

Міністерство освіти і науки України
Державний економіко-технологічний університет транспорту

Кафедра УПП

Л. В. Філіпович, Ю. А. Бердніченко

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

щодо виконання самостійних робіт для студентів
галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура»,
напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)»
денної форми навчання

Київ 2013

УДК: 681.3

Філіпович Л. В., Бердниченко Ю. А.

Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ: Методичні вказівки щодо виконання самостійних робіт.– К.: ДЕТУТ, 2013. – 67 с.

Методичні вказівки щодо виконання самостійних робіт з дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ» підготовлені за навчальним планом галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура», напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)» і програмою дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ».

Призначені для студентів денної форми навчання галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура», напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)».

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри «Управління процесами перевезень» (протокол № 8 від 04.04.2012 р.) та на засіданні методичної комісії факультету «Управління залізничним транспортом» (протокол № 6 від 23.04.2012 р.).

Укладачі: **Л. В. Філіпович**, доцент кафедри УПП, канд. техн. наук, старший науковий співробітник;

Ю. А. Бердниченко,

Рецензенти: **О. І. Стасюк**, зав.кафедри АКІТТ, д.т.н, проф.

І. К. Рисцов, доцент кафедри математичного моделювання економічних систем НТУ «КП», к.ф-м.н.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	6
САМОСТІЙНА РОБОТА № 1	7
РОЗРОБКА СТАТИСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ	7
1. Постановка задачі	7
2. Порядок виконання роботи	7
3. Навчальний матеріал	7
3.1. Визначення коефіцієнтів моделей	7
3.2. Використання таблиці для розрахунку коефіцієнтів моделей	10
3.3. Визначення результуючої моделі	11
3.4 Побудова суміщеного графіка	12
4. Контрольні запитання та завдання	12
5. Варіанти індивідуальних завдань	12
САМОСТІЙНА РОБОТА № 2	16
ОБРОБКА СТАТИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ЕРЛАНГА	16
1. Постановка задачі	16
2. Порядок виконання роботи	16
3. Навчальний матеріал	16
3.1. Методика ущільнення статистичного ряду	16
3.2. Розрахунок числових характеристик інтервалів	17
3.3. Визначення параметрів розподілу Ерланга	18
3.4. Перевірка гіпотези про розподіл Ерланга	18
3.5. Побудова графічних моделей розподілу інтервалів	19
4. Контрольні запитання та завдання	19
5. Варіанти індивідуальних завдань	20
САМОСТІЙНА РОБОТА № 3	35
КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ	35
1. Постановка задачі	35
2. Порядок виконання роботи	35
3. Навчальний матеріал	35
3.1. Визначення коефіцієнта кореляції і умовних середніх	35
3.2. Визначення коефіцієнтів лінійної моделі	36
3.3. Побудова суміщеного графіка	37
3.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками	37
4. Контрольні запитання та завдання	38
5. Варіанти індивідуальних завдань	38
САМОСТІЙНА РОБОТА № 4	47
КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ	47
1. Постановка задачі	47
2. Порядок виконання роботи	47
3. Навчальний матеріал	47

3.1. Визначення коефіцієнтів гіперболічної моделі	47
3.2. Розрахунок дисперсій	48
3.3. Визначення кореляційного співвідношення	49
3.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками	49
4. Контрольні запитання та завдання	49
5. Варіанти індивідуальних завдань	49
САМОСТІЙНА РОБОТА № 5	54
ОПТИМАЛЬНЕ ЗАВАНТАЖЕННЯ ВАНТАЖНИХ ФРОНТІВ	54
1. Постановка задачі	54
2. Порядок виконання роботи	54
3. Навчальний матеріал	54
3.1. Розробка математичної моделі	54
3.2. Використання симплекс-методу для розв'язку задачі	55
3.3. Алгоритм симплекс-методу	56
4. Контрольні запитання та завдання	57
5. Варіанти індивідуальних завдань	58
САМОСТІЙНА РОБОТА № 6	59
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	59
1. Постановка задачі	59
2. Порядок виконання роботи	59
3. Навчальний матеріал	59
3.1. Математична модель транспортної задачі	59
3.2. Алгоритм пошуку оптимального плану	60
3.3. Визначення опорного плану	61
3.4. Визначення оптимального плану методом потенціалів	61
4. Контрольні запитання та завдання	62
5. Варіанти індивідуальних завдань	63
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	66

ВСТУП

Для організації управління і планування експлуатаційних процесів на залізничному транспорті використовуються математичні моделі, які дозволяють враховувати складності існуючих технологій, елементи випадковості у перевізному процесі, встановлювати оптимальні режими функціонування транспортної системи в цілому.

Сучасний фахівець у галузі організації, управління та планування транспортних процесів, крім професійних навичок, повинен володіти математичними методами, новітніми інформаційними технологіями і використовувати їх для удосконалення перевізного процесу, підвищення його ефективності. Цій меті підпорядкована дисципліна «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ». При вивченні дисципліни студенти отримують знання загальних питань теорії моделювання, методів розробки математичних моделей, формального опису об'єктів і процесів, реалізації математичних моделей для проведення обчислювальних робіт і розв'язку задач оптимізації із застосуванням програмних засобів комп'ютерної техніки.

Ручне обчислення дозволяє студентові самостійно визначитися з проблемою, опанувати методикою її розрахунку, виконати графічні побудови і проаналізувати отримані результати.

Кожна із запропонованих задач обіймає окремий розділ дисципліни, виконується паралельно із прослуховуванням лекційного матеріалу і вимагає від студента, крім знань цього розділу, вміння застосовувати його при виконанні практичних задач, а також самостійно опрацювати методичний матеріал і аналізувати отримані результати.

Перша задача потребує навичок розробки і дослідження моделі розпуску состава із використанням методу найменших квадратів.

У другій задачі потрібно встановити основні параметри статистичного розподілу потоку поїздів, що надходять на сортувальну станцію, та перевірити за критерієм узгодження Пірсона та умовою Романовського прийняту гіпотезу про розподіл Ерланга.

Третя та четверта задачі пов'язані з розробкою та дослідженням кореляційних моделей. Необхідно розробити кореляційну лінійну модель у першому випадку та нелінійну – у другому та виконати їхній аналіз із застосуванням відповідних критеріїв узгодження.

П'ята задача належить до класу задач оптимального розподілу ресурсів і пов'язана із оптимізацією доходу станції від розвантаження маршруту вантажу на трьох вантажних фронтах. Розрахунки потрібно виконати із застосуванням симплекс-методу.

Шоста задача – транспортна, передбачає складання оптимального за транспортними витратами плану перевезень однорідного вантажу між трьома станціями відправлення і дев'ятьма станціями призначення. Для побудови опорного плану використовуються два методи: північно-західного кута та найменшого елемента. За отриманими результатами визначається базовий опорний план, який підлягає подальшій оптимізації із використанням методу потенціалів.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Методичні вказівки розраховані на самостійний розв'язок задач, які виконуються студентами вручну без застосування комп'ютера і містять шість задач, що складають сутність дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ» і, крім того, для їх розв'язку необхідні базові знання, отримані у процесі вивчення таких дисциплін як «Теорія ймовірностей і математична статистика» і «Дослідження операцій».

Чотири задачі пов'язані з дослідженням статистичних моделей і дві – з дослідженням моделей оптимізації.

Структура завершеної роботи повинна містити:

- постановку задачі;
- початкові дані;
- розрахункові формули;
- результати розрахунків;
- графічні побудови, якщо вони передбачені завданням;
- висновки за результатами розрахунків.

Початкові дані обираються за індивідуальним варіантом. Якщо дані не відповідають завданню, самостійна робота не зараховується.

Висновки за отриманими результатами повинні продемонструвати здатність студента до самостійного формулювання і аналізу результатів виконаної роботи

Методичні вказівки містять для кожної роботи постановку задачі, порядок її виконання, детальний опис методики дослідження, контрольні запитання, варіанти індивідуальних завдань і список рекомендованої літератури.

Критерії оцінки знань при виконанні робіт визначені в Робочій програмі дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ».

Самостійні письмові роботи мають статус модульних, які виконуються протягом міжмодульного періоду і оцінюються від 4 до 6 балів. Захист письмової роботи передбачає володіння знаннями як теоретичного курсу, так і набутих навичок розв'язку практичних завдань.

6 балів («відмінно») нараховується студентові, який у встановлений термін захистив роботу і при її захисті засвідчив поглибленні знання теоретичного курсу, вміння застосовувати ці знання при розв'язку практичних проблем, спроможність аналізувати отримані результати.

5 балів («добре») нараховується студентові, в роботі якого є незначні помилки, які не можна вважати за принципові, але які знижують загальну оцінку роботи, а також якщо робота захищена поза встановленого терміну.

4 бали («задовільно») отримує студент, який не вклався у встановлений термін, припустився значних помилок в оцінці теоретичних передумов, а також має прорахунки у розрахунковому завданні.

0 балів («незадовільно») заслуговує студент, робота якого демонструє суттєві недоліки, відсутність навичок розрахунку робіт або робота взагалі відсутня.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

РОЗРОБКА СТАТИСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

1. Постановка задачі

За даними спостережень за транспортними процесами визначити їхню емпіричну формулу з числа трьох запропонованих моделей: лінійної, параболічної та гіперболічної. Передбачається, що ці моделі мають вигляд:

$$t_l = a_0 + a_1x; \quad (1.1)$$

$$t_p = a_0 + a_1x + a_2x^2; \quad (1.2)$$

$$t_g = a_0 + a_1 \frac{1}{x}; \quad (1.3)$$

2. Порядок виконання роботи

2.1. За початковими даними індивідуального варіанта визначити коефіцієнти лінійної (1.1), параболічної (1.2) та гіперболічної (1.3) моделей за методом найменших квадратів.

2.2. Вибрати із запропонованих моделей ту, яка найкраще описує задану емпіричну криву.

2.3. Побудувати в одній системі координат графіки заданої емпіричної залежності та її лінійної, параболічної та гіперболічної моделей.

3. Навчальний матеріал

3.1. Визначення коефіцієнтів моделей

Для визначення коефіцієнтів лінійної (1.1), параболічної (1.2) та гіперболічної (1.3) моделей застосовується метод найменших квадратів.

За методом найменших квадратів найкращими коефіцієнтами a_0 , a_1 , a_2 вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень теоретичних значень $f(x_i, a_0, a_1, a_2)$ від спостережених y_i від буде мінімальною:

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, a_0, a_1, a_2) - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

де n – кількість спостережень.

Оскільки функція S залежить від коефіцієнтів a_0 , a_1 , a_2 , то потрібно знайти такі їх значення, що мінімізують функцію. Для цього треба дорівняти до нуля приватні похідні від S по a_0 , a_1 , a_2 , тобто задача зводиться до розв'язку системи нормальних рівнянь:

$$\frac{dS}{da_0} = 0; \quad \frac{dS}{da_1} = 0; \quad \frac{dS}{da_2} = 0. \quad (3.2)$$

Для лінійної залежності $y = a_0 + a_1x$ вираз (3.1) має вигляд:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (3.3)$$

Для приватних похідних по a_0 і a_1 відповідно до (3.2) маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \\ \frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Після деяких перетворень система приймає остаточний вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i. \end{cases} \quad (3.5)$$

Для *параболічної* залежності $y_p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ вираз (3.1) має вигляд:

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (3.6)$$

Для приватних похідних по a_0 , a_1 , і a_2 відповідно до (3.2) маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) = 0 \\ \frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i = 0 \\ \frac{dS}{da_2} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Після перетворень система рівнянь (3.7) приймає остаточний вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Для *гіперболічної* залежності $y_g = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$ вираз (3.1) приймає вигляд:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \frac{1}{x_i} - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (3.9)$$

Для приватних похідних по a_0 і a_1 відповідно до (3.2) маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dS}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \frac{1}{x_i} - y_i) = 0 \\ \frac{dS}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \frac{1}{x_i} - y_i) \frac{1}{x_i} = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Після перетворень система (3.10) приймає остаточний вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Для спрощення зовнішнього вигляду систем (3.5), (3.8) і (3.11) запровадимо такі позначення:

$$\begin{aligned} S_0 &= n; \quad S_1 = \sum_{i=1}^n x_i; \quad S_2 = \sum_{i=1}^n y_i; \quad S_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad S_4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i; \quad S_5 = \sum_{i=1}^n x_i^3; \\ S_6 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^2; \quad S_7 = \sum_{i=1}^n x_i^4; \quad S_8 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}; \quad S_9 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}; \quad S_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

З огляду на (3.12) зробимо відповідну заміну для лінійної залежності і система (3.5) матиме вигляд:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 = S_2 \\ S_1 a_0 + S_3 a_1 = S_4. \end{cases} \quad (3.13)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 обчислюються за допомогою визначника другого порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_1 \\ S_4 & S_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_3 - S_4 S_1}{S_0 S_3 - S_1^2}; \quad (3.14)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_1 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_4 - S_1 S_2}{S_0 S_3 - S_1^2}. \quad (3.15)$$

У такий самий спосіб робимо заміну чинників системи (3.8) для параболічної моделі.

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 + S_3 a_2 = S_2 \\ S_1 a_0 + S_3 a_1 + S_5 a_2 = S_4 \\ S_3 a_0 + S_5 a_1 + S_7 a_2 = S_6 \end{cases} \quad (3.16)$$

Коефіцієнти a_0 , a_1 , і a_2 обчислюються за допомогою визначника третього порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_1 & S_3 \\ S_4 & S_3 & S_5 \\ S_6 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_3 & S_5 \\ S_3 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_3 S_7 + S_1 S_5 S_6 + S_4 S_5 S_3 - S_3^2 S_6 - S_5^2 S_2 - S_4 S_1 S_7}{S_0 S_3 S_7 + 2 S_1 S_5 S_3 - S_3^3 - S_1^2 S_7 - S_5^2 S_0}; \quad (3.17)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_6 & S_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_3 & S_5 \\ S_3 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_4 S_7 + S_2 S_5 S_3 + S_1 S_6 S_3 - S_3^2 S_4 - S_1 S_2 S_7 - S_6 S_5 S_0}{S_0 S_3 S_7 + 2 S_1 S_5 S_3 - S_3^3 - S_1^2 S_7 - S_5^2 S_0}; \quad (3.18)$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_3 & S_5 \\ S_3 & S_5 & S_7 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_3 S_6 + S_1 S_4 S_3 + S_1 S_5 S_2 - S_3^2 S_2 - S_1^2 S_6 - S_5 S_4 S_0}{S_0 S_3 S_7 + 2 S_1 S_5 S_3 - S_3^3 - S_1^2 S_7 - S_5^2 S_0}. \quad (3.19)$$

Аналогічні заміни зробимо для *гіперболічної* залежності і система (3.11) набуває вигляду:

$$\begin{cases} S_0 a_1 + S_8 a_1 = S_2 \\ S_8 a_0 + S_9 a_1 = S_{10}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 обчислюються за допомогою визначника другого порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_8 \\ S_{10} & S_9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_8 \\ S_8 & S_9 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_9 - S_{10} S_8}{S_0 S_9 - S_8^2}; \quad (3.21)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_8 & S_{10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_8 \\ S_8 & S_9 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_{10} - S_8 S_2}{S_0 S_9 - S_8^2}. \quad (3.22)$$

3.2. Використання таблиці для розрахунку коефіцієнтів моделей

Розрахунок сум (3.12) для визначення коефіцієнтів лінійної, параболічної та гіперболічної моделей рекомендується виконати з використанням табл. 3.1. Доцільність табличного способу розрахунків пояснюється подальшим розв'язком таких моделей у середовищі *Excel* при виконанні лабораторних робіт дисципліни «Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ».

Таблиця 3.1

Розрахунок сум

x	y	x^2	yx	x^3	yx^2	x^4	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{y}{x}$
.
.
.
Σx	Σy	Σx^2	Σyx	Σx^3	Σyx^2	Σx^4	$\Sigma \frac{1}{x}$	$\Sigma \frac{1}{x^2}$	$\Sigma \frac{y}{x}$
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}

3.3. Визначення результуючої моделі

Методика визначення моделі, яка дає найкраще наближення до емпіричної моделі транспортного процесу, також базується на методі найменших квадратів. За цим методом визначається сума квадратів відхилень даних спостереження y_i ($i=1, 2, \dots, 10$) від лінійної y_{li} , параболічної y_{pi} та гіперболічної y_{gi} моделей. Результуючою буде та модель, для якої ця сума мінімальна.

Для *лінійної* моделі сума квадратів відхилень має вигляд:

$$S_l = \sum_{i=1}^n (y_{li} - y_i)^2. \quad (3.23)$$

Для *параболічної* моделі:

$$S_p = \sum_{i=1}^n (y_{pi} - y_i)^2. \quad (3.24)$$

Для *гіперболічної* моделі:

$$S_g = \sum_{i=1}^n (y_{gi} - y_i)^2. \quad (3.25)$$

Ознакою вибору моделі є умова:

$$\min\{S_l, S_p, S_g\} \quad (3.26)$$

Приклад розрахунку сум квадратів відхилень даних спостереження від відповідних значень моделей демонструє табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Вибір моделі

x	y	Лінійна модель		Параболічна модель		Гіперболічна модель	
		y_l	$(y_l - y)^2$	y_p	$(y_p - y)^2$	y_g	$(y_g - y)^2$
.
.
.
С у м а			$\Sigma(y_l - y)^2$		$\Sigma(y_p - y)^2$		$\Sigma(y_g - y)^2$

3.4. Побудова суміщеного графіка

Для побудови суміщеного графіка в системі координат XU наносяться точки з координатами $(x_i, y_i; i = \overline{1, n})$, отримані в результаті спостережень, і з'єднуються кривою (емпірична крива – y). У цій же системі координат розміщують лінійну y_l , параболічну y_p і гіперболічну y_g моделі. Вигляд графіків дозволяє візуально оцінити, яка з досліджуваних моделей найбільш точно відображає характер емпіричної кривої.

4. Контрольні запитання та завдання

4.1. За яким методом визначаються коефіцієнти лінійної, параболічної та гіперболічної моделей?

4.2. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?

4.3. Навести методику вибору результуючої моделі з числа запропонованих.

4.4. Яким чином відбувається візуалізація проведених досліджень?

5. Варіанти індивідуальних завдань

Для визначення індивідуального завдання за варіантом, який призначається студентові, потрібно за табл. 5.1 знайти номер задачі і номер таблиці з початковими даними, які відповідають цій задачі.

Таблиця 5.1

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних	Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних
1	Задача № 1	Таблиця 5.2	16	Задача № 4	Таблиця 5.17
2	Задача № 1	Таблиця 5.3	17	Задача № 4	Таблиця 5.18
3	Задача № 1	Таблиця 5.4	18	Задача № 4	Таблиця 5.19
4	Задача № 1	Таблиця 5.5	19	Задача № 5	Таблиця 5.20
5	Задача № 2	Таблиця 5.6	20	Задача № 5	Таблиця 5.21
6	Задача № 2	Таблиця 5.7	21	Задача № 5	Таблиця 5.22
7	Задача № 2	Таблиця 5.8	22	Задача № 5	Таблиця 5.23
8	Задача № 2	Таблиця 5.9	23	Задача № 5	Таблиця 5.24
9	Задача № 2	Таблиця 5.10	24	Задача № 6	Таблиця 5.25
10	Задача № 3	Таблиця 5.11	25	Задача № 6	Таблиця 5.26
11	Задача № 3	Таблиця 5.12	26	Задача № 6	Таблиця 5.27
12	Задача № 3	Таблиця 5.13	27	Задача № 6	Таблиця 5.28
13	Задача № 3	Таблиця 5.14	28	Задача № 7	Таблиця 5.29
14	Задача № 4	Таблиця 5.15	29	Задача № 7	Таблиця 5.30
15	Задача № 4	Таблиця 5.16	30	Задача № 7	Таблиця 5.31

Задача № 1. Визначити залежність потреби шахти у чотиривісних піввагонах (n вагонів) від добового видобутку вугілля (Q тис.т).

Таблиця 5.2

n	12	23	35	46	58	64	72
Q	1	2	3	4	5	6	7

Таблиця 5.3

n	18	26	36	48	59	69	78
Q	1,5	2,2	3,1	4,3	5,2	6,4	7,3

Таблиця 5.4

n	16	27	39	50	61	68	78
Q	1,2	2,2	3,4	4,6	5,2	6,4	7,1

Таблиця 5.5

n	13	24	34	51	58	66	79
Q	1,1	2,0	3,1	4,6	5,2	5,9	7,2

Задача № 2. Визначити залежність часу простою вагонів на сортувальній станції (t годин) від добового вагонопотоку (N сотні вагонів).

Таблиця 5.6

t	2	3	4	5	6	7	8	9
N	5,6	3,1	2,8	2,0	1,7	1,6	1,28	1,3

Таблиця 5.7

t	1,9	3,3	3,8	4,8	5,7	6,9	7,2	8,5
N	5	2,8	3,2	1,9	1,8	1,6	1,3	1,2

Таблиця 5.8

t	1,8	2,4	3,6	3,8	4,2	5	6,4	7,4
N	3,4	2,8	2,5	2,3	2	1,8	1,6	1,3

Таблиця 5.9

t	1,7	2,2	2,9	3,6	4,5	5,3	6,5	7,3
N	4,3	3,2	2,8	2,2	1,7	1,6	1,4	1,2

Таблиця 5.10

t	1,2	1,4	2,2	3,1	4,3	5,4	6,7	7,2
N	3,7	2,8	2,1	1,7	1,6	1,3	1,2	1,1

Задача № 3. Визначити залежність добового навантаження вугілля на шахті (Q тис.т) від кількості днів навантаження вугілля (D днів).

Таблиця 5.11

Q	10	20	25	30	35	40	50	55	65	75
D	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8

Таблиця 5.12

Q	11	22	35	40	45	50	55	60	78	85
D	1	1	2	3	3	4	4	5	6	8

Таблиця 5.13

Q	9	28	40	45	55	56	60	75	77	86
D	1	2	3	4	4	5	5	6	7	8

Таблиця 5.14

Q	12	10	36	45	54	60	70	76	80	88
D	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8

Задача № 4. Визначити залежність часу сортування вагонів (t хвилин) від кількості вагонів у складі поїзда (n вагонів).

Таблиця 5.15

t	12	15	16,2	16,7	21	24,5	28,2	29	29,3	30,6
n	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54

Таблиця 5.16

t	10,9	11,6	12,7	13,6	14,1	15,9	16,3	17,8	18,2	21,3
n	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52

Таблиця 5.17

t	9,7	11,3	12,1	15,1	17,6	22	23,4	24,4	24,9	25,4
n	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Таблиця 5.18

t	11,8	13,5	16,3	17,4	20,6	24	26	26,7	27	29,2
n	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63

Таблиця 5.19

t	11,2	12,3	13,5	15	15,7	16,8	17,9	18,4	18,9	20,1
n	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Задача № 5. Визначити залежність середньої величини кінцевої групи m_k від потужності вагонопотоку (N сотні вагонів).

Таблиця 5.20

m_k	11	16	20	23	25	26	27	34
N	1	2	3	4	5	6	7	8

Таблиця 5.21

m_k	12	20	23	28	32	38	40	43
N	1,1	2,3	3	4,6	5,6	6,1	7,5	8,2

Таблиця 5.22

m_k	10	19	25	31	40	41	48	51
N	0,9	2,1	3,4	4,6	5,2	6,8	7,5	8,1

Таблиця 5.23

m_k	11	18	25	31	43	45	48	54
N	1,3	2,1	3,5	4,1	5,8	6,2	7,3	8,9

Таблиця 5.24

m_k	9	21	25	40	43	49	54	58
N	1	2,1	3,6	4	5,8	6,6	7,9	8,8

Задача № 6. Визначити залежність між середньодобовим навантаженням вагонів n та відповідним коефіцієнтом добової нерівномірності k .

Таблиця 5.25

n	251	270	245	298	247	210	269	227	226	200
k	1,19	1,21	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,29	1,3

Таблиця 5.26

<i>n</i>	265	261	260	258	245	230	223	228	235	215
<i>k</i>	1,2	1,22	1,23	1,25	1,25	1,26	1,3	1,31	1,33	1,32

Таблиця 5.27

<i>n</i>	268	261	256	245	234	230	220	218	200	196
<i>k</i>	1,11	1,18	1,2	1,2	1,23	1,25	1,28	1,28	1,3	1,32

Таблиця 5.28

<i>n</i>	259	250	250	245	228	209	205	200	198	190
<i>k</i>	1,1	1,15	1,2	1,21	1,22	1,29	1,31	1,31	1,33	1,34

Задача № 7. Визначити залежність між капіталовкладенням для заданого обсягу перевезень вугілля з шахти (*A* млн грн) і відстанню транспортування (*l* км).

Таблиця 5.29

<i>A</i>	3,8	4,2	4,8	5,9	7,3	7,8	9,2
<i>l</i>	5	10	15	20	25	30	35

Таблиця 5.30

<i>A</i>	3,2	4,6	5,1	6,7	7,3	7,8	8,2
<i>l</i>	4	9	14	19	24	29	34

Таблиця 5.31

<i>A</i>	4,3	6	6,9	7,4	8,6	9,7	12
<i>l</i>	6	11	16	21	26	31	36

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

ОБРОБКА СТАТИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ ЕРЛАНГА

1. Постановка задачі

За даними спостережень за астрономічним часом прибуття вантажних поїздів на сортувальну станцію (96 спостережень) визначити інтервали між прибуттям поїздів у хвиликах. Для прийнятої гіпотези про розподіл Ерланга визначити числові характеристики інтервалів, параметри розподілу і перевірити вірогідність прийнятої гіпотези.

2. Порядок виконання роботи

2.1. На підставі спостереження астрономічного часу прибуття поїздів на станцію визначити інтервали між прибуттям поїздів (у хвиликах).

2.2. Отриманий ряд інтервалів між прибуттям поїздів (95 значень) об'єднати у розряди (групування інтервалів).

2.3. Скласти статистичний ряд інтервалів між прибуттям поїздів.

2.4. Сформувати таблицю 3.1 для визначення числових характеристик статистичного ряду.

2.5. Сформувати таблицю 3.2 для визначення щільності ймовірності розподілу Ерланга.

2.6. Сформувати таблицю 3.3 для перевірки гіпотези про розподіл Ерланга за критеріями узгодження Пірсона і умовою Романовського.

2.7. Побудувати гістограму розподілу частоти влучення інтервалів у розряди.

2.8. Побудувати функцію щільності ймовірності розподілу Ерланга.

3. Навчальний матеріал

3.1. Методика ущільнення статистичного ряду

Інтервали часу між прибуттям поїздів у розформування визначаються шляхом вирахування часу прибуття наступного поїзда від попереднього.

Результатом розрахунків будуть 95 значень інтервалів часу між прибуттям поїздів у хвиликах, у розташуванні яких важко знайти будь-яку закономірність.

Щоб дослідити отримані дані, необхідно, не змінюючи сутності, привести їх у деякий порядок шляхом об'єднання у групи (розряди). Обираючи довжину групування даних керуються таким міркуванням: без істотної помилки дорівняти всі значення ознаки, віднесеної до будь-якої групи, середньому значенню групи. Для цього необхідно спочатку передивитися початковий матеріал, відмітити найбільше і найменше значення інтервалів і поділити різницю між ними на передбачуване число розрядів.

Існує емпірична формула для визначення довжини інтервалу (формула Стерджеса):

$$I = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{R}, \quad (3.1)$$

де t_{\max} – максимальне значення інтервалу;

t_{\min} – мінімальне значення інтервалу;
 R – кількість розрядів, $R=1+3,2 \lg n$;
 n – кількість спостережень, $n=95$.

Після визначення довжини і кількості розрядів починається групування спостережень. Значення випадкової величини об'єднуються у розряди і підраховується кількість значень, які потрапили у кожний розряд. Кількість спостережень, яка потрапила у розряд, називається **частотою** розряду (m_i), а їхня частка в спільній сукупності – **частістю** (p_i). Порядок, в якому частоти розподіляються за розрядами, становить **розподіл статистичного ряду**.

3.2. Розрахунок числових характеристик інтервалів

Інтервал часу між прибуттям поїздів – це випадкова величина, числовими характеристиками якої є її **математичне сподівання**, **дисперсія**, **середнє квадратичне відхилення** і **коефіцієнт варіації**, які розраховуються за відповідними формулами.

Математичне сподівання:

$$M(t) = \frac{\sum_{i=1}^R t_i^{cp} m_i}{\sum_{i=1}^R m_i} \quad (3.2)$$

Дисперсія інтервалів:

$$D(t) = \frac{\sum_{i=1}^R (t_i^{cp} - M(t))^2 m_i}{\sum_{i=1}^R m_i} \quad (3.3)$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)} \quad (3.4)$$

Коефіцієнт варіації:

$$g(t) = \frac{\sigma(t)}{M(t)} \quad (3.5)$$

Розрахунок числових характеристик доцільно реалізувати у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Обробка статистичного ряду

Початок розряду t_n	Кінець розряду t_k	Середнє значення t_i^{cp}	Частота влучення в розряд m_i	$t_i^{cp} m_i$	$(t_i^{cp} - M(t))^2 m_i$	$p_i = \frac{m_i}{n}$
.
.
.
$\sum_i m_i$				$\sum_{i=1}^R t_i^{cp} m_i$	$\sum_{i=1}^R (t_i^{cp} - M(t))^2 m_i$	$\sum_{i=1}^R p_i = 1$

3.3. Визначення параметрів розподілу Ерланга

Інтервали часу між прибуттям поїздів на сортувальну станцію досить добре описуються розподілом Ерланга $f(t)$:

$$f(t) = \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} t^{(k-1)} e^{-k\lambda t}, \quad (3.6)$$

де $f(t)$ – щільність імовірності (диференційний закон розподілу);

t – поточне значення інтервалу;

λ – середня інтенсивність влучення в розряд:

$$\lambda = \frac{60}{M(t)}; \quad (3.7)$$

k – параметр розподілу Ерланга, який являє собою співвідношення між математичним сподіванням і дисперсією:

$$k = \frac{M^2(t)}{D(t)} = \frac{1}{g^2(t)}. \quad (3.8)$$

Результат, отриманий за формулою (3.8), потрібно округлити до цілого і для індивідуальних завдань роботи він прийме значення 1 або 2.

Якщо $k=1$, то розрахункова формула (3.6) матиме вигляд:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (3.9)$$

а якщо $k=2$, то

$$f(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t}. \quad (3.10)$$

Для розрахунку щільності ймовірності (3.6) формується таблиця 3.2.

Таблиця 3.2

Розрахунок щільності ймовірності

t_i^{cp}	$\frac{t_i^{cp}}{60}$	$f(t)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

3.4. Перевірка гіпотези про розподіл Ерланга

Для перевірки ступеня узгодження розрахункового розподілу Ерланга зі статистичним розподілом застосовується критерій згоди Пірсона χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^R \frac{(np_i - m_i)^2}{np_i}, \quad (3.11)$$

де R – кількість розрядів статистичного ряду, $R=8$;

p_i – імовірність влучення в i -й розряд;

m_i – частота спостереження влучення в i -й розряд;

n – загальна кількість спостережень;

np_i – теоретична (розрахункова) частота влучення в i -й розряд.

Імовірність p_i влучення в i -й розряд визначається як різниця між значеннями інтегральної функції розподілу Ерланга $F(t)$ на кінцях розряду:

5. Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 5.1

Астрономічний час прибуття поїздів на станцію

Варіант 1				Варіант 2			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	0:03	49	23:55	1	7:00	49	3:10
2	0:55	50	1:20	2	8:50	50	3:12
3	1:25	51	1:37	3	8:59	51	3:24
4	1:30	52	1:45	4	9:10	52	3:54
5	1:35	53	2:32	5	9:20	53	4:00
6	2:55	54	2:50	6	9:45	54	4:20
7	3:28	55	3:45	7	9:47	55	5:20
8	4:16	56	3:55	8	10:20	56	5:45
9	4:48	57	4:25	9	10:53	57	6:55
10	4:53	58	5:01	10	11:30	58	7:15
11	5:10	59	5:42	11	11:41	59	7:48
12	6:30	60	6:32	12	11:52	60	7:55
13	6:40	61	6:45	13	12:10	61	8:10
14	6:59	62	6:50	14	13:30	62	8:15
15	7:27	63	7:00	15	14:01	63	8:17
16	7:35	64	7:42	16	14:15	64	8:27
17	7:45	65	8:00	17	14:16	65	8:37
18	7:59	66	8:30	18	14:27	66	8:59
19	9:00	67	10:02	19	14:38	67	9:10
20	9:57	68	10:25	20	14:59	68	9:40
21	10:47	69	10:30	21	16:20	69	9:58
22	11:25	70	10:55	22	16:20	70	10:20
23	12:17	71	11:15	23	16:40	71	10:59
24	14:23	72	11:57	24	17:35	72	11:06
25	15:03	73	12:22	25	17:40	73	11:18
26	15:15	74	12:32	26	17:50	74	11:30
27	15:28	75	12:40	27	17:59	75	11:41
28	15:40	76	13:10	28	18:41	76	11:49
29	15:52	77	14:57	29	18:58	77	11:59
30	16:37	78	15:05	30	19:25	78	12:08
31	16:50	79	15:30	31	19:37	79	12:48
32	17:30	80	15:57	32	19:48	80	12:54
33	17:57	81	15:58	33	19:55	81	13:10
34	18:10	82	16:10	34	21:20	82	13:25
35	18:37	83	16:25	35	21:31	83	13:55
36	18:47	84	17:00	36	21:42	84	14:40
37	18:57	85	17:10	37	22:58	85	14:50
38	19:22	86	18:05	38	23:15	86	14:59
39	19:22	87	19:22	39	23:19	87	15:30
40	19:50	88	19:32	40	23:22	88	15:41
41	20:00	89	19:50	41	23:50	89	15:53
42	20:40	90	19:57	42	23:57	90	16:07
43	21:00	91	20:00	43	0:59	91	17:10
44	21:35	92	21:37	44	1:10	92	17:35
45	21:58	93	21:55	45	1:20	93	17:55
46	22:42	94	22:20	46	1:31	94	18:00
47	23:15	95	22:35	47	1:38	95	18:15
48	23:30	96	23:40	48	2:41	96	18:26

Варіант 3				Варіант 4			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	18:00	49	17:28	1	7:40	49	23:57
2	18:40	50	17:50	2	8:53	50	0:56
3	19:05	51	18:00	3	8:55	51	0:57
4	19:35	52	18:49	4	9:00	52	1:10
5	20:10	53	18:55	5	9:17	53	1:27
6	20:45	54	19:25	6	9:38	54	1:50
7	20:59	55	19:40	7	9:47	55	2:23
8	21:35	56	20:50	8	10:10	56	2:25
9	22:14	57	21:07	9	10:43	57	2:45
10	22:25	58	21:50	10	10:48	58	3:10
11	22:55	59	22:37	11	11:20	59	3:15
12	23:10	60	22:40	12	11:40	60	3:40
13	0:00	61	22:51	13	11:50	61	4:02
14	0:10	62	0:09	14	12:33	62	4:15
15	0:48	63	0:20	15	13:37	63	5:00
16	0:50	64	0:32	16	14:00	64	5:20
17	0:59	65	0:57	17	14:05	65	5:43
18	1:17	66	1:20	18	14:05	66	7:23
19	1:40	67	1:35	19	14:25	67	7:26
20	3:20	68	1:50	20	14:30	68	7:38
21	3:50	69	2:30	21	14:42	69	7:45
22	4:20	70	2:45	22	14:45	70	7:55
23	4:50	71	3:40	23	15:42	71	8:10
24	5:20	72	3:50	24	16:15	72	9:20
25	5:35	73	4:30	25	16:17	73	9:40
26	6:20	74	4:59	26	16:35	74	9:45
27	6:40	75	5:37	27	17:25	75	9:55
28	7:20	76	5:47	28	17:35	76	9:57
29	7:30	77	6:30	29	17:40	77	10:45
30	7:35	78	6:55	30	17:46	78	11:20
31	7:50	79	6:57	31	17:53	79	11:30
32	7:50	80	7:57	32	18:32	80	11:35
33	9:30	81	8:35	33	19:15	81	11:55
34	10:10	82	9:10	34	19:30	82	12:50
35	10:25	83	9:20	35	19:40	83	13:02
36	11:40	84	9:31	36	19:55	84	13:37
37	11:50	85	9:45	37	21:13	85	14:07
38	12:41	86	10:01	38	21:18	86	14:30
39	12:55	87	11:07	39	21:30	87	14:55
40	13:25	88	12:10	40	21:40	88	15:20
41	13:41	89	12:28	41	21:57	89	15:30
42	14:38	90	12:37	42	22:50	90	15:40
43	14:46	91	13:00	43	23:07	91	15:45
44	15:40	92	13:50	44	23:15	92	15:50
45	16:30	93	14:10	45	23:20	93	15:57
46	16:51	94	14:22	46	23:22	94	16:05
47	17:10	95	14:49	47	23:40	95	16:10
48	17:25	96	15:07	48	23:50	96	17:30

Варіант 5				Варіант 6			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	1:03	49	20:47	1	22:35	49	14:15
2	1:26	50	21:08	2	0:45	50	15:00
3	1:33	51	21:27	3	0:50	51	15:35
4	1:43	52	21:40	4	1:20	52	16:00
5	1:57	53	21:53	5	2:01	53	16:03
6	2:05	54	22:02	6	2:12	54	16:10
7	2:32	55	22:19	7	2:23	55	16:21
8	3:01	56	22:30	8	2:30	56	16:32
9	3:15	57	22:38	9	2:45	57	16:35
10	3:42	58	23:45	10	3:45	58	16:55
11	4:20	59	0:06	11	4:01	59	18:01
12	4:38	60	0:24	12	4:03	60	18:08
13	5:01	61	0:42	13	4:05	61	19:09
14	5:24	62	1:05	14	4:28	62	19:20
15	6:35	63	1:25	15	4:39	63	19:35
16	7:15	64	1:25	16	4:39	64	20:06
17	8:40	65	2:17	17	4:45	65	20:11
18	9:08	66	2:51	18	5:07	66	20:23
19	9:16	67	3:10	19	5:18	67	20:50
20	9:40	68	3:32	20	5:20	68	22:15
21	10:03	69	4:12	21	5:33	69	22:55
22	10:20	70	5:08	22	5:45	70	23:58
23	10:30	71	5:31	23	6:05	71	1:09
24	10:48	72	6:10	24	6:12	72	1:59
25	11:12	73	6:23	25	6:25	73	2:40
26	12:35	74	6:48	26	6:30	74	2:50
27	12:53	75	7:15	27	6:56	75	2:55
28	13:15	76	8:57	28	7:20	76	4:35
29	13:25	77	9:18	29	8:01	77	5:50
30	13:40	78	9:34	30	8:05	78	5:55
31	13:58	79	10:07	31	8:30	79	6:10
32	14:57	80	10:48	32	8:56	80	6:59
33	15:22	81	11:00	33	9:10	81	7:19
34	16:27	82	11:15	34	10:10	82	7:50
35	16:32	83	11:42	35	11:15	83	7:55
36	17:06	84	12:20	36	11:20	84	8:05
37	17:35	85	12:38	37	11:30	85	8:40
38	17:45	86	13:17	38	11:31	86	8:49
39	17:55	87	13:28	39	11:41	87	9:49
40	18:02	88	13:32	40	11:45	88	10:20
41	18:21	89	13:40	41	11:56	89	10:40
42	18:35	90	14:27	42	12:01	90	10:45
43	19:04	91	14:34	43	12:12	91	10:57
44	19:20	92	14:40	44	12:30	92	11:05
45	19:33	93	15:30	45	12:41	93	11:24
46	19:47	94	15:40	46	12:55	94	11:25
47	19:58	95	15:50	47	13:25	95	12:00
48	20:32	96	17:10	48	14:01	96	13:00

Варіант 7				Варіант 8			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	18:35	49	11:35	1	18:01	49	9:01
2	18:41	50	12:10	2	18:22	50	9:30
3	20:15	51	12:47	3	18:40	51	9:41
4	20:20	52	12:52	4	19:15	52	10:05
5	20:40	53	13:22	5	19:30	53	11:05
6	20:50	54	13:52	6	20:05	54	11:15
7	20:55	55	14:20	7	20:10	55	11:26
8	21:56	56	14:35	8	20:40	56	11:30
9	22:03	57	14:46	9	20:42	57	13:10
10	22:18	58	15:00	10	20:56	58	13:25
11	22:25	59	15:02	11	21:15	59	13:30
12	22:35	60	15:20	12	21:17	60	13:45
13	23:45	61	15:22	13	21:32	61	13:45
14	23:50	62	16:40	14	21:48	62	14:15
15	23:56	63	17:05	15	21:59	63	14:18
16	0:10	64	17:10	16	22:05	64	14:29
17	0:20	65	17:25	17	22:15	65	14:41
18	0:35	66	17:48	18	22:35	66	15:20
19	0:44	67	17:58	19	22:47	67	15:32
20	2:03	68	18:40	20	22:58	68	15:59
21	2:17	69	18:49	21	23:15	69	16:30
22	2:35	70	19:03	22	23:40	70	17:10
23	2:40	71	19:15	23	23:49	71	17:20
24	3:30	72	19:30	24	0:40	72	17:50
25	3:40	73	19:35	25	0:48	73	18:10
26	3:45	74	19:35	26	1:06	74	18:50
27	3:52	75	21:03	27	2:06	75	18:55
28	5:05	76	21:08	28	2:20	76	19:20
29	5:10	77	21:30	29	2:35	77	19:47
30	5:15	78	22:20	30	2:47	78	19:50
31	6:05	79	22:28	31	3:05	79	20:30
32	6:26	80	22:43	32	4:45	80	20:57
33	6:27	81	23:30	33	5:00	81	21:38
34	6:45	82	23:37	34	5:15	82	22:07
35	7:10	83	23:42	35	5:20	83	22:10
36	7:55	84	0:10	36	5:35	84	22:46
37	8:13	85	0:13	37	5:47	85	22:47
38	8:20	86	0:15	38	5:58	86	22:59
39	8:25	87	1:13	39	6:02	87	23:25
40	8:40	88	1:19	40	6:10	88	23:46
41	8:55	89	1:25	41	6:43	89	23:59
42	9:04	90	1:28	42	7:05	90	0:10
43	9:18	91	1:38	43	7:25	91	0:45
44	10:40	92	1:48	44	7:33	92	1:20
45	10:44	93	2:08	45	8:01	93	2:40
46	11:00	94	2:25	46	8:08	94	2:50
47	11:02	95	2:45	47	8:25	95	2:59
48	11:20	96	3:05	48	8:30	96	3:20

Варіант 9				Варіант 10			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	0:04	49	16:25	1	0:07	49	13:38
2	0:10	50	16:35	2	0:10	50	14:24
3	0:21	51	16:35	3	0:23	51	15:08
4	0:32	52	16:50	4	1:00	52	15:15
5	1:15	53	17:40	5	1:18	53	15:17
6	1:30	54	18:01	6	1:30	54	15:48
7	2:01	55	18:15	7	1:50	55	15:50
8	2:15	56	18:30	8	2:12	56	16:15
9	2:28	57	18:50	9	2:25	57	16:20
10	2:40	58	19:20	10	2:30	58	16:20
11	2:45	59	19:59	11	2:40	59	16:51
12	2:50	60	20:10	12	2:50	60	17:05
13	3:48	61	20:45	13	3:15	61	17:12
14	3:50	62	22:45	14	3:38	62	17:20
15	3:58	63	22:49	15	3:50	63	17:40
16	4:15	64	22:54	16	4:15	64	18:15
17	4:44	65	22:59	17	4:32	65	18:37
18	5:02	66	23:15	18	4:55	66	18:50
19	5:08	67	23:25	19	5:08	67	19:18
20	5:43	68	23:36	20	5:15	68	19:40
21	6:02	69	23:47	21	5:22	69	19:45
22	6:26	70	23:51	22	6:01	70	20:09
23	7:12	71	0:09	23	6:15	71	20:11
24	7:22	72	0:30	24	7:05	72	20:20
25	7:40	73	0:35	25	7:25	73	20:26
26	8:01	74	1:01	26	7:35	74	21:01
27	8:15	75	1:48	27	7:45	75	21:05
28	9:15	76	2:38	28	8:10	76	21:10
29	9:35	77	3:01	29	8:20	77	21:25
30	9:44	78	3:05	30	8:28	78	22:41
31	9:53	79	3:10	31	8:38	79	22:45
32	10:05	80	3:52	32	8:53	80	22:50
33	10:15	81	4:02	33	9:00	81	22:54
34	10:26	82	4:18	34	9:22	82	23:00
35	10:34	83	4:30	35	9:35	83	23:15
36	11:12	84	5:05	36	9:44	84	23:20
37	11:37	85	5:35	37	10:10	85	23:35
38	11:53	86	5:38	38	10:34	86	23:45
39	12:04	87	6:05	39	10:53	87	23:50
40	12:20	88	6:55	40	11:05	88	23:55
41	12:43	89	7:35	41	11:18	89	0:35
42	13:00	90	7:40	42	11:22	90	0:43
43	14:10	91	7:48	43	11:45	91	1:03
44	14:22	92	8:15	44	12:10	92	1:20
45	14:23	93	8:25	45	12:34	93	1:27
46	14:50	94	9:15	46	13:15	94	2:15
47	15:55	95	9:35	47	13:18	95	2:20
48	16:01	96	9:53	48	13:24	96	2:30

Варіант 11				Варіант 12			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	2:40	49	19:59	1	5:22	49	19:45
2	2:50	50	20:10	2	6:01	50	20:09
3	3:48	51	20:45	3	6:15	51	20:11
4	3:50	52	22:45	4	7:05	52	20:20
5	3:58	53	22:49	5	7:25	53	20:26
6	4:15	54	22:54	6	7:35	54	21:01
7	4:44	55	22:59	7	7:45	55	21:05
8	5:02	56	23:15	8	8:10	56	21:10
9	5:08	57	23:25	9	8:20	57	21:25
10	5:43	58	23:36	10	8:37	58	22:40
11	6:02	59	23:47	11	8:38	59	22:45
12	6:26	60	23:51	12	8:53	60	22:50
13	7:12	61	0:09	13	9:00	61	22:54
14	7:12	62	0:30	14	9:22	62	23:00
15	7:40	63	0:35	15	9:35	63	23:15
16	8:01	64	1:01	16	9:44	64	23:20
17	8:15	65	1:48	17	10:00	65	23:35
18	9:15	66	2:38	18	10:34	66	23:45
19	9:35	67	3:01	19	10:53	67	23:50
20	9:44	68	3:05	20	11:05	68	23:55
21	9:53	69	3:10	21	11:18	69	0:35
22	10:05	70	3:52	22	11:22	70	0:43
23	10:15	71	4:02	23	11:45	71	1:03
24	10:26	72	4:19	24	12:10	72	1:20
25	10:34	73	4:30	25	12:34	73	1:27
26	11:12	74	5:05	26	13:15	74	2:15
27	11:37	75	5:36	27	13:18	75	2:20
28	11:53	76	5:39	28	13:24	76	2:30
29	12:04	77	6:05	29	13:38	77	2:33
30	12:21	78	6:55	30	14:24	78	2:46
31	12:43	79	7:35	31	15:08	79	3:23
32	13:00	80	7:40	32	15:15	80	3:41
33	14:10	81	7:48	33	15:17	81	3:53
34	14:22	82	8:15	34	15:48	82	4:13
35	14:23	83	8:25	35	15:50	83	4:35
36	14:50	84	9:15	36	16:15	84	4:48
37	15:55	85	9:35	37	16:20	85	4:58
38	16:02	86	9:53	38	16:20	86	5:08
39	16:25	87	10:00	39	17:00	87	5:33
40	16:35	88	10:12	40	17:05	88	5:56
41	16:40	89	10:24	41	17:12	89	6:08
42	16:50	90	11:07	42	17:20	90	6:33
43	17:40	91	11:22	43	17:40	91	6:50
44	18:01	92	11:53	44	18:15	92	7:13
45	18:15	93	12:07	45	18:37	93	7:25
46	18:30	94	12:20	46	18:50	94	7:48
47	18:50	95	12:32	47	19:18	95	8:01
48	19:20	96	12:47	48	19:40	96	8:08

Варіант 13				Варіант 14			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	22:25	49	15:12	1	21:15	49	13:30
2	22:35	50	15:20	2	21:17	50	13:45
3	23:45	51	15:32	3	21:32	51	13:45
4	23:50	52	16:00	4	21:48	52	14:15
5	23:56	53	17:05	5	21:59	53	14:18
6	0:10	54	17:10	6	22:05	54	14:29
7	0:20	55	17:25	7	22:15	55	14:41
8	0:35	56	17:48	8	22:35	56	15:20
9	0:56	57	17:58	9	22:47	57	15:32
10	2:03	58	18:40	10	22:58	58	15:59
11	2:17	59	18:49	11	23:15	59	16:30
12	2:35	60	19:03	12	23:40	60	17:10
13	2:40	61	19:15	13	23:49	61	17:20
14	3:30	62	19:30	14	0:40	62	17:50
15	3:40	63	19:35	15	0:48	63	18:10
16	3:45	64	19:35	16	1:06	64	18:50
17	3:52	65	20:00	17	2:06	65	18:55
18	5:05	66	20:30	18	2:20	66	19:20
19	5:10	67	21:30	19	2:35	67	19:47
20	5:15	68	22:20	20	2:47	68	19:50
21	6:05	69	22:28	21	3:05	69	20:30
22	6:26	70	22:43	22	4:45	70	20:57
23	6:27	71	23:30	23	5:0	71	21:38
24	6:45	72	23:37	24	5:15	72	22:07
25	7:10	73	23:42	25	5:20	73	22:10
26	7:55	74	0:10	26	5:35	74	22:46
27	8:13	75	0:13	27	5:47	75	22:47
28	8:20	76	0:15	28	5:58	76	22:59
29	8:25	77	1:13	29	6:02	77	23:25
30	8:40	78	1:19	30	6:10	78	23:46
31	8:55	79	1:25	31	6:43	79	23:59
32	9:04	80	1:28	32	7:05	80	0:10
33	9:18	81	1:38	33	7:25	81	0:45
34	10:41	82	1:48	34	7:33	82	1:20
35	10:44	83	2:05	35	8:01	83	2:40
36	11:00	84	2:25	36	8:08	84	2:50
37	11:12	85	2:45	37	8:25	85	2:59
38	11:20	86	3:05	38	8:30	86	3:20
39	12:00	87	3:11	39	9:01	87	3:41
40	12:10	88	3:45	40	9:30	88	3:59
41	12:47	89	3:50	41	9:41	89	4:34
42	12:52	90	4:10	42	10:05	90	4:49
43	13:22	91	4:20	43	11:05	91	5:24
44	13:53	92	4:25	44	11:15	92	5:29
45	14:20	93	5:26	45	11:26	93	6:00
46	14:35	94	5:33	46	11:30	94	6:02
47	14:46	95	5:48	47	13:10	95	6:16
48	15:00	96	5:55	48	13:25	96	6:28

Варіант 15				Варіант 16			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	20:43	49	19:25	1	9:38	49	1:50
2	20:59	50	19:40	2	9:47	50	2:23
3	21:35	51	20:50	3	10:11	51	2:26
4	22:14	52	21:07	4	10:43	52	2:45
5	22:25	53	21:50	5	10:48	53	3:10
6	22:56	54	22:37	6	11:20	54	3:15
7	23:10	55	22:40	7	11:40	55	3:40
8	0:00	56	22:51	8	11:50	56	4:02
9	0:10	57	0:09	9	12:03	57	4:15
10	0:48	58	0:20	10	13:37	58	5:15
11	0:50	59	0:32	11	14:00	59	5:20
12	0:59	60	0:57	12	14:05	60	5:43
13	1:17	61	1:20	13	14:05	61	6:55
14	1:40	62	1:35	14	14:25	62	7:07
15	3:20	63	1:50	15	14:30	63	7:38
16	3:50	64	2:30	16	14:42	64	7:45
17	4:20	65	2:45	17	14:45	65	7:55
18	4:50	66	3:40	18	15:42	66	8:10
19	5:20	67	3:50	19	16:15	67	9:25
20	5:35	68	4:30	20	16:17	68	9:40
21	6:20	69	4:59	21	16:35	69	9:45
22	6:40	70	5:37	22	17:25	70	9:55
23	7:20	71	5:47	23	17:35	71	9:57
24	7:30	72	6:30	24	17:40	72	10:45
25	7:35	73	6:55	25	17:46	73	11:20
26	7:50	74	6:57	26	17:53	74	11:30
27	7:50	75	7:57	27	18:32	75	11:35
28	9:30	76	8:35	28	19:15	76	11:55
29	10:10	77	9:10	29	19:30	77	12:50
30	10:25	78	9:20	30	19:40	78	13:02
31	11:40	79	9:31	31	19:55	79	13:20
32	11:50	80	9:45	32	21:13	80	13:55
33	12:41	81	10:01	33	21:18	81	14:30
34	12:55	82	11:07	34	21:32	82	14:50
35	13:25	83	12:10	35	21:40	83	15:20
36	13:41	84	12:28	36	21:57	84	15:31
37	14:38	85	12:37	37	22:52	85	15:42
38	14:46	86	13:00	38	23:07	86	15:45
39	15:40	87	13:50	39	23:15	87	15:50
40	16:30	88	14:10	40	23:20	88	15:57
41	16:51	89	14:22	41	23:22	89	16:05
42	17:10	90	14:49	42	23:40	90	17:15
43	17:25	91	15:07	43	23:50	91	17:30
44	17:28	92	15:47	44	23:57	92	18:10
45	17:50	93	16:12	45	0:56	93	18:35
46	18:00	94	16:42	46	0:57	94	19:05
47	18:49	95	17:17	47	1:10	95	19:35
48	18:55	96	17:52	48	1:27	96	20:10

Варіант 17				Варіант 18			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	1:30	49	0:40	1	8:00	49	4:10
2	1:55	50	2:25	2	9:50	50	4:12
3	2:25	51	2:37	3	9:59	51	4:24
4	3:13	52	2:45	4	10:10	52	4:54
5	3:25	53	3:32	5	10:20	53	5:00
6	3:55	54	3:50	6	10:45	54	5:20
7	4:28	55	4:45	7	10:47	55	6:20
8	5:16	56	4:55	8	11:20	56	6:45
9	5:45	57	5:25	9	11:53	57	7:55
10	5:53	58	6:01	10	12:30	58	8:15
11	6:40	59	6:42	11	12:41	59	8:48
12	6:59	60	7:32	12	12:52	60	8:55
13	7:40	61	7:45	13	13:10	61	9:10
14	7:59	62	7:51	14	14:30	62	9:15
15	8:27	63	8:05	15	15:01	63	9:17
16	8:35	64	8:42	16	15:15	64	9:27
17	8:45	65	9:00	17	15:16	65	9:37
18	8:59	66	10:00	18	15:27	66	9:59
19	10:00	67	11:02	19	15:38	67	10:10
20	10:57	68	11:25	20	15:59	68	10:40
21	11:47	69	11:30	21	17:20	69	10:58
22	12:25	70	11:55	22	17:20	70	11:20
23	13:17	71	12:15	23	17:40	71	11:59
24	15:09	72	12:57	24	18:35	72	12:06
25	16:03	73	13:22	25	18:40	73	12:18
26	16:15	74	13:32	26	18:50	74	12:30
27	16:28	75	14:07	27	18:59	75	12:41
28	16:40	76	14:25	28	19:41	76	12:49
29	16:52	77	15:57	29	19:58	77	12:59
30	17:37	78	16:02	30	20:25	78	13:08
31	17:50	79	16:50	31	20:37	79	13:48
32	18:30	80	16:57	32	20:48	80	13:54
33	18:57	81	16:58	33	20:55	81	14:10
34	19:10	82	17:30	34	22:20	82	14:25
35	19:37	83	17:47	35	22:31	83	14:55
36	19:47	84	18:47	36	22:42	84	15:40
37	19:57	85	18:57	37	23:58	85	15:50
38	20:22	86	20:12	38	0:15	86	15:59
39	20:22	87	20:22	39	0:19	87	16:30
40	20:50	88	20:32	40	0:22	88	16:41
41	21:00	89	20:50	41	0:50	89	16:53
42	21:40	90	20:57	42	0:57	90	17:07
43	22:00	91	22:10	43	1:59	91	18:10
44	22:35	92	22:37	44	2:10	92	18:35
45	22:58	93	23:10	45	2:20	93	18:55
46	23:42	94	23:57	46	2:31	94	19:00
47	0:15	95	0:10	47	2:58	95	19:15
48	0:30	96	0:40	48	3:41	96	19:26

Варіант 19				Варіант 20			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	19:03	49	18:28	1	8:40	49	0:57
2	19:40	50	18:50	2	9:53	50	1:56
3	20:05	51	19:03	3	9:55	51	1:57
4	20:35	52	19:49	4	10:00	52	2:10
5	21:10	53	19:55	5	10:17	53	2:27
6	21:46	54	20:25	6	10:38	54	2:50
7	21:59	55	20:40	7	10:47	55	3:23
8	22:35	56	21:50	8	11:10	56	3:25
9	23:14	57	22:10	9	11:43	57	3:45
10	23:28	58	22:50	10	11:48	58	4:10
11	23:55	59	23:35	11	12:20	59	4:15
12	0:10	60	23:40	12	12:40	60	4:40
13	1:00	61	23:51	13	12:50	61	5:02
14	1:10	62	1:09	14	13:03	62	5:15
15	1:48	63	1:20	15	14:37	63	6:15
16	1:50	64	1:32	16	15:00	64	6:20
17	1:59	65	1:57	17	15:05	65	6:43
18	2:17	66	2:22	18	15:05	66	7:55
19	2:40	67	2:35	19	15:25	67	8:07
20	4:20	68	2:50	20	15:30	68	8:38
21	4:50	69	3:30	21	15:42	69	8:45
22	5:20	70	3:45	22	15:45	70	8:55
23	5:50	71	4:40	23	16:42	71	9:10
24	6:20	72	4:50	24	17:15	72	10:18
25	6:35	73	5:30	25	17:17	73	10:40
26	7:20	74	5:59	26	17:35	74	10:45
27	7:40	75	6:37	27	18:22	75	10:55
28	8:20	76	6:47	28	18:35	76	10:57
29	8:30	77	7:30	29	18:40	77	11:45
30	8:35	78	7:55	30	18:46	78	12:20
31	8:50	79	7:57	31	18:53	79	12:30
32	8:50	80	8:57	32	19:30	80	12:35
33	10:30	81	9:35	33	20:15	81	12:55
34	11:10	82	10:10	34	20:30	82	13:50
35	11:25	83	10:20	35	20:40	83	14:02
36	12:40	84	10:31	36	20:55	84	14:20
37	12:55	85	10:45	37	22:15	85	14:55
38	13:41	86	11:01	38	22:18	86	15:30
39	13:55	87	12:07	39	22:30	87	15:50
40	14:25	88	13:10	40	22:40	88	16:20
41	14:43	89	13:28	41	22:57	89	16:30
42	15:38	90	13:37	42	23:50	90	16:40
43	15:46	91	14:00	43	0:07	91	16:45
44	16:40	92	14:50	44	0:15	92	16:50
45	17:30	93	15:10	45	0:20	93	16:57
46	17:51	94	15:22	46	0:22	94	17:06
47	18:13	95	15:49	47	0:40	95	18:15
48	18:25	96	16:07	48	0:50	96	18:30

Варіант 21				Варіант 22			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	2:03	49	21:47	1	23:30	49	15:15
2	2:26	50	22:08	2	1:45	50	15:30
3	2:33	51	22:27	3	1:50	51	16:35
4	2:43	52	22:40	4	2:20	52	16:37
5	2:57	53	22:53	5	3:05	53	17:03
6	3:05	54	23:02	6	3:12	54	17:10
7	3:32	55	23:19	7	3:23	55	17:21
8	4:01	56	23:30	8	3:30	56	17:32
9	4:15	57	23:30	9	3:45	57	17:35
10	4:42	58	0:45	10	4:45	58	17:55
11	5:20	59	1:06	11	5:00	59	19:01
12	5:38	60	1:24	12	5:03	60	19:08
13	6:01	61	1:42	13	5:05	61	20:09
14	6:24	62	2:05	14	5:28	62	20:20
15	7:35	63	2:25	15	5:39	63	20:35
16	8:15	64	2:55	16	5:39	64	21:06
17	9:40	65	3:17	17	5:45	65	21:11
18	10:08	66	3:51	18	6:07	66	21:23
19	10:16	67	4:10	19	6:18	67	21:50
20	11:00	68	4:32	20	6:20	68	23:15
21	11:03	69	5:12	21	6:33	69	23:35
22	11:20	70	6:08	22	6:45	70	0:58
23	11:30	71	6:31	23	7:05	71	2:09
24	11:48	72	7:10	24	7:12	72	2:59
25	12:12	73	7:23	25	7:25	73	3:40
26	13:35	74	7:48	26	7:30	74	3:50
27	13:53	75	8:15	27	7:36	75	3:55
28	14:15	76	9:57	28	8:20	76	5:35
29	14:25	77	10:18	29	9:01	77	6:50
30	14:40	78	10:34	30	9:05	78	6:55
31	14:58	79	11:07	31	9:45	79	7:10
32	15:57	80	11:48	32	9:56	80	7:59
33	16:22	81	12:12	33	10:10	81	8:19
34	17:27	82	12:15	34	11:10	82	8:50
35	17:32	83	12:42	35	12:15	83	8:55
36	18:06	84	13:20	36	12:20	84	9:05
37	18:35	85	13:38	37	12:30	85	9:40
38	18:45	86	14:17	38	12:31	86	9:49
39	18:55	87	14:30	39	12:41	87	10:49
40	19:02	88	14:46	40	12:45	88	11:20
41	19:21	89	14:59	41	12:56	89	11:31
42	19:35	90	15:27	42	13:01	90	11:45
43	20:04	91	15:52	43	13:12	91	11:57
44	20:20	92	16:12	44	13:30	92	12:05
45	20:33	93	16:30	45	13:45	93	12:17
46	20:47	94	17:01	46	13:55	94	12:25
47	20:58	95	17:10	47	14:25	95	12:30
48	21:32	96	18:10	48	15:01	96	12:49

Варіант 23				Варіант 24			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	19:33	49	12:35	1	19:01	49	10:01
2	19:41	50	13:10	2	19:22	50	10:30
3	21:15	51	13:47	3	19:40	51	10:41
4	21:20	52	13:52	4	20:15	52	11:05
5	21:40	53	14:22	5	20:30	53	12:05
6	21:50	54	14:52	6	21:05	54	12:15
7	21:55	55	15:20	7	21:10	55	12:26
8	22:56	56	15:35	8	21:40	56	12:30
9	23:03	57	15:46	9	21:42	57	14:10
10	23:18	58	16:00	10	21:56	58	14:25
11	23:25	59	16:02	11	22:15	59	14:30
12	23:35	60	16:20	12	22:17	60	14:45
13	0:45	61	16:22	13	22:32	61	14:45
14	0:50	62	17:40	14	22:48	62	15:15
15	0:56	63	18:05	15	22:59	63	15:18
16	1:10	64	18:10	16	23:05	64	15:29
17	1:20	65	18:25	17	23:15	65	15:41
18	1:35	66	18:48	18	23:35	66	16:20
19	1:44	67	18:58	19	23:47	67	16:32
20	3:03	68	19:40	20	23:58	68	16:59
21	3:17	69	19:49	21	0:15	69	17:30
22	3:35	70	20:03	22	0:40	70	18:10
23	3:40	71	20:15	23	0:49	71	18:20
24	4:30	72	20:30	24	1:40	72	18:50
25	4:40	73	20:35	25	1:48	73	19:10
26	4:45	74	20:35	26	2:06	74	19:50
27	4:52	75	21:03	27	3:06	75	19:55
28	6:05	76	21:08	28	3:20	76	20:20
29	6:10	77	22:30	29	3:35	77	20:47
30	6:15	78	23:20	30	3:47	78	20:50
31	7:05	79	23:28	31	4:05	79	21:30
32	7:26	80	23:43	32	5:45	80	21:57
33	7:27	81	0:30	33	6:00	81	22:38
34	7:45	82	0:37	34	6:15	82	23:07
35	8:10	83	0:42	35	6:20	83	23:10
36	8:55	84	1:10	36	6:35	84	23:46
37	9:13	85	1:13	37	6:47	85	23:47
38	9:20	86	1:15	38	6:58	86	23:59
39	9:25	87	2:13	39	7:02	87	0:25
40	9:40	88	2:19	40	7:10	88	0:46
41	9:55	89	2:25	41	7:43	89	0:59
42	10:04	90	2:28	42	8:05	90	1:10
43	10:18	91	2:38	43	8:25	91	1:45
44	11:40	92	2:48	44	8:33	92	2:20
45	11:44	93	3:08	45	9:01	93	3:40
46	12:00	94	3:25	46	9:08	94	3:50
47	12:02	95	3:45	47	9:25	95	3:59
48	12:20	96	4:08	48	9:30	96	4:20

Варіант 25				Варіант 26			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	1:05	49	17:25	1	1:07	49	14:38
2	1:10	50	17:35	2	1:10	50	15:24
3	1:21	51	17:35	3	1:23	51	16:08
4	1:32	52	17:50	4	2:00	52	16:15
5	2:15	53	18:40	5	2:18	53	16:17
6	2:30	54	19:01	6	2:30	54	16:48
7	3:01	55	19:15	7	2:50	55	16:50
8	3:15	56	19:30	8	3:12	56	17:15
9	3:28	57	19:50	9	3:25	57	17:20
10	3:40	58	20:20	10	3:30	58	17:20
11	3:45	59	20:59	11	3:40	59	17:51
12	3:50	60	21:10	12	3:50	60	18:05
13	4:48	61	21:45	13	4:15	61	18:12
14	4:50	62	23:45	14	4:38	62	18:20
15	4:58	63	23:49	15	4:50	63	18:40
16	5:15	64	23:54	16	5:15	64	19:15
17	5:44	65	23:59	17	5:32	65	19:37
18	6:02	66	0:15	18	5:55	66	19:50
19	6:08	67	0:25	19	6:08	67	20:18
20	6:43	68	0:36	20	6:15	68	20:40
21	7:02	69	0:47	21	6:22	69	20:45
22	7:26	70	0:51	22	7:01	70	21:09
23	8:12	71	1:09	23	7:15	71	21:11
24	8:22	72	1:30	24	8:05	72	21:20
25	8:40	73	1:35	25	8:25	73	21:26
26	9:01	74	2:01	26	8:35	74	22:01
27	9:15	75	2:48	27	8:45	75	22:05
28	10:15	76	3:38	28	9:10	76	22:10
29	10:35	77	4:01	29	9:20	77	22:25
30	10:44	78	4:05	30	9:28	78	23:40
31	10:53	79	4:10	31	9:38	79	23:45
32	11:05	80	4:52	32	9:53	80	23:50
33	11:15	81	5:02	33	10:00	81	23:54
34	11:26	82	5:18	34	10:22	82	0:00
35	11:34	83	5:30	35	10:35	83	0:15
36	12:12	84	6:05	36	10:44	84	0:20
37	12:37	85	6:35	37	11:10	85	0:35
38	12:53	86	6:38	38	11:34	86	0:45
39	13:04	87	7:05	39	11:53	87	0:50
40	13:20	88	7:55	40	12:05	88	0:55
41	13:43	89	8:35	41	12:18	89	1:35
42	14:00	90	8:40	42	12:22	90	1:43
43	15:10	91	8:48	43	12:45	91	2:03
44	15:22	92	9:15	44	13:10	92	2:20
45	15:23	93	9:25	45	13:34	93	2:27
46	15:50	94	10:15	46	14:15	94	3:15
47	16:55	95	10:35	47	14:18	95	3:20
48	17:01	96	10:53	48	14:24	96	3:30

Варіант 27				Варіант 28			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	3:46	49	20:59	1	6:25	49	20:45
2	3:50	50	21:10	2	7:01	50	21:09
3	4:48	51	21:45	3	7:15	51	21:11
4	4:50	52	23:45	4	8:05	52	21:20
5	4:58	53	23:49	5	8:25	53	21:26
6	5:15	54	23:54	6	8:35	54	22:01
7	5:44	55	23:59	7	8:45	55	22:05
8	6:02	56	0:15	8	9:10	56	22:10
9	6:08	57	0:25	9	9:20	57	22:25
10	6:43	58	0:36	10	9:28	58	23:40
11	7:02	59	0:47	11	9:38	59	23:45
12	7:26	60	0:51	12	9:53	60	23:50
13	8:12	61	1:09	13	10:00	61	23:54
14	8:12	62	1:30	14	10:22	62	0:00
15	8:40	63	1:35	15	10:35	63	0:15
16	9:01	64	2:01	16	10:44	64	0:20
17	9:15	65	2:48	17	11:10	65	0:35
18	10:15	66	3:38	18	11:34	66	0:45
19	10:35	67	4:01	19	11:53	67	0:50
20	10:44	68	4:05	20	12:05	68	0:55
21	10:53	69	4:10	21	12:18	69	1:35
22	11:05	70	4:52	22	12:22	70	1:43
23	11:15	71	5:02	23	12:45	71	2:03
24	11:26	72	5:19	24	13:10	72	2:20
25	11:34	73	5:30	25	13:34	73	2:27
26	12:12	74	6:05	26	14:15	74	3:15
27	12:37	75	6:36	27	14:18	75	3:20
28	12:53	76	6:39	28	14:24	76	3:30
29	13:04	77	7:05	29	14:38	77	3:33
30	13:21	78	7:55	30	15:24	78	3:46
31	13:43	79	8:35	31	16:08	79	4:23
32	14:00	80	8:40	32	16:15	80	4:41
33	15:10	81	8:48	33	16:17	81	4:53
34	15:22	82	9:15	34	16:48	82	5:13
35	15:23	83	9:25	35	16:50	83	5:35
36	15:50	84	10:15	36	17:15	84	5:48
37	16:55	85	10:35	37	17:20	85	5:58
38	17:02	86	10:53	38	17:20	86	6:08
39	17:25	87	11:00	39	17:51	87	6:33
40	17:35	88	11:12	40	18:05	88	6:56
41	17:45	89	11:24	41	18:12	89	7:08
42	17:50	90	12:07	42	18:20	90	7:33
43	18:40	91	12:22	43	18:40	91	7:50
44	19:01	92	12:53	44	19:15	92	8:13
45	19:15	93	13:07	45	19:37	93	8:25
46	19:30	94	13:20	46	19:50	94	8:48
47	19:50	95	13:32	47	20:18	95	9:01
48	20:20	96	13:47	48	20:40	96	9:08

Варіант 29				Варіант 30			
№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття	№ з/п	Час прибуття
1	23:25	49	16:02	1	22:15	49	14:35
2	23:35	50	16:20	2	22:17	50	14:45
3	0:45	51	16:22	3	22:32	51	14:45
4	0:50	52	17:40	4	22:48	52	15:15
5	0:56	53	18:05	5	22:59	53	15:18
6	1:10	54	18:10	6	23:05	54	15:29
7	1:20	55	18:25	7	23:15	55	15:41
8	1:35	56	18:48	8	23:35	56	16:20
9	1:44	57	18:58	9	23:47	57	16:32
10	2:14	58	19:40	10	23:58	58	16:59
11	3:17	59	19:49	11	0:15	59	17:30
12	3:35	60	20:03	12	0:40	60	18:10
13	3:40	61	20:15	13	0:49	61	18:20
14	4:30	62	20:30	14	1:40	62	18:50
15	4:40	63	20:35	15	1:48	63	19:10
16	4:45	64	20:35	16	2:06	64	19:50
17	4:52	65	22:03	17	3:06	65	19:55
18	6:05	66	22:08	18	3:20	66	19:55
19	6:10	67	22:30	19	3:35	67	20:20
20	6:15	68	23:20	20	3:47	68	20:47
21	7:05	69	23:28	21	4:05	69	20:50
22	7:26	70	23:43	22	5:45	70	21:30
23	7:27	71	0:30	23	6:00	71	21:57
24	7:45	72	0:37	24	6:15	72	22:38
25	8:10	73	0:42	25	6:20	73	23:07
26	8:55	74	1:10	26	6:35	74	23:10
27	9:13	75	1:13	27	6:47	75	23:46
28	9:20	76	1:15	28	6:58	76	23:47
29	9:25	77	2:13	29	7:02	77	23:59
30	9:40	78	2:19	30	7:10	78	0:25
31	9:55	79	2:25	31	7:43	79	0:46
32	10:04	80	2:28	32	8:05	80	0:59
33	10:18	81	2:38	33	8:25	81	1:10
34	10:46	82	2:48	34	8:33	82	1:45
35	11:44	83	3:05	35	9:01	83	2:20
36	12:00	84	3:25	36	9:08	84	3:40
37	12:02	85	3:45	37	9:25	85	3:50
38	12:20	86	4:05	38	9:30	86	3:59
39	12:35	87	4:11	39	10:01	87	4:20
40	13:10	88	4:45	40	10:30	88	4:41
41	13:47	89	4:50	41	10:41	89	4:59
42	13:52	90	5:10	42	11:05	90	5:34
43	14:22	91	5:20	43	12:05	91	5:49
44	14:53	92	5:25	44	12:15	92	6:24
45	15:20	93	6:26	45	12:26	93	6:29
46	15:35	94	6:33	46	12:30	94	7:00
47	15:46	95	6:48	47	13:14	95	7:02
48	16:00	96	6:55	48	14:25	96	7:16

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

1. Постановка задачі

Виконати кореляційний аналіз за даними спостережень змін значень двох економічних показників, які подані у вигляді кореляційної таблиці (кореляційної решітки). Передбачається лінійний зв'язок між показниками вигляду:

$$y = a_0 + a_1 x. \quad (1.1)$$

2. Порядок виконання роботи

2.1. За початковими даними індивідуального варіанту визначити коефіцієнт кореляції між показниками y та x .

2.2. Визначити умовні середні \bar{y}_x .

2.3. За методом найменших квадратів визначити коефіцієнти a_0 і a_1 моделі регресії $\bar{y}_x = a_0 + a_1 x$.

2.4. Визначити розрахункове значення критерію Фішера F_p і порівняти його з теоретичним F_t .

2.5. У системі координат XU побудувати суміщений графік умовних середніх \bar{y}_x та їхніх розрахункових значень $\bar{y}_{xp} = f(x)$.

3. Навчальний матеріал

3.1. Визначення коефіцієнта кореляції і умовних середніх

Якщо кожному значенню x відповідає статистичний ряд можливих значень y , то такий зв'язок між показниками називають **статистичним**. Дослідження статистичного зв'язку між x і y передбачає визначення розподілу y для кожного x і зміни цього розподілу залежно від зміни x . Такий розподіл зручно відобразити у вигляді **кореляційної таблиці (решітки)**, табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Кореляційна таблиця (решітка)

y	x					m _y
	1	2	3	4	5	
1	4	6	3			13
2		7	10	7		24
3			2	8	3	13
m _x	4	13	15	15	3	50

На перетині кожного стовпця і кожного рядка кореляційної таблиці задана частота m_{xy} , яка показує скільки разів при заданих значеннях x зустрілися значення y .

В останньому стовпці табл. 3.1 наведені часткові суми $m_y = \sum_x m_{xy}$, а в останньому рядку – часткові суми $m_x = \sum_y m_{xy}$.

Тіснота зв'язку лінійної кореляційно-регресійної моделі вимірюється **коефіцієнтом кореляції** r . Якщо зв'язок між показниками статистичний

(кожному x відповідає статистичний ряд можливих значень y), коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$r = \frac{\sum m_{xy} \delta_x \delta_y}{n \sigma_x \sigma_y}, \quad (3.1)$$

де δ_x, δ_y – відхилення x і y відповідно їхніх загальних середніх $M(x)$ і $M(y)$:

$$\delta_x = x - M(x); \quad \delta_y = y - M(y); \quad (3.2)$$

n – загальне число спостережень;

σ_x, σ_y – середні квадратичні відхилення x і y відповідно:

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}; \quad \sigma_y = \sqrt{D(y)}. \quad (3.3)$$

Загальні середні (математичні сподівання) обчислюються у такий спосіб:

$$M(x) = \frac{\sum m_x x}{n}; \quad M(y) = \frac{\sum m_y y}{n}. \quad (3.4)$$

Дисперсії x і y визначаються за формулами:

$$D(x) = \frac{\sum (x - M(x))^2 m_x}{n}; \quad D(y) = \frac{\sum (y - M(y))^2 m_y}{n}. \quad (3.5)$$

Умовні середні дозволяють оцінити характер зміни y від зміни x і обчислюються за формулою:

$$\bar{y}_x = \frac{\sum m_{xy} y}{m_x}. \quad (3.6)$$

3.2. Визначення коефіцієнтів лінійної моделі

Коефіцієнти лінійної регресійної моделі a_0 і a_1 визначаються за методом найменших квадратів і відповідна система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_0 \sum m_x + a_1 \sum m_x x = \sum m_x \bar{y}_x \\ a_0 \sum m_x x + a_1 \sum m_x x^2 = \sum m_x \bar{y}_x x. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для спрощеного вигляду системи (3.7) запровадимо умовні позначення:

$$S_0 = \sum m_x; \quad S_1 = \sum m_x x; \quad S_2 = \sum m_x \bar{y}_x; \quad S_3 = \sum m_x x^2; \quad S_4 = \sum m_x \bar{y}_x x. \quad (3.8)$$

З урахуванням (3.8) система (3.7) матиме вигляд:

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 = S_2 \\ S_1 a_0 + S_3 a_1 = S_4. \end{cases} \quad (3.9)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 системи (3.9) розраховуються за допомогою визначника другого порядку

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_2 & S_1 \\ S_4 & S_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_2 S_3 - S_4 S_1}{S_0 S_3 - S_1^2}; \quad (3.10)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & S_2 \\ S_1 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_0 S_4 - S_1 S_2}{S_0 S_3 - S_1^2}. \quad (3.11)$$

Коефіцієнти лінійної регресійної моделі визначаються за допомогою таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Розрахунок сум

x	\bar{y}_x	m_x	$m_x x$	$m_x \bar{y}_x$	$m_x x^2$	$m_x \bar{y}_x x$	\bar{y}_{xp}
.
.
		$\sum m_x$	$\sum m_x x$	$\sum m_x \bar{y}_x$	$\sum m_x x^2$	$\sum m_x \bar{y}_x x$	

В останньому стовпці таблиці 3.2 наводяться розрахункові значення умовних середніх \bar{y}_{xp} , які визначаються на основі розрахованих коефіцієнтів a_0 і a_1 за формулою:

$$\bar{y}_{xp} = a_0 + a_1 x. \quad (3.12)$$

3.3. Побудова суміщеного графіка

У системі координат XU будується суміщений графік умовних середніх \bar{y}_x , розрахованих за формулою (3.6), та їхніх значень \bar{y}_{xp} , отриманих на основі дослідження моделі лінійної регресії (3.12).

3.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками

Якщо коефіцієнт кореляції відмінний від нуля, то він за своїм значенням характеризує не тільки наявність, але й тісноту зв'язку між показниками.

Для перевірки гіпотези про наявність лінійного зв'язку в математичній статистиці використовується критерій Фішера. Така перевірка має сенс при такому значенні коефіцієнта кореляції, який не дозволяє зробити однозначний висновок про наявність зв'язку.

Критерій Фішера розраховується за формулою:

$$F = \frac{a_1 D(xy)}{D(y) - a_1 D(xy)} \frac{k_2}{k_1}, \quad (3.13)$$

де a_1 – коефіцієнт лінійної моделі;

$D(xy)$ – дисперсія \bar{y}_x , що обумовлена змінною x , визначається за формулою:

$$D(xy) = \frac{\sum (x - M(x))(\bar{y}_x - M(y))m_x}{n}, \quad (3.14)$$

де n – кількість спостережень, $n = \sum m_x$;

$D(y)$ – дисперсія \bar{y}_x , що обумовлена змінною всіх факторів, під впливом яких знаходиться y , визначається за формулою:

$$D(y) = \frac{\sum (\bar{y}_x - M(y))^2 m_x}{n}; \quad (3.14)$$

k_1 – кількість факторів кореляційної моделі;

k_2 – кількість спостережень, яка визначається за формулою: $k_2 = n - 2$.

Розрахунок складових формули (3.13) виконується у вигляді таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

Розрахунок критерію Фішера

x	\bar{y}_x	m_x	$(\bar{y}_x - M(y))^2 m_x$	$(x - M(x))(\bar{y}_x - M(y))m_x$
.
.
.
			$\sum (\bar{y}_x - M(y))^2 m_x$	$\sum (x - M(x))(\bar{y}_x - M(y))m_x$

Гіпотеза про наявність зв'язку між показниками приймається, якщо розрахункове значення критерію Фішера F більше теоретичного (або нормованого) значення F_t , яке визначається за статистичними таблицями для конкретного числа спостережень і прийнятого рівня значущості α ($\alpha = 1 - p$)

$$F > F_t. \quad (3.15)$$

4. Контрольні запитання та завдання

- 4.1. Дати визначення кореляційної моделі.
- 4.2. Як оцінюється зв'язок між показниками?
- 4.3. Навести основні задачі кореляційного аналізу.
- 4.4. У яких межах змінюється коефіцієнт кореляції?
- 4.5. Як перевіряється гіпотеза про наявність лінійного зв'язку між показниками, що досліджуються?

5. Варіанти індивідуальних завдань

У табл. 5.1 наводиться фрагмент статистичної таблиці для визначення теоретичних значень критерію Фішера F_t щодо моделей, створених за індивідуальними варіантами.

Таблиця 5.1

F -критерій для $\alpha = 0,05$

n	16	20	24	30	40	50	70	100	200
F	4,49	4,35	4,26	4,17	4,08	4,03	3,98	3,94	3,89

У табл. 5.2 подані варіанти індивідуальних завдань. Кожному варіантові відповідає номер задачі і номер таблиці, яка містить початкові дані задачі.

У табл. 5.3–5.32 наведені початкові дані для розв'язку конкретних задач індивідуального варіанта.

Таблиця 5.2

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних	Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних
1	Задача № 1	Таблиця 5.3	16	Задача № 3	Таблиця 5.18
2	Задача № 1	Таблиця 5.4	17	Задача № 3	Таблиця 5.19
3	Задача № 1	Таблиця 5.5	18	Задача № 3	Таблиця 5.20
4	Задача № 1	Таблиця 5.6	19	Задача № 3	Таблиця 5.21
5	Задача № 1	Таблиця 5.7	20	Задача № 3	Таблиця 5.22
6	Задача № 1	Таблиця 5.8	21	Задача № 3	Таблиця 5.23
7	Задача № 1	Таблиця 5.9	22	Задача № 3	Таблиця 5.24
8	Задача № 1	Таблиця 5.10	23	Задача № 3	Таблиця 5.25
9	Задача № 2	Таблиця 5.11	24	Задача № 4	Таблиця 5.26
10	Задача № 2	Таблиця 5.12	25	Задача № 4	Таблиця 5.27
11	Задача № 2	Таблиця 5.13	26	Задача № 4	Таблиця 5.28
12	Задача № 2	Таблиця 5.14	27	Задача № 4	Таблиця 5.29
13	Задача № 2	Таблиця 5.15	28	Задача № 4	Таблиця 5.30
14	Задача № 2	Таблиця 5.16	29	Задача № 4	Таблиця 5.31
15	Задача № 2	Таблиця 5.17	30	Задача № 4	Таблиця 5.32

Задача № 1. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок між довжиною і масою поїздів за даними, наведеними в табл. 5.3–5.10

Таблиця 5.3

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	3	6	2					11
3200-3400	1	4	8	4	2			19
3400-3600			1	6	12	7	1	27
3600-3800					1	3	4	8
m_x	4	10	11	10	15	10	5	65

Таблиця 5.4

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	5	3	1					9
3200-3400	2	7	6	3	1			19
3400-3600			2	6	13	6	2	29
3600-3800					1	4	4	9
m_x	7	10	9	9	15	10	6	66

Таблиця 5.5

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	7	1						8
3200-3400	2	9	8	4	2			25
3400-3600			4	7	11	8	4	34
3600-3800					2	4	5	11
m_x	9	10	12	11	15	12	9	78

Таблиця 5.6

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	6	2	1					9
3200-3400	3	8	8	5	2			26
3400-3600			3	8	13	8	2	34
3600-3800					1	4	6	11
m_x	9	10	12	13	16	12	8	80

Таблиця 5.7

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	2	4	1					7
3200-3400	1	4	7	5	2			19
3400-3600		1	2	8	12	7	1	31
3600-3800					2	3	5	10
m_x	3	9	10	13	16	10	6	67

Таблиця 5.8

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	4	2	2					8
3200-3400	3	7	8	5	1			24
3400-3600		1	3	9	13	5	1	32
3600-3800					2	4	3	9
m_x	7	10	13	14	16	9	4	73

Таблиця 5.9

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	4	1						5
3200-3400	5	10	9	4	2			30
3400-3600		1	5	9	12	8	4	39
3600-3800				3	3	5	6	17
m_x	9	12	14	16	17	13	10	91

Таблиця 5.10

Маса Q , т	Кількість вагонів у составі, m							m_y
	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52	
3000-3200	5	3						8
3200-3400	4	9	8	5	1			27
3400-3600		1	6	10	14	8	2	41
3600-3800					2	5	6	13
m_x	9	13	14	15	17	13	8	89

Задача № 2. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок між випадковими величинами y і x за даними, наведеними у табл.. 5.11–5.17.

Таблиця 5.11

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	4					4
3-5	9	8	2	1		20
5-7		5	9	8	3	25
7-9			4	6	2	12
m_x	13	13	15	15	5	61

Таблиця 5.12

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	10	1				11
3-5	18	15	5	1		39
5-7		6	15	14	4	39
7-9			3	5	8	16
m_x	28	22	23	20	12	105

Таблица 5.13

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	5					5
3-5	8	9	2	1		20
5-7		6	10	8	2	26
7-9			4	3	6	13
m_x	13	15	16	12	8	64

Таблица 5.14

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	6	1				7
3-5	9	5	4	1		19
5-7		12	17	12	4	45
7-9			1	6	6	13
m_x	15	18	22	19	10	84

Таблица 5.15

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	3					3
3-5	8	9	1	1		19
5-7		6	10	11	5	32
7-9			4	5	6	15
m_x	11	15	15	17	11	69

Таблица 5.16

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	9					9
3-5	12	13	4	2		31
5-7		8	15	14	4	41
7-9			2	6	9	17
m_x	21	21	21	22	13	98

Таблиця 5.17

y	x					m_y
	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	
1-3	4					4
3-5	8	10	1	1		20
5-7		6	12	13	2	33
7-9			3	4	7	14
m_x	12	16	16	18	9	71

Задача № 3. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок частоти прибуття різних за величиною груп (умовні вагони) від потужності призначень (N_n) за даними таблиць 5.18–5.25.

Таблиця 5.18

Потужність призначень, N_n	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	9	5	3	1			18
200-300	6	8	3	2	1		20
300-400	4	12	5	2	1		24
400-500	3	7	6	5	3	2	26
500-600		5	5	6	4	3	23
m_x	22	37	22	16	9	5	111

Таблиця 5.19

Потужність призначень, N_n	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	8	1	1				10
200-300	5	8	4	2			19
300-400	3	9	10	7	1		30
400-500		1	8	10	11	4	34
500-600			2	3	5	6	16
m_x	16	19	25	22	17	10	109

Таблиця 5.20

Потужність призначень, N_n	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	7	6					13
200-300	5	8	4	1			18
300-400	3	5	10	5	4		27
400-500	1	1	6	9	7	4	28
500-600			3	2	3	7	15
m_x	16	20	23	17	14	11	101

Таблиця 5.21

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	10						10
200-300	7	8	6				21
300-400	5	12	15	6	1		39
400-500		6	7	11	10	4	38
500-600			1	5	6	5	17
m_x	22	26	29	22	17	9	125

Таблиця 5.22

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	9						9
200-300	6	7	3	2			18
300-400	4	12	5	4	1		26
400-500		7	8	7	4	2	28
500-600		5	5	6	4	3	23
m_x	19	31	21	19	9	5	104

Таблиця 5.23

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	7	1					8
200-300	5	8	4	2			19
300-400	2	10	13	7	1		33
400-500		1	8	10	11	4	34
500-600			2	3	5	6	16
m_x	14	20	27	22	17	10	110

Таблиця 5.24

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	6	3					9
200-300	5	9	4	1			19
300-400	3	5	10	5	3		26
400-500		1	6	9	8	4	28
500-600			1	2	3	8	14
m_x	14	18	21	17	14	12	96

Таблиця 5.25

Потужність призначень, N_{Π}	Умовні вагони						m_y
	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	
100-200	9						9
200-300	6	7	5				18
300-400	3	13	15	7	1		39
400-500		6	6	12	8	3	35
500-600			1	5	6	5	17
m_x	18	26	27	24	15	8	118

Задача № 4. Визначити, чи існує кореляційний зв'язок між даними спостережень y і x , значення яких наведені в таблицях 5.26–5.32.

Таблиця 5.26

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	m_y
1	4	1				5
2	2	5	3	1		11
3		2	9	7	3	21
4			2	3	6	11
m_x	6	8	14	11	9	48

Таблиця 5.27

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	7	1				8
2	5	9	2	1		17
3	1	5	10	6	3	25
4			1	3	5	9
m_x	13	15	13	10	8	59

Таблиця 5.28

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	8	4				12
2	5	10	5	1		21
3	3	5	7	6	2	23
4	1		3	2	4	10
m_x	17	19	15	9	6	66

Таблица 5.29

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	5	1				6
2	3	4	2	1		10
3	1	8	6	4		19
4		1	1	2	3	7
m_x	9	14	9	7	3	42

Таблица 5.30

$x \backslash y$	10	15	20	25	30	m_y
1	5	2				7
2	3	7	2	1		13
3		3	10	11	3	27
4			5	6	6	17
m_x	8	12	17	18	9	64

Таблица 5.31

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	6	1				7
2	8	10	3	1		22
3	1	4	12	9	3	29
4			2	3	5	10
m_x	15	15	17	13	8	68

Таблица 5.32

$x \backslash y$	10	20	30	40	50	m_y
1	8	3				11
2	5	10	5	1		21
3	3	4	12	7	3	29
4	1		3	2	5	11
m_x	17	17	20	10	8	72

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

1. Постановка задачі

Розробити нелінійну регресійну модель і виконати кореляційний аналіз за даними спостережень змін значень двох економічних показників. Передбачається гіперболічний зв'язок між показниками:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x}. \quad (1.1)$$

2. Порядок виконання роботи

2.1. Для двох економічних показників, які визначаються за індивідуальним завданням, визначити коефіцієнти регресійної моделі a_0 і a_1 (1.1) із застосуванням методу найменших квадратів.

2.2. Визначити числові характеристики регресійної моделі (математичне сподівання і дисперсії).

2.3. Розрахувати кореляційне співвідношення R .

2.4. Визначити розрахункове значення критерію Стюдента t_p і порівняти його з теоретичним (нормативним) t_T .

3. Навчальний матеріал

3.1. Визначення коефіцієнтів гіперболічної моделі

Коефіцієнти гіперболічної регресійної моделі a_0 і a_1 визначаються за методом найменших квадратів. Методика розрахунку наведена в самостійній роботі № 1, а результуюча система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}, \end{cases} \quad (3.1)$$

де n – кількість спостережень

Розрахунок коефіцієнтів a_0 і a_1 рекомендується виконати зі застосуванням таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Визначення сум для розрахунку коефіцієнтів

x	y	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{y}{x}$	y_T
.
.
.
	$\sum_{i=1}^n y_i$	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$	$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$	$\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$	
	S_1	S_2	S_3	S_4	

За наведеними у табл. 3.1 позначеннями сум (останній рядок таблиці) система (3.1) матиме вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + S_2 a_1 = S_1; \\ S_2 a_0 + S_3 a_1 = S_4. \end{cases} \quad (3.2)$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 розраховуються за визначниками другого порядку:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_4 & S_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{S_1 S_3 - S_4 S_2}{n S_3 - S_2^2}; \quad (3.3)$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & S_1 \\ S_2 & S_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{vmatrix}} = \frac{n S_4 - S_2 S_1}{n S_3 - S_2^2}. \quad (3.4)$$

За коефіцієнтами a_0 і a_1 розраховуються теоретичні (3.1) значення y_T (стовпець 6, табл. 3.1).

3.2. Розрахунок дисперсій

Дисперсія $D(x)$ обумовлена впливом фактора x на y і визначається за формулою:

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{T_i})^2}{n}. \quad (3.5)$$

Дисперсія $D(y)$ обумовлена зміною усіх факторів, які впливають на y , і визначається за формулою:

$$D(y) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - M(y))^2}{n}, \quad (3.6)$$

де $M(y)$ – математичне сподівання, яке розраховується як середнє арифметичне:

$$M(y) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \quad (3.7)$$

Для розрахунку дисперсій доцільно користуватися табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Розрахунок дисперсій

x	y	y_T	$(y - y_T)^2$	$(y - M(y))^2$
.
.
.
	Σy		$\Sigma (y - y_T)^2$	$\Sigma (y - M(y))^2$

3.3. Визначення кореляційного співвідношення

Кореляційне співвідношення R визначається на основі дисперсій $D(y)$ і $D(x)$, обчислених за формулами (3.5) і (3.6):

$$R = \sqrt{\frac{D(y) - D(x)}{D(y)}} = \sqrt{1 - \frac{D(x)}{D(y)}}. \quad (3.8)$$

Якщо $D(x)=D(y)$, то $R=0$ (3.8) і зв'язок між показниками, що досліджуються, відсутній.

Якщо $D(x)=0$, то $R=1$ (3.8) і зв'язок між показниками має характер функціональної залежності.

3.4. Перевірка гіпотези про зв'язок між показниками

Для перевірки гіпотези про існування зв'язку між показниками x і y застосовується така методика розрахунків.

Визначається стандартна помилка S_R кореляційного співвідношення R за формулою:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m}}, \quad (3.9)$$

де n – число спостережень;

m – число факторів регресійної моделі; $m=1$.

Розраховується довірча межа ε_R випадкових коливань R за формулою:

$$\varepsilon_R = t_T S_R, \quad (3.10)$$

де t_T – теоретичне нормоване відхилення t -розподілу Стьюдента, що визначається за статистичною таблицею, фрагмент якої наводиться в таблиці 5.1.

Вірогідність кореляційного співвідношення t_p визначається за умовою:

$$t_p = \frac{R}{S_R} \geq t_T. \quad (3.11)$$

Якщо умова (3.11) додержується, то зв'язок між показниками існує, якщо не додержується ($t_p < t_T$), то зв'язку між показниками немає.

4. Контрольні запитання та завдання

4.1. У яких випадках використовується кореляційне співвідношення R ?

4.2. Навести формули для визначення дисперсій $D(x)$ і $D(y)$.

4.3. Навести формулу для розрахунку кореляційного співвідношення R

4.4. Яка методика використовується для перевірки гіпотези про наявність кореляції?

5. Варіанти індивідуальних завдань

У табл. 5.1 наведено фрагмент статистичної таблиці для визначення теоретичного значення критерію Стьюдента для даних індивідуальних завдань.

Таблиця 5.1

t -критерій ($\alpha=0,05$, $\nu=n-m$)

ν	15	16	17	18	19	20	25
t_T	2,13	2,12	2,11	2,10	2,093	2,086	2,064

У табл. 5.2 подані варіанти індивідуальних завдань. Кожному варіантові відповідає номер задачі і таблиці початкових даних (табл. 5.3–5.7).

Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних	Номер варіанта	Номер задачі	Номер таблиці даних
1	Задача № 1	Таблиця 5.3 (гр.1)	16	Задача № 3	Таблиця 5.5 (гр.5)
2	Задача № 1	Таблиця 5.3 (гр.2)	17	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.1)
3	Задача № 1	Таблиця 5.3 (гр.3)	18	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.2)
4	Задача № 1	Таблиця 5.3 (гр.4)	19	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.3)
5	Задача № 1	Таблиця 5.3 (гр.5)	20	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.4)
6	Задача № 2	Таблиця 5.4 (гр.1)	21	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.5)
7	Задача № 2	Таблиця 5.4 (гр.2)	22	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.6)
8	Задача № 2	Таблиця 5.4 (гр.3)	23	Задача № 4	Таблиця 5.6 (гр.7)
9	Задача № 2	Таблиця 5.4 (гр.4)	24	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.1)
10	Задача № 2	Таблиця 5.4 (гр.5)	25	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.2)
11	Задача № 2	Таблиця 5.4 (гр.6)	26	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.3)
12	Задача № 3	Таблиця 5.5 (гр.1)	27	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.4)
13	Задача № 3	Таблиця 5.5 (гр.2)	28	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.5)
14	Задача № 3	Таблиця 5.5 (гр.3)	29	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.6)
15	Задача № 3	Таблиця 5.5 (гр.4)	30	Задача № 5	Таблиця 5.7 (гр.7)

Задача № 1. Скласти рівняння залежності між фондоємністю і густотою перевезень вантажів і визначити наявність зв'язку між показниками.

Таблиця 5.3

№ пор.	Фондоємність, у	Густота перевезень, х				
		1	2	3	4	5
1	6,4	15,0	14,0	13,0	16,0	11,0
2	9,4	11,0	10,0	10,0	12,0	11,0
3	8,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
4	11,0	30,0	25,0	20,0	22,0	24,0
5	8,8	9,0	8,0	10,0	11,0	12,0
6	8,2	7,0	8,0	9,0	10,0	9,0
7	7,8	6,0	7,0	7,0	8,0	6,0
8	9,2	9,0	8,0	7,0	6,0	10,0
9	8,6	11,0	10,0	10,0	10,0	12,0
10	6,5	14,0	13,0	12,0	11,0	10,0
11	7,0	18,0	18,0	17,0	17,0	18,0
12	7,4	12,0	13,0	14,0	13,0	12,0
13	11,0	11,0	8,0	8,0	8,0	7,0
14	8,0	24,0	22,0	20,0	18,0	18,0
15	9,2	24,0	18,0	12,0	16,0	7,0
16	11,0	12,0	22,0	7,0	12,0	21,0
17	12,0	16,0	28,0	17,0	14,0	13,0

Задача № 2. Скласти рівняння залежності між експлуатаційними витратами на пересування транзитних поїздів і розмірами руху вантажних поїздів на дільницях залізниці і визначити наявність зв'язку між показниками.

Таблиця 5.4

№ пор.	Експлуатаційні витрати, у	Розмір руху вантажних поїздів (у парах поїздів), х					
		1	2	3	4	5	6
1	1,1	90	50	60	70	80	90
2	1,0	40	50	40	50	40	50
3	1,2	35	30	40	45	35	30
4	1,1	20	25	30	35	40	25
5	1,4	40	45	40	35	30	30
6	1,0	60	70	80	65	75	80
7	1,0	15	20	25	30	25	20
8	1,5	10	15	10	15	10	15
9	1,5	40	45	50	45	40	50
10	1,3	30	40	35	45	50	40
11	0,9	40	45	50	60	70	60
12	0,6	90	50	60	70	80	90
13	1,6	15	20	15	25	20	15
14	1,4	15	10	15	20	25	20
15	1,7	10	15	20	25	20	15
16	1,5	25	30	30	30	30	25
17	1,8	10	15	20	25	30	25

Задача № 3. Скласти рівняння залежності між експлуатаційними витратами залізниці на 1 км експлуатаційної довжини та середньодобовою продуктивністю локомотива. Визначити, чи існує зв'язок між цими показниками.

Таблиця 5.5

№ пор.	Експлуатаційні витрати, у	Продуктивність локомотива, х				
		1	2	3	4	5
1	33,5	920	910	890	910	860
2	22,2	740	710	700	710	670
3	34,5	880	880	750	780	750
4	52,4	1030	1000	960	990	930
5	55,3	1400	1410	1390	1400	1320
6	61,8	1370	1320	1250	1300	1180
7	38,0	1170	1140	1090	1120	1050
8	49,8	1000	995	1000	1000	1010
9	51,7	1100	1070	1050	1050	1000
10	85,0	1080	1070	1030	1060	1010
11	56,9	1090	1080	1010	1040	1000
12	58,5	1170	1170	1120	1140	1100
13	42,5	930	930	850	840	910
14	43,1	440	450	440	440	430
15	69,3	1340	1330	1290	1320	1230
16	75,6	1240	1220	1200	1190	1170
17	50,7	1230	1220	1170	1190	1060
18	42,7	1210	1210	1220	1220	1170
19	38,1	1080	1060	970	1010	990

Задача № 4. Скласти рівняння залежності між прибутком залізниці і питомою вагою одного з вантажів у вантажообігу залізниці та визначити наявність зв'язку між цими показниками.

Таблиця 5.6

№ пор.	Прибуток, у	Структура вантажообігу, х						
		1	2	3	4	5	6	7
1	129,6	34,0	13,7	15,0	2,9	7,2	15,8	11,4
2	34,2	23,8	12,0	15,0	6,6	10,2	24,6	7,8
3	62,8	33,6	11,8	15,0	6,5	10,3	14,7	8,1
4	197,5	30,4	14,9	15,8	5,2	10,2	10,6	12,9
5	249,1	32,8	21,0	11,1	4,7	9,2	6,7	14,5
6	145,4	16,8	20,2	6,4	1,7	32,2	13,3	9,4
7	112,3	27,0	8,5	17,8	4,7	11,0	9,6	21,4
8	47,3	22,3	8,6	15,6	4,5	13,8	8,4	26,8
9	83,7	21,7	4,7	14,2	4,5	16,3	13,8	24,8
10	89,8	24,8	6,4	16,4	3,9	18,6	12,7	17,2
11	148,0	17,1	3,0	13,1	2,1	37,5	7,1	20,1
12	118,2	19,0	2,1	14,0	2,0	20,	6,5	36,4
13	204,8	24,5	7,7	16,2	5,7	5,3	32,8	7,8
14	50,1	28,6	8,9	19,1	5,1	2,8	23,7	11,8
15	136,1	22,5	9,0	12,8	5,1	12,2	21,0	17,4
16	246,0	23,9	8,5	11,1	6,1	9,1	25,9	15,4
17	163,3	25,9	11,4	13,8	6,2	4,5	23,5	14,7
18	358,2	27,1	10,9	12,1	5,7	21,9	8,9	13,4
19	89,2	26,4	7,6	21,8	5,3	5,3	29,9	3,7
20	24,8	25,6	10,1	13,0	4,2	23,6	7,9	16,1
21	308,3	20,9	9,2	9,3	5,6	25,5	6,9	22,6
22	409,3	19,9	13,7	8,4	3,2	37,8	7,6	9,4
23	224,9	24,8	20,0	9,3	3,9	12,7	15,8	13,5
24	143,9	27,4	9,1	8,2	5,9	15,1	26,3	8,0
25	50,0	21,5	16,8	10,0	4,6	20,5	21,1	5,5
26	62,8	30,5	22,3	12,9	6,8	23,8	30,2	6,6
27	120,9	25,7	13,5	10,5	5,2	22,5	19,7	9,8
28	220	23,7	10,5	11,3	5,8	20,6	20,5	12,9
29	170,6	21,6	9,5	13,1	5,9	19,9	18,9	11,8

Задача № 5. Скласти рівняння залежності між прибутком залізниці і питомою вагою одного з вантажів у вантажообігу залізниці та визначити наявність зв'язку між цими показниками.

Таблиця 5.7

№ пор.	Прибуток, у	Структура вантажообігу, х						
		1	2	3	4	5	6	7
1	129,6	23,1	23,9	10,8	7,4	3,1	6,6	0,3
2	34,2	18,3	30,2	9,6	3,0	6,2	4,0	7,7
3	62,8	17,2	24,2	11,0	8,4	5,8	9,0	0,6
4	197,5	22,0	25,4	10,2	3,7	4,7	12,0	1,0
5	249,1	15,6	29,8	15,8	3,9	4,5	9,5	0,3
6	145,4	22,0	22,9	8,6	5,0	5,1	10,7	0,9
7	112,3	13,4	19,6	18,7	2,8	2,9	18,4	0,2
8	47,3	20,7	17,2	8,5	5,2	4,3	12,6	1,3
9	83,7	18,2	20,2	4,7	3,1	5,1	12,5	1,2
10	89,8	17,9	21,6	7,1	2,5	3,8	14,1	1,6
11	148,0	13,3	14,2	2,4	1,2	1,7	22,6	2,7
12	118,2	15,7	14,8	1,7	1,0	2,0	18,0	2,1
13	204,8	20,4	20,1	7,3	1,1	6,6	11,8	0,4
14	50,1	25,7	24,0	6,5	1,9	4,6	1,5	0,3
15	136,1	18,1	21,8	8,2	1,1	5,1	11,2	1,7
16	246,0	16,0	22,2	8,3	1,6	5,9	7,4	0,6
17	163,3	15,9	23,5	10,4	0,7	6,1	4,4	0,7
18	358,2	19,2	17,4	6,5	2,7	5,4	25,4	1,0
19	89,2	33,6	22,0	7,0	5,0	5,1	6,6	0,1
20	24,8	18,3	18,7	9,0	2,5	3,0	19,6	1,5
21	308,3	13,3	18,5	6,1	0,9	5,2	22,8	1,8
22	409,3	12,4	15,2	9,5	0,5	3,1	36,0	1,3
23	224,9	14,4	16,2	18,2	0,9	3,0	23,3	0,6
24	143,9	12,8	19,0	9,6	1,4	4,8	30,1	0,4
25	50,0	18,4	16,3	14,6	1,2	3,9	25,9	0,3
26	226,7	17,9	19,6	10,8	1,8	6,9	7,9	1,2
27	132,5	15,7	17,8	11,9	2,1	5,3	4,8	1,1

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

ОПТИМАЛЬНЕ ЗАВАНТАЖЕННЯ ВАНТАЖНИХ ФРОНТІВ

1. Постановка задачі

На станції необхідно розвантажити маршрут однорідного вантажу з визначеної кількості вагонів. Кожен з трьох наявних вантажних фронтів (ВФ) може вмістити деяку кількість вагонів. Відомі також характеристики ВФ: локомотиво-години, які витрачаються на кожний вагон, і прибуток, який забезпечує розвантаження одного вагона.

Усі операції виконуються одним локомотивом, який працює 23 години на добу.

Необхідно таким чином розподілити вагони по вантажних фронтах, щоб забезпечити станції *максимальний* прибуток.

2. Порядок виконання роботи

2.1. За даними індивідуального варіанта скласти математичну модель задачі (цільову функцію і систему обмежень).

2.2. Знайти оптимальний розподіл вагонів під розвантаження в кожному з трьох вантажних фронтів із застосуванням симплекс-методу.

2.3. Виконати аналіз отриманого результату.

3. Навчальний матеріал

3.1. Розробка математичної моделі

Для розробки математичної моделі задачі оптимального розподілу вагонів по вантажних фронтах запровадимо такі позначення:

x_1 – кількість вагонів, що розвантажуються на першому вантажному фронті (1ВФ);

x_2 – кількість вагонів, що розвантажуються на другому вантажному фронті (2ВФ);

x_3 – кількість вагонів, що розвантажуються на третьому вантажному фронті (3ВФ);

D_1 – прибуток станції від розвантаження одного вагона на 1ВФ;

D_2 – прибуток станції від розвантаження одного вагону на 2ВФ;

D_3 – прибуток станції від розвантаження одного вагону на 3ВФ;

C_1 – загальна кількість вагонів, що надходять під розвантаження;

C_2 – добовий час роботи локомотиву ($C_2=23$);

C_3 – загальна місткість 1ВФ;

C_4 – загальна місткість 2ВФ;

C_5 – загальна місткість 3ВФ;

L_1 – витрати локомотиво-годин на один вагон на 1 ВФ;

L_2 – витрати локомотиво-годин на один вагон на 2 ВФ;

L_3 – витрати локомотиво-годин на один вагон на 3 ВФ.

На підставі наведених позначень загальний дохід станції становитиме:

$$F=D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3. \quad (3.1)$$

Система обмежень складається за умовами:

– загальна кількість вагонів, поданих під розвантаження, не перевищує їхньої загальної кількості C_1

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq C_1; \quad (3.2)$$

– час роботи локомотива не перевищує добового C_2

$$L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \leq C_2; \quad (3.3)$$

– кількість вагонів, розвантажених на кожному вантажному фронті, не перевищує їхньої місткості

$$x_1 \leq C_3; \quad x_2 \leq C_4; \quad x_3 \leq C_5. \quad (3.4)$$

У форматі лінійного програмування математична модель задачі має вигляд:

Цільова функція: $F = D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 \rightarrow \max$ (3.5)

Обмеження:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq C_1 \\ L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \leq C_2 \\ x_1 \leq C_3 \\ x_2 \leq C_4 \\ x_3 \leq C_5. \end{cases} \quad (3.6)$$

Системі обмежень (3.6) можна надати канонічного вигляду, якщо ввести додаткові невідомі:

y_1 – кількість неподаних під розвантаження вагонів;

y_2 – невикористаний час локомотива;

y_3 – невикористана місткість 1ВФ;

y_4 – невикористана місткість 2ВФ;

y_5 – невикористана місткість 3ВФ.

Тоді систему обмежень (3.6) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = C_1 \\ L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + y_2 = C_2 \\ x_1 + y_3 = C_3 \\ x_2 + y_4 = C_4 \\ x_3 + y_5 = C_5. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2. Використання симплекс-методу для розв'язку задачі

Система (3.7) складається з 5 рівнянь, містить 8 невідомих змінних і має безліч рішень, тобто є невизначеною. Єдиний розв'язок такої системи пропонує симплекс-метод, який передбачає поділ усіх невідомих на базисні і вільні. Кількість базисних змінних визначається кількістю рівнянь (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), а решта змінних – вільні (x_1, x_2, x_3).

Якщо вільним змінним надати будь-яких значень, то система (3.7) із невизначеної перетвориться на визначену і розв'язок такої системи дістав назву **базисного** плану.

Якщо призначати вільними ті або інші змінні, то можна отримати різні базисні рішення. Теорія лінійного програмування стверджує, що серед таких рішень завжди можна знайти оптимальне або декілька оптимальних.

Якщо знайти будь-який базисний план, а потім поліпшити його, то врешті-решт отримаємо оптимальне рішення. На цьому принципі базується симплекс-метод.

Перепишемо систему (3.7) відносно базисних змінних:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 - (x_1 + x_2 + x_3) \\ y_2 = C_2 - (L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3) \\ y_3 = C_3 - x_1 \\ y_4 = C_4 - x_2 \\ y_5 = C_5 - x_3. \end{cases} \quad (3.8)$$

В аналогічній формі відтворимо цільову функцію (3.1):

$$F = 0 - (-D_1 x_1 - D_2 x_2 - D_3 x_3). \quad (3.9)$$

Якщо прирівняти вільні невідомі до нуля ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), то матимемо такий базисний план, який дістав назву *початкового*.

$$y_1 = C_1; y_2 = C_2; y_3 = C_3; y_4 = C_4; y_5 = C_5; P = 0 \quad (3.10)$$

Початковий план (3.10) треба поліпшити шляхом виведення якої-небудь базисної змінної з плану та введення в план замість неї вільної змінної. Питання полягає в тому, які невідомі треба обрати, щоб поліпшити значення цільової функції.

Для цього складається початкова симплекс-таблиця (табл. 3.1), яка містить початковий план. У клітинках таблиці записуються коефіцієнти при вільних змінних із знаками у круглих дужках (3.8).

Таблиця 3.1

Початкова симплекс-таблиця

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	Константи
y_1	1	1	1	C_1
y_2	L_1	L_2	L_3	C_2
y_3	1	0	0	C_3
y_4	0	1	0	C_4
y_5	0	0	1	C_5
F	$-D_1$	$-D_2$	$-D_3$	0

3.3. Алгоритм симплекс-методу

Алгоритм симплекс-методу складається з двох етапів: пошуку вирішальних елементів і модифікованих Жорданових вилучень.

I етап

Пошук вирішального елемента починається зі стовпця, який містить найбільший за модулем від'ємний елемент F -рядка і називається *вирішальним стовцем*.

Потім розглядаються всі додатні елементи вирішального стовпця і на них ділять відповідні елементи стовпця констант. Мінімальне з отриманих відношень визначає *вирішальний рядок*. Якщо виявиться декілька однакових відношень, то вирішальним рядком обирається той з них, котрий відповідає максимальному з мінімальних відношень.

На перетині вирішальних стовпця і рядка знаходиться *вирішальний елемент* a_{rs} .

II етап.

На підставі вирішальних стовпця, рядка та елемента формується нова таблиця, в якій елемент, що знаходиться на місці вирішального попередньої таблиці b_{rs} , визначається шляхом поділу одиниці на вирішальний елемент попередньої таблиці a_{rs} :

$$b_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}, \quad (3.7)$$

де r – вирішальний рядок;

s – вирішальний стовець.

Решта елементів вирішального рядка b_{rj} визначаються діленням відповідних елементів попередньої таблиці на вирішальний елемент:

$$b_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \quad (3.8)$$

де a_{rj} – елементи вирішального рядка попередньої таблиці.

Решта елементів вирішального стовпця визначаються аналогічно, але зі зміною знака на протилежний:

$$b_{is} = - \frac{a_{is}}{a_{rs}}, \quad (3.9)$$

де a_{is} – елементи вирішального стовпця попередньої таблиці;

Елементи нової таблиці, що залишилися, визначаються за формулою:

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}, \quad (3.10)$$

де a_{ij} – відповідні елементи попередньої таблиці.

Всі дії II етапу складають одну ітерацію, результатом якої є перехід від одного базисного плану до іншого – поліпшеного. Ітерації повторюються доти, доки є можливість подальшого поліпшення плану. Ознакою оптимальності плану є відсутність від'ємних елементів F -рядка.

4. Контрольні запитання та завдання

4.1. У чому полягає основна ідея задач лінійного програмування?

4.2. Що означає цільова функція в математичній моделі задачі лінійного програмування?

4.3. Яка природа обмежень математичної моделі?

4.4. Який сенс має введення в математичну модель базисних змінних?

4.5. Викласти сутність симплекс-методу.

5. Варіанти індивідуальних завдань

Для всіх варіантів час роботи локомотиву складає 23 години. Інші показники, необхідні для розв'язку задачі, наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1.

Початкові дані до задачі

Номер варіанта	Місткість ВФ (вагони)			Витрати локомотиво-годин на 1 вагон			Прибуток на 1 вагон			Маршрут (вагони)
	1ВФ	2ВФ	3ВФ	1ВФ	2ВФ	3ВФ	1ВФ	2ВФ	3ВФ	
1	35	40	25	0,3	0,4	0,2	10	12	10	75
2	25	35	40	0,3	0,3	0,2	11	12	13	80
3	35	40	30	0,4	0,3	0,3	11	15	13	70
4	30	40	20	0,3	0,3	0,4	11	15	15	65
5	40	25	30	0,3	0,2	0,4	14	12	13	80
6	40	35	25	0,2	0,5	0,3	12	10	14	80
7	45	35	25	0,2	0,4	0,2	16	10	11	80
8	40	30	30	0,3	0,2	0,3	18	16	12	75
9	30	40	30	0,3	0,5	0,4	18	16	18	70
10	45	40	25	0,3	0,5	0,3	16	12	13	80
11	30	40	20	0,5	0,4	0,4	14	14	15	82
12	35	25	40	0,2	0,3	0,5	14	14	15	78
13	35	25	42	0,3	0,5	0,4	14	13	14	77
14	35	40	30	0,3	0,5	0,3	11	13	14	68
15	35	40	30	0,5	0,3	0,3	11	13	11	70
16	40	25	30	0,3	0,4	0,3	14	13	12	80
17	40	25	35	0,3	0,4	0,2	14	13	12	82
18	40	30	25	0,2	0,4	0,3	15	13	13	80
19	35	30	40	0,2	0,4	0,3	14	13	14	75
20	35	25	40	0,5	0,3	0,4	14	13	12	70
21	40	35	35	0,3	0,2	0,4	14	14	14	76
22	40	35	25	0,4	0,2	0,2	12	13	14	78
23	25	30	40	0,4	0,2	0,2	12	13	14	80
24	25	30	40	0,2	0,3	0,5	15	13	12	82
25	40	35	25	0,3	0,3	0,3	14	13	14	80
26	40	35	30	0,3	0,4	0,2	14	13	15	76
27	40	35	30	0,2	0,4	0,1	15	13	12	76
28	40	30	40	0,3	0,2	0,3	14	12	12	82
29	25	30	30	0,3	0,3	0,2	15	14	15	80
30	40	35	45	0,3	0,2	0,3	15	16	14	80

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

1. Постановка задачі

Три станції відправлення A_1, A_2 і A_3 мають деяку кількість однорідного вантажу a_1, a_2 і a_3 відповідно, який слід перевезти залізницею до дев'яти станцій призначення B_1, B_2, \dots, B_9 . Попит у вантажі кожної станції призначення становить b_1, b_2, \dots, b_9 відповідно.

З кожної станції відправлення A_i ($i=1, 2, 3$) є можливість перевезення вантажу до кожної станції призначення B_j ($j=1, \dots, 9$).

Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу зі станції A_i до станції B_j складають c_{ij} одиниць.

Задача полягає в тому, щоб визначити такий план перевезень, при якому попит усіх споживачів вантажу був задовільнений, весь вантаж вивезений і сумарні транспортні витрати при цьому були *мінімальними*.

2. Порядок виконання роботи

2.1. Відповідно до індивідуального завдання скласти математичну модель транспортної задачі (цільову функцію та обмеження).

2.2. Знайти опорний план транспортної задачі методами північно-західного кута і мінімального елемента і визначити базовий з них.

2.3. На основі визначеного базового опорного плану (п. 2.2) знайти оптимальний план транспортної задачі з використанням методу потенціалів.

3. Навчальний матеріал

3.1. Математична модель транспортної задачі

Позначимо через x_{ij} ($x_{ij} \geq 0$) обсяг вантажу, що перевозиться зі станції A_i до станції B_j . Відтак цільова функція набуває вигляду:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

де $c_{ij}x_{ij}$ – транспортні витрати на перевезення вантажу x_{ij} .

Обмеження для станцій відправлення:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (3.2)$$

Обмеження для станцій призначення:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

Сукупність x_{ij} , можна відтворити у вигляді матриці:

$$X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Матрицю X називають **планом** транспортної задачі. Будь-яка сукупність x_{ij} , що задовольняє умовам (3.2) і (3.3), дістала назву **опорного** плану.

План, при якому цільова функція $F(x_{ij})$ досягає мінімуму, називається **оптимальним**.

Умови транспортної задачі зображують у вигляді табл. 3.1, яка дістала назву **матриці перевезень**.

Кожний рядок матриці перевезень відповідає певній станції відправлення, а кожний стовпець – станції призначення. Клітинки матриці, поділені на дві частини – верхню та нижню, відповідають маршрутам перевезень (кількість маршрутів $m \times n$). У верхній частині клітинки записується вартість перевезення одиниці вантажу c_{ij} за відповідним маршрутом, а в нижній частині клітинки – елемент рішення x_{ij} , який вказує, яка кількість вантажу планується до перевезення від i -ї станції відправлення до j -ї станції призначення.

Таблиця 3.1

Матриця перевезень

Станції відправлення	Станції призначення						Обсяг вантажу (a_i)
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1j} X_{1j}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2j} X_{2j}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
.
A_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	...	C_{ij} X_{ij}	...	C_{in} X_{in}	a_i
.
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mj} X_{mj}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреба у вантажі (b_j)	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

3.2. Алгоритм пошуку оптимального плану

Сутність пошуку оптимального плану транспортної задачі полягає у тому, щоб, виходячи з будь-якого опорного плану, поступово поліпшуючи його, перейти до оптимального. Чим краще вибраний опорний план, тим менше ітерацій потрібно для переходу до оптимального плану.

Алгоритм розв'язку транспортної задачі потребує виконання таких етапів:

- визначення опорного плану;
- перевірка опорного плану на оптимальність;
- перехід до наступного поліпшеного плану, якщо план не оптимальний, або одержання кінцевого результату, якщо план оптимальний.

Існують спеціальні методи побудови опорного плану, до яких належать метод північно-західного кута та мінімальної вартості. Від обраного методу залежить кількість ітерацій для отримання оптимального плану.

3.3. Визначення опорного плану

3.3.1. Метод північно-західного кута

Побудова опорного плану методом північно-західного кута починається з першої (верхньої лівої) клітинки (табл. 3.1). Розподіл ресурсів першої станції відправлення вантажу здійснюється так, щоб спочатку задовольнити потреби першої станції призначення, потім другої і так далі до повного розподілу ресурсів першої станції відправлення. Потім переходять до другої станції відправлення вантажу і розподіл здійснюється подібним чином доти, доки не будуть розподілені всі ресурси станцій відправлення і задоволені всі потреби станцій призначення.

Метод північно-західного кута привертає увагу надзвичайною простотою, але в ньому не приймається до уваги вартість перевезень і тому отримані результати найбільш віддалені від оптимальних, ніж у інших методів.

3.3.2. Метод мінімальної вартості

У таблиці 3.1 шукається клітинка, яка має мінімальну вартість c_{ij} і в цю клітинку призначається максимально можливе перевезення, яке визначається як $\min(a_i, b_j)$. Результатом такого призначення є вилучення з подальших розрахунків рядка матриці перевезень, якщо вичерпано ресурс станції відправлення A_i , або стовпця, якщо задовільнені потреби станції призначення B_j . Для тієї частини матриці, що залишилась після вилучення, знову визначається клітинка з найменшою вартістю і процес побудови опорного плану повторюється до повного розподілу всього ресурсу вантажу.

3.3.3. Випадок виродження

У кожному з наведених методів побудови опорного плану при призначенні перевезення викреслюється з подальшого розгляду рядок або стовпець, а при призначенні останнього перевезення – рядок і стовпець.

Оскільки сума рядків та стовпців дорівнює $m+n$, а при останньому призначенні викреслюються обидва, то кількість призначених перевезень повинна дорівнювати $m+n-1$. Проте, інколи до призначення останнього перевезення одночасно вилучається і рядок, і стовпець. Це трапляється, коли ресурси постачальника та попит споживача однакові. Кількість перевезень у такому плані менша ніж $m+n-1$ і план дістав назву *виродженого*. У цьому випадку в план вводять додаткові нульові перевезення за визначеним алгоритмом.

3.4. Визначення оптимального плану методом потенціалів

Метод потенціалів базується на теоремі Канторовича, яка стверджує, що план X є оптимальним тільки тоді, коли для кожного рядка i ($i=1, 2, \dots, m$) і кожного стовпця j ($j=1, 2, \dots, n$) матриці перевезень віднайдуться такі числа – потенціали u_1, u_2, \dots, u_m і v_1, v_2, \dots, v_n , для яких виконуються умови:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} > 0 \text{ (клітинка з перевезенням);} \quad (3.5)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \text{ якщо } x_{ij} = 0 \text{ (клітинка без перевезення).} \quad (3.6)$$

Для визначення потенціалів u_i і v_j треба побудувати і розв'язати систему рівнянь (3.5) тільки для клітинок матриці (табл. 3.1), які мають перевезення. З

огляду на те, що система має на одне рівняння менше, щоб отримати однозначний розв'язок, одному з потенціалів призначається нульове значення.

За теоремою Канторовича план є оптимальним, якщо різниця d_{ij} між вартістю та сумою потенціалів $c_{ij} - (u_i + v_j) = d_{ij}$ додатна для порожніх клітинок (3.6), а для клітинок з перевезенням – дорівнює нулю (3.5). Таким чином, потрібно перевірити співвідношення:

$$C - (U + V) = D, \quad (3.7)$$

де C – матриця вартостей;

$(U + V)$ – матриця суми потенціалів;

D – матриця різниці.

Якщо всі елементи матриці D додатні – план оптимальний.

Якщо план не є оптимальним, його потрібно поліпшити за таким алгоритмом.

Від'ємні елементи матриці D дістали назву **потенціальних**. Серед потенціальних клітинок матриці D обирається найбільша за модулем і у відповідну клітинку матриці перевезень (табл.3.1) призначається нове перевезення. Щоб визначити величину перевезення, необхідно побудувати цикл, починаючи з обраної клітинки.

Для циклу транспортної задачі характерні такі властивості:

- цикл є замкненим багатокутником;
- вершинами багатокутника є зайняті перевезеннями клітинки таблиці, крім однієї – початкової;
- всі кути циклу прямі і кожний відрізок циклу, обмежений двома вершинами, цілком належить або одному рядку, або одному стовпцю;
- цикл має парне число вершин;
- відрізки циклу можуть проходити через клітинки з перевезеннями, які можуть не бути вершинами циклу;
- від будь-якої порожньої клітинки можна побудувати тільки єдиний цикл.

Першій клітинці (вершині) циклу призначається знак «+», наступній – знак «-» і далі за циклом знаки чергуються. У клітинках зі знаком «-» обирається найменший обсяг перевезень ψ і відбувається перерозподіл перевезень за циклом:

$x_{ij} + \psi$ для клітинок циклу, які помічені знаком «+»;

$x_{ij} - \psi$ для клітинок циклу, які помічені знаком «-».

У клітинках, які не ввійшли до циклу, обсяги перевезень залишаються незмінними. Поліпшений за рахунок перерозподілу перевезень план перевіряється на оптимальність за наведеною вище методикою. Процес пошуку оптимального плану закінчується, якщо матриця різниць D буде додатною.

4. Контрольні запитання та завдання

- 4.1. Дати визначення транспортній задачі.
- 4.2. Навести математичну модель транспортної задачі.
- 4.3. Який план транспортної задачі називається опорним?
- 4.4. Навести методи побудови опорного плану.

4.5. Який план перевезень називається оптимальним?

4.6. Яким умовам за теоремою Канторовича повинен задовольняти оптимальний план?

5. Варіанти індивідуальних завдань

Початкові дані до транспортної задачі наведені в табл. 5.1–5.3.

Таблиця 5.1

Обсяг вантажів станції відправлення

Номер станції відправлення	Остання цифра порядкового номера студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	100	200	200	150	125	125	125	100	125
2	250	150	100	200	100	100	225	275	200	200
3	150	250	200	100	250	275	150	100	200	175
Разом	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Таблиця 5.2

Обсяг прибуття вантажів на станції призначення

Номер станції призначення	Остання цифра порядкового номера студента									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	40	40	40	40	40	50	65	75	40	55
2	45	50	55	65	60	55	60	60	45	65
3	50	55	65	60	75	65	75	40	40	60
4	55	65	60	75	70	60	70	45	50	70
5	65	60	75	70	40	75	40	40	55	75
6	60	75	70	40	45	70	45	50	65	40
7	75	70	40	45	50	40	40	55	60	45
8	70	40	45	50	55	45	50	65	75	40
9	40	45	50	55	65	40	55	70	70	50
Разом	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Таблиця 5.3

Варіанти матриці вартостей

Варіант 1	12	11	9	7	12	10	11	7	9
	9	15	4	5	11	13	8	6	16
	3	3	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 2	1	7	9	14	12	7	10	2	21
	15	14	13	3	14	12	7	10	3
	6	21	12	8	13	9	7	18	17
Варіант 3	12	1	9	10	16	10	11	8	9
	9	15	12	5	17	13	8	6	2
	3	4	6	8	14	3	12	15	22
Варіант 4	8	18	9	17	12	10	11	7	9
	9	15	4	25	11	13	28	26	16
	3	1	6	8	19	14	5	15	12

Варіант 5	2	11	19	27	20	11	16	17	19
	19	5	4	7	21	13	8	16	7
	1	2	6	17	9	18	25	8	3
Варіант 6	2	21	19	27	28	15	21	7	9
	29	1	14	5	22	4	6	6	18
	13	13	3	18	4	9	10	15	21
Варіант 7	28	18	9	7	12	10	3	27	9
	2	15	4	25	21	13	8	6	16
	27	12	6	8	9	14	5	15	2
Варіант 8	2	1	19	4	22	10	11	6	9
	22	4	5	14	13	18	6	26	6
	17	3	16	23	9	14	25	10	12
Варіант 9	21	18	9	7	12	14	11	2	29
	9	13	14	5	4	13	8	26	2
	17	23	9	6	21	17	24	12	1
Варіант 10	12	11	7	9	10	15	11	27	9
	15	9	4	20	5	13	8	6	16
	19	16	6	8	14	9	5	18	21
Варіант 11	1	12	27	14	2	24	22	7	9
	9	15	4	25	17	13	8	6	16
	3	23	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 12	1	7	10	17	11	12	1	7	9
	12	15	4	5	18	13	8	6	19
	2	3	6	8	9	14	5	15	2
Варіант 13	21	14	9	27	12	10	11	7	1
	17	15	4	5	11	13	8	6	16
	2	3	6	8	9	14	5	12	17
Варіант 14	2	11	9	7	12	10	16	17	29
	19	15	4	5	18	13	8	6	16
	13	1	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 15	12	15	9	27	12	10	21	7	9
	9	3	4	5	18	13	8	6	16
	3	1	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 16	11	15	9	17	12	10	11	7	9
	19	15	4	11	13	8	6	5	16
	23	3	6	8	9	14	5	15	12
Варіант 17	10	9	11	2	8	6	7	12	18
	5	3	14	16	1	9	19	13	4
	20	17	4	9	14	17	6	20	9
Варіант 18	1	9	10	6	8	2	11	16	18
	7	3	5	9	12	11	17	6	8
	12	16	8	7	2	7	10	19	17
Варіант 19	12	20	17	19	10	14	13	18	17
	21	6	9	5	20	10	14	18	13
	22	5	9	10	17	13	19	5	7

Варіант 20	8	2	10	21	23	18	8	12	16
	9	5	25	23	22	24	19	10	11
	14	15	1	6	8	3	18	5	9
Варіант 21	19	2	15	16	24	8	24	19	17
	2	5	17	12	13	6	21	7	11
	23	19	8	7	2	22	9	17	6
Варіант 22	7	12	19	28	24	13	18	14	9
	22	24	19	11	16	7	3	4	19
	9	4	3	21	1	24	11	18	8
Варіант 23	6	15	21	5	8	17	4	19	23
	13	14	27	21	5	4	12	7	4
	4	8	24	20	17	11	16	18	8
Варіант 24	10	21	23	25	14	7	13	4	19
	12	7	19	6	28	15	19	9	24
	9	25	21	27	5	8	3	19	10
Варіант 25	11	17	9	6	8	23	10	11	13
	27	8	23	28	12	15	17	14	9
	1	14	2	17	6	21	18	9	11
Варіант 26	9	18	2	21	26	14	17	9	11
	27	22	19	18	24	9	11	10	16
	11	8	19	8	1	5	15	16	8
Варіант 27	9	15	17	21	16	24	1	10	27
	22	19	16	17	13	6	7	21	2
	5	19	14	13	25	24	4	8	3
Варіант 28	6	12	21	22	8	25	7	12	10
	27	19	21	4	5	8	10	12	19
	15	17	6	18	13	9	25	7	3
Варіант 29	27	25	21	17	1	14	18	13	20
	17	16	9	8	14	13	10	8	5
	11	8	17	16	15	11	9	13	15
Варіант 30	10	11	11	15	17	19	10	19	21
	23	24	19	18	17	10	9	13	2
	15	18	21	24	16	6	21	14	7

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулиничев В. И., Кудрявцев В. Н., Корешов А. Н. Математические методы в эксплуатации железных дорог. – М.: Транспорт, 1986. – 262 с.
2. Захаров В. К., Севастьянов В. А., Чистяков В. П. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 332 с.
3. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
4. Математическое моделирование экономических процессов на транспорте. – М.: ВЗИИТ, 1986. – 270 с.
5. Рихтер К. Ю., Фишер П., Шнейдер Г. Статистические методы в транспортных исследованиях. – М.: Транспорт, 1982. – 283 с.
6. Румшинский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1981. – 132 с.
7. Долголаптев В. Г. Работа в Excel 7.0 для Windows 95 на примерах. – М.: БИНОМ, 1995. – 245 с.
8. Методичні вказівки до використання електронної таблиці *Microsoft Excel* / Л. В. Філіпович, В. А. Гладков, А. Ю. Рисцова. – К.: КІТ, 1999. – 38 с.
9. Методичні вказівки щодо виконання контрольної роботи для студентів галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура», напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)» безвідривної форми навчання / Л. В. Філіпович, Р. С. Щербина. – К.: ДЕТУТ, 2009. – 74 с.
10. Математичні моделі в розрахунках на ЕОМ: Конспект лекцій / Л. В. Філіпович. – К.: ДЕТУТ, 2010. – 77 с.

Навчально-методичне видання

**Людмила Всеволодівна Філіпович
Юлія Анатоліївна Бердниченко**

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В РОЗРАХУНКАХ НА ЕОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

щодо виконання самостійних робіт для студентів
галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура»,
напряму підготовки 6.070101 «Транспортні технології (залізничний транспорт)»
денної форми навчання

Відповідальний за випуск – Л. В. Філіпович
Директор РВЦ ДЕГУТ – Л. В. Пономаренко
Редактор – Н. В. Щербак
Верстка – В. О. Полічева

Підписано до друку 03.05.12 р. Формат 60x84/16, папір офсетний,
друк – на різнографі. Зам. № 78-2/12. Тираж 105 прим.
Надруковано в Редакційно-видавничому ввідлі Державного економіко-
технологічного університету транспорту.
Свідоцтво про реєстрацію Серія ДК № 3079 від 27.12.2007 р., 03049, м. Київ,
вул. Миколи Лукашевича, 19.