10
Варіант 25	11	17	9	6	8	23	10	11	13
	27	8	23	28	12	15	17	14	9
	1	14	2	17	6	21	18	9	11

Закінчення табл. 6.3

Варіант 26	9	18	2	21	26	14	17	9	11
	27	22	19	18	24	9	11	10	16
	11	8	19	8	1	5	15	16	8
Варіант 27	9	15	17	21	16	24	1	10	27
	22	19	16	17	13	6	7	21	2
	5	19	14	13	25	24	4	8	3
Варіант 28	6	12	21	22	8	25	7	12	10
	27	19	21	4	5	8	10	12	19
	15	17	6	18	13	9	25	7	3
Варіант 29	27	25	21	17	1	14	18	13	20
	17	16	9	8	14	13	10	8	5
	11	8	17	16	15	11	9	13	15
Варіант 30	10	11	11	15	17	19	10	9	21
	23	24	19	18	17	10	9	13	2
	15	18	21	24	16	11	21	14	7

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Акулиничев В. И., Кудрявцев В. Н., Корешов А. Н.* Математические методы в эксплуатации железных дорог. – М.: Транспорт, 1986. – 262 с.
2. *Захаров В. К., Севастьянов В. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 332 с.
3. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
4. *Математическое моделирование экономических процессов на транспорте.* – М.: ВЗИИТ, 1986. – 270 с.
5. *Рихтер К. Ю., Фишер П., Шнейдер Г.* Статистические методы в транспортных исследованиях. – М.: Транспорт, 1982. – 283 с.
6. *Румшинский Л. З.* Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1981. – 132 с.
7. *Долголатев В. Г.* Работа в *Excel 7.0* для *Windows 95* на примерах. – М.: БИНОМ, 1995. – 245 с.
8. *Методичні вказівки до використання електронної таблиці Microsoft Excel* / Л. В. Філіпович, В. А. Гладков, А. Ю. Рисцова. – К.: КІТ, 1999. – 38 с.
9. *Методичні вказівки до виконання самостійних робіт для студентів спеціальності «Організація перевезень та управління на залізничному транспорті» денної форми навчання з дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ»* / Л. В. Філіпович, А. Ю. Рисцова. – К.: КУЕТТ, 2003. – 74 с.
10. *Методичні вказівки щодо виконання контрольної роботи для студентів галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура», напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)» безвідривної форми навчання* / Л. В. Філіпович, Р. С. Щербина. – К.: ДЕТУТ, 2009. – 74 с.
11. *Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ: Конспект лекцій* / Л. В. Філіпович. – К.: ДЕТУТ, 2010. – 77 с.

Навчально-методичне видання

Людмила Всеволодівна Філіпович
Вячеслав Іванович Мацюк
Юлія Анатолієвна Бердниченко

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

щодо виконання лабораторних робіт для студентів
галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура»,
напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології
(залізничний транспорт)» для усіх форм навчання

Відповідальний за випуск – Л. В. Філіпович
Директор РВЦ ДЕТУТ – Л. В. Пономаренко
Головний редактор – О. В. Ємець
Верстка – В. О. Андрієнка

Підписано до друку 17.06.11 р. Формат 60x84/16,
папір офсетний, друк – на ризографі.
Зам. № 74-2/11. Тираж 105 прим.
Надруковано в Редакційно-видавничому центрі
Державного економіко-технологічного університету транспорту.
Свідоцтво про реєстрацію Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р.
03049, м. Київ, вул. Миколи Лукашевича, 19.